

退化高阶抛物型分布参数系统的迭代学习控制

顾盼盼, 田森平[†]

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 研究一类高阶分布参数系统的迭代学习控制问题, 该类系统由退化高阶抛物型偏微分方程构成. 根据系统所满足的性质, 基于P型学习算法构建得到迭代学习控制器. 利用压缩映射原理, 证明该算法能使得系统的输出跟踪误差于 L^2 空间内沿迭代轴方向收敛于零. 最后, 仿真算例验证了算法的有效性.

关键词: 迭代学习控制; 高阶分布参数系统; 退化抛物型方程; P型学习算法

引用格式: 顾盼盼, 田森平. 退化高阶抛物型分布参数系统的迭代学习控制. 控制理论与应用, 2019, 36(7): 1147 – 1152

DOI: 10.7641/CTA.2018.80069

Iterative learning control for degenerating higher order parabolic distributed parameter systems

GU Pan-pan, TIAN Sen-ping[†]

(School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The problem of iterative learning control for a class of higher order distributed parameter systems is studied. Here, the considered distributed parameter systems are composed of degenerating higher order parabolic partial differential equations. According to the characteristics of the systems, iterative learning control laws are proposed for such higher order distributed parameter systems based on P-type learning algorithm. Using the contraction mapping method, it is shown that the algorithm can guarantee the output tracking errors on L^2 space converge to zero along the iteration axis. Finally, an example is constructed to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: iterative learning control; higher order distributed parameter systems; degenerating parabolic equations; P-type learning algorithm

Citation: GU Panpan, TIAN Senping. Iterative learning control for degenerating higher order parabolic distributed parameter systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(7): 1147 – 1152

1 引言

迭代学习控制是一种具有严格数学描述的智能控制方法, 适用于有限时间区间上具有重复运动性质的被控对象. 迭代学习控制自1984年由Arimoto等人^[1]提出完整的算法以来便引起人们的广泛关注^[2-6], 并逐渐发展成为控制领域的热点研究课题. 因其算法的简单和有效性, 近年来迭代学习控制已被广泛应用于许多实际的控制系统中, 如机械臂^[7]、硬盘驱动器^[8]、高速列车^[9]等.

实际工程中, 许多动态过程都可由偏微分方程所代表的分布参数系统模型刻画^[10], 如弹性振动系统的控制、温度场的控制、带柔性连杆的机器人等. 因此,

对分布参数系统的研究具有重要的理论意义和实际应用价值. 到目前为止, 将迭代学习控制方法应用于分布参数系统的研究成果已有不少. 文献[11-16]研究了抛物型分布参数系统的迭代学习控制问题. 文献[17]则针对一类非线性抛物型偏差分系统, 构建得到一种开环P型学习律并给出该算法收敛的充分条件. 文献[18]利用D型学习律, 对一类非正则抛物型分布参数系统的迭代学习控制问题进行了讨论. 文献[19-20]分别对一阶和二阶双曲型分布参数系统进行了迭代学习控制设计, 并给出了在P型学习律作用下的收敛性结论. 文献[21]则进一步研究了分布参数系统于 $W^{1,2}$ 空间中的迭代学习控制问题. 最近, 文献[22]研

收稿日期: 2018-01-22; 录用日期: 2018-08-18.

[†]通信作者. E-mail: ausptian@scut.edu.cn; Tel.: +86 13711515863.

本文责任编辑: 侯忠生.

国家自然科学基金项目(61374104, 61773170), 广东省自然科学基金项目(2016A030313505)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61374104, 61773170) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province (2016A030313505).

究了一类一维四阶分布参数系统的迭代学习控制问题. 注意到, 目前已有的分布参数系统迭代学习控制的研究工作主要集中在低阶系统^[11-21], 涉及高阶系统的研究成果则较少^[22]. 因此, 进一步探讨高阶分布参数系统的迭代学习控制设计问题是一项有意义的工作. 另一方面, 退化的高阶抛物型偏微分方程可以描述很多固体薄膜的发展演化现象^[23-25], 如半导体元器件的生产、飞机环件的除雪及微小器件的薄膜旋转覆盖等. 事实上, 这些工业生产过程存在着较强的重复性, 这些重复性为迭代学习控制的应用提供了依据. 在已有研究的基础上, 本文考虑一类高阶分布参数系统的迭代学习控制问题, 该系统由退化高阶抛物型偏微分方程构成. 利用压缩映射原理, 证明在P型学习算法的作用下系统的输出跟踪误差于 L^2 空间内沿迭代轴方向收敛.

本文给出如下符号约定: 对函数 $Q(x, t): [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, 记

$$\|Q(\cdot, t)\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^1 Q^2(x, t) dx},$$

定义 $\|Q\|_{L^2, s} = \sup_{t \in [0, T]} \|Q(\cdot, t)\|_{L^2}$, 对给定的 $\lambda > 0$, 定义

$$\|Q\|_{L^2, \lambda} = \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-\lambda t} \|Q(\cdot, t)\|_{L^2}\}.$$

2 问题描述

考虑如下形式的退化高阶抛物型方程^[26]:

$$t^m \frac{\partial^{2n} Q(x, t)}{\partial x^{2n}} + (-1)^n \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = f(x, t), \quad (1)$$

其中: $(x, t) \in (0, 1) \times [0, T]$, $m \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^+$. 方程(1)相应的初、边值条件为

$$Q(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial^{2l} Q(x, t)}{\partial x^{2l}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2l} Q(x, t)}{\partial x^{2l}} \Big|_{x=1} = 0, \quad t \in [0, T],$$

其中 $l = 0, 1, \dots, n-1$.

为了进行相应的迭代学习控制设计, 本文用控制变量 $u(x, t)$ 替代 $f(x, t)$, 并为方程(1)配置通常形式的输出方程. 进一步, 构建得到如下形式的高阶分布参数系统:

$$\begin{cases} t^m \frac{\partial^{2n} Q(x, t)}{\partial x^{2n}} + (-1)^n \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = u(x, t), \\ y(x, t) = C(t)Q(x, t) + D(t)u(x, t), \end{cases} \quad (2)$$

这里 $Q(x, t)$, $u(x, t)$, $y(x, t) \in \mathbb{R}$ 分别表示系统的状态、控制输入和输出.

对系统(2), 给出如下假设条件:

假设1 对 $\forall t \in [0, T]$, 有 $|C(t)| \leq c$, $0 < d_1 \leq D(t) \leq d_2$, 其中: c 为未知常数, d_1, d_2 为已知常数.

假设2 对于给定的期望轨迹 $y_d(x, t)$, 存在唯一

的控制输入 $u_d(x, t)$ 使得

$$\begin{cases} t^m \frac{\partial^{2n} Q_d(x, t)}{\partial x^{2n}} + (-1)^n \frac{\partial Q_d(x, t)}{\partial t} = u_d(x, t), \\ y_d(x, t) = C(t)Q_d(x, t) + D(t)u_d(x, t), \end{cases}$$

这里 $Q_d(x, t)$ 是相应的期望状态轨迹.

设动态系统(2)在有限时间区间 $[0, T]$ 内是可重复的, 在迭代第 $k(k = 0, 1, 2, \dots)$ 次时, 重写系统(2)为

$$\begin{cases} t^m \frac{\partial^{2n} Q_k(x, t)}{\partial x^{2n}} + (-1)^n \frac{\partial Q_k(x, t)}{\partial t} = u_k(x, t), \\ y_k(x, t) = C(t)Q_k(x, t) + D(t)u_k(x, t). \end{cases} \quad (3)$$

假设3 系统的初值定位条件为 $Q_k(x, 0) = Q_d(x, 0) = 0$, $x \in [0, 1]$; 边值定位条件为

$$\frac{\partial^{2l} Q_k(x, t)}{\partial x^{2l}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2l} Q_d(x, t)}{\partial x^{2l}} \Big|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^{2l} Q_k(x, t)}{\partial x^{2l}} \Big|_{x=1} = \frac{\partial^{2l} Q_d(x, t)}{\partial x^{2l}} \Big|_{x=1} = 0,$$

$$t \in [0, T], \quad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

注1 在常微分系统的迭代学习控制领域中, 已有不少文献考虑无初始定位问题(最宽的初始条件). 与常微分系统相比, 分布参数系统包含初值和边值条件. 因此, 考虑分布参数系统的初值和边界值的无定位问题, 具有重要理论和实际的应用价值. 然而, 由于分布参数系统本身特性及处理技术限制, 这一问题目前还难以解决. 目前, 就分布参数系统的初值条件设置问题, 可归纳为以下3种:

I) 理想初始条件^[18, 21]:

$$Q_k(x, 0) = Q_d(x, 0);$$

II) 渐近理想初始条件^[11, 13, 15-16]:

$$\|Q_k(x, 0) - Q_d(x, 0)\|_{L^2}^2 \leq \bar{l}r^k$$

或

$$\|Q_{k+1}(x, 0) - Q_k(x, 0)\|_{L^2}^2 \leq \bar{l}r^k, \quad r \in [0, 1), \quad \bar{l} > 0;$$

III) 有界随机初始条件^[22]:

$$\|Q_k(x, 0) - Q_d(x, 0)\|_{L^2} \leq \varepsilon,$$

这里 ε 为正的常数. 在初始条件I)或II)的情形下, 系统的输出跟踪误差可收敛于零; 在有界随机初始条件III)的情形下, 系统的输出跟踪误差可收敛到与 ε 有关的一个原点邻域内. 边值条件的严格重复是迭代学习算法收敛的必要条件. 若每次迭代的边界值存在一定的偏移, 则相邻的状态误差 $\delta Q_k(x, t)$ 及其偏导数在边界点处的值将无法估计, 系统输出跟踪误差的收敛性也将难以保证. 在分布参数系统的迭代学习控制领域至今还没有相关文献考虑这一问题, 仍有待进一步探究. 另一方面, 对于分布参数系统, 作者需给出适定的初、边值定解条件, 即对给定的初、边值及控制输入 $u(x, t)$, 系统的解 $Q(x, t)$ 在给定的区域内存在唯一. 因此, 针对本文所考虑的退化高阶分布参数系统, 为了使系统的解在 $(0, 1) \times [0, T]$ 内存在唯一, 本文只能给出如假设3的初、边值定位条件.

本文的目标是通过学习控制的方法寻找控制输入序列 $u_k(x, t)$, 使得相应的输出序列 $y_k(x, t)$ 于 L^2 空间中收敛于期望的输出轨迹 $y_d(x, t)$, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_{L^2, s} = 0,$$

其中 $e_k(x, t) = y_d(x, t) - y_k(x, t)$ 为系统的输出跟踪误差.

3 主要结果

对系统(3), 采用如下P型学习算法:

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + qe_k(x, t), \quad (4)$$

其中 $q > 0$ 为学习增益, 则有如下定理:

定理 1 假设1-3成立, 若有

$$\rho = \sup_{t \in [0, T]} |1 - qD(t)| < 1, \quad (5)$$

则系统(3)在P型学习算法(4)的作用下于 L^2 空间内是收敛的, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_{L^2, s} = 0$.

证 记

$$\delta Q_k(x, t) = Q_{k+1}(x, t) - Q_k(x, t),$$

$$\delta u_k(x, t) = u_{k+1}(x, t) - u_k(x, t).$$

由系统(3)的第2式及式(4), 有

$$\begin{aligned} e_{k+1}(x, t) &= e_k(x, t) + y_k(x, t) - y_{k+1}(x, t) = \\ &= e_k(x, t) - C(t)\delta Q_k(x, t) - D(t)\delta u_k(x, t) = \\ &= e_k(x, t) - C(t)\delta Q_k(x, t) - qD(t)e_k(x, t) = \\ &= (1 - qD(t))e_k(x, t) - C(t)\delta Q_k(x, t). \end{aligned}$$

由假设1及式(5), 可知

$$|e_{k+1}(x, t)| \leq \rho |e_k(x, t)| + c |\delta Q_k(x, t)|.$$

上式两端平方并对变量 x 从0到1积分, 结合 $\rho < 1$ 可得

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (e_{k+1}(x, t))^2 dx \leq \\ &\rho^2 \int_0^1 (e_k(x, t))^2 dx + c^2 \int_0^1 (\delta Q_k(x, t))^2 dx + \\ &2c \int_0^1 |e_k(x, t)| |\delta Q_k(x, t)| dx. \end{aligned} \quad (6)$$

应用Cauchy-Schwarz积分不等式, 有

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |e_k(x, t)| |\delta Q_k(x, t)| dx \leq \\ &\sqrt{\int_0^1 (e_k(x, t))^2 dx} \sqrt{\int_0^1 (\delta Q_k(x, t))^2 dx}. \end{aligned}$$

将上式代入式(6), 可得

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}(\cdot, t)\|_{L^2}^2 &\leq \rho^2 \|e_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + c^2 \|\delta Q_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \\ &2c \|e_k(\cdot, t)\|_{L^2} \|\delta Q_k(\cdot, t)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

取 $\lambda > 0$, 进一步有

$$\|e_{k+1}\|_{L^2, \lambda}^2 =$$

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in [0, T]} \{e^{-2\lambda t} \|e_{k+1}(\cdot, t)\|_{L^2}^2\} \leq \\ &\rho^2 \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-2\lambda t} \|e_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2\} + \\ &c^2 \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-2\lambda t} \|\delta Q_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2\} + \\ &2c \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-\lambda t} \|e_k(\cdot, t)\|_{L^2} e^{-\lambda t} \|\delta Q_k(\cdot, t)\|_{L^2}\} \leq \\ &\rho^2 \|e_k\|_{L^2, \lambda}^2 + c^2 \|\delta Q_k\|_{L^2, \lambda}^2 + \\ &2c \|e_k\|_{L^2, \lambda} \|\delta Q_k\|_{L^2, \lambda}. \end{aligned} \quad (7)$$

由系统(3)的第1式及式(4), 有

$$t^m \frac{\partial^{2n}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{2n}} + (-1)^n \frac{\partial(\delta Q_k(x, t))}{\partial t} = qe_k(x, t),$$

故

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\delta Q_k(x, t))}{\partial t} + (-1)^n t^m \frac{\partial^{2n}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{2n}} = \\ &(-1)^n qe_k(x, t). \end{aligned}$$

上式两端乘以 $\delta Q_k(x, t)$ 并对变量 x 从0到1积分, 有

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \{\delta Q_k(x, t) \frac{\partial(\delta Q_k(x, t))}{\partial t}\} dx + \\ &(-1)^n t^m \int_0^1 \{\delta Q_k(x, t) \frac{\partial^{2n}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{2n}}\} dx = \\ &(-1)^n q \int_0^1 \delta Q_k(x, t) e_k(x, t) dx, \end{aligned} \quad (8)$$

而

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \{\delta Q_k(x, t) \frac{\partial(\delta Q_k(x, t))}{\partial t}\} dx = \\ &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta Q_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2, \\ &(-1)^n 2 \int_0^1 \delta Q_k(x, t) e_k(x, t) dx \leq \\ &\int_0^1 (\delta Q_k(x, t))^2 dx + \int_0^1 (e_k(x, t))^2 dx = \\ &\|\delta Q_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|e_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

注意到

$$\begin{aligned} &\delta Q_k(x, t) \frac{\partial^{2n}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{2n}} = \\ &\frac{\partial}{\partial x} (\delta Q_k(x, t) \frac{\partial^{2n-1}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{2n-1}} - \\ &\frac{\partial(\delta Q_k(x, t))}{\partial x} \frac{\partial^{2n-2}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{2n-2}} + \\ &\frac{\partial^2(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^2} \frac{\partial^{2n-3}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{2n-3}} - \dots - \\ &(-1)^n \frac{\partial^{n-1}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial^n(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^n}) + \\ &(-1)^n (\frac{\partial^n(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^n})^2. \end{aligned}$$

利用假设3中的边值定位条件, 可知

$$\begin{aligned}
& (-1)^n t^m \int_0^1 \left\{ \delta Q_k(x, t) \frac{\partial^{2n}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{2n}} \right\} dx = \\
& (-1)^n t^m \left\{ \delta Q_k(x, t) \frac{\partial^{2n-1}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{2n-1}} - \right. \\
& \frac{\partial(\delta Q_k(x, t))}{\partial x} \frac{\partial^{2n-2}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{2n-2}} + \\
& \frac{\partial^2(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^2} \frac{\partial^{2n-3}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{2n-3}} - \dots - \\
& \left. (-1)^n \frac{\partial^{n-1}(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial^n(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^n} \right\} \Big|_{x=0}^{x=1} + \\
& t^m \int_0^1 \left(\frac{\partial^n(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^n} \right)^2 dx = \\
& t^m \int_0^1 \left(\frac{\partial^n(\delta Q_k(x, t))}{\partial x^n} \right)^2 dx \geq 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

将式(9)–(11)代入式(8), 得

$$\frac{d}{dt} \|\delta Q_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq q \|\delta Q_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + q \|e_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2.$$

应用Bellman–Gronwall引理并结合假设3中的初值定位条件, 有

$$\begin{aligned}
& \|\delta Q_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \\
& q \int_0^t e^{q(t-\eta)} \|e_k(\cdot, \eta)\|_{L^2}^2 d\eta \leq \\
& q e^{qT} \int_0^t e^{2\lambda\eta} e^{-2\lambda\eta} \|e_k(\cdot, \eta)\|_{L^2}^2 d\eta \leq \\
& q e^{qT} \int_0^t e^{2\lambda\eta} d\eta \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-\lambda t} \|e_k(\cdot, t)\|_{L^2}\} \right\}^2 = \\
& q e^{qT} \frac{e^{2\lambda t} - 1}{2\lambda} \|e_k\|_{L^2, \lambda}^2,
\end{aligned}$$

由此有

$$\begin{aligned}
& \|\delta Q_k\|_{L^2, \lambda}^2 = \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-2\lambda t} \|\delta Q_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2\} \leq \\
& \frac{q e^{qT}}{2\lambda} \sup_{t \in [0, T]} \{1 - e^{-2\lambda t}\} \|e_k\|_{L^2, \lambda}^2 \leq \\
& \frac{q e^{qT}}{2\lambda} \|e_k\|_{L^2, \lambda}^2,
\end{aligned}$$

所以

$$\|\delta Q_k\|_{L^2, \lambda} \leq \sqrt{\frac{q e^{qT}}{2\lambda}} \|e_k\|_{L^2, \lambda}.$$

将上式代入式(7)有

$$\|e_{k+1}\|_{L^2, \lambda}^2 \leq \bar{\rho} \|e_k\|_{L^2, \lambda}^2,$$

这里

$$\bar{\rho} = \rho^2 + c^2 \frac{q e^{qT}}{2\lambda} + c \sqrt{\frac{2q e^{qT}}{\lambda}}.$$

由式(5)知 $\rho < 1$, 所以当 λ 足够大时, 能使得 $\bar{\rho} < 1$ 成立, 利用压缩映射原理可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_{L^2, \lambda} = 0.$$

又因为 $\|e_k\|_{L^2, s} \leq e^{\lambda T} \|e_k\|_{L^2, \lambda}$, 由此可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_{L^2, s} = 0.$$

证毕.

注2 在迭代学习控制设计过程中, D型学习算法常用于非正则系统(系统的输入、输出无直输通道), P型学习算法常用于正则系统(系统的输入、输出有直输通道). 本文仅讨论了退化高阶抛物型分布参数系统(正则情形)P型学习算法的收敛性, 但定理1同样可以拓展到高阶P型学习算法中去, 具体的证明过程可参考文献[11], 这里不再赘述.

注3 在分析算法收敛性时, 采用 λ -范数度量跟踪误差存在某些固有缺陷^[27–29]. 在系统运行过程中, 运行时刻越接近于运行区间的上界, 加权系数越小. 即便某时刻的跟踪误差很大, 误差的 λ -范数值也不一定在该时刻取得, 换言之, λ -范数在某种程度上不能客观地量化跟踪误差的本质特征. 为避免 λ -范数所带来的缺陷, 文献[28–29]针对常微分系统分析了控制律在Lebesgue-p范数意义下的单调收敛性. 相较于常微分系统, 分布参数系统的跟踪控制问题相对困难. 针对分布参数系统若采用文中定义的 (L^2, s) 范数度量跟踪误差则可避免 (L^2, λ) 范数所带来的缺陷, 但这在理论上目前还难以实现. 就我们所知, 现有的分布参数系统迭代学习控制的研究文献中, 几乎都是采用类似文中的 (L^2, λ) 范数进行收敛性证明的, 主要原因是: 1) 与其它范数相比, (L^2, λ) 范数意义下的收敛性条件较简单且收敛性分析相对容易; 2) $\mathbb{R}^n$ 上任意2种向量范数是等价的.

4 仿真算例

对系统(2), 取 $m=1, n=2, C(t)=D(t)=1$, 则有

$$\begin{cases} t \frac{\partial^4 Q(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = u(x, t), \\ y(x, t) = Q(x, t) + u(x, t). \end{cases}$$

考虑区域 $(x, t) \in (0, 1) \times [0, 0.5]$, 构建期望的输出:

$$\begin{aligned}
y_d(x, t) = & t^2 e^t [72(x-1)^2 + 216x(x-1) + \\
& 72x^2] + (1+2t)e^t x^3(x-1)^3,
\end{aligned}$$

则相应的

$$\begin{aligned}
Q_d(x, t) = & t e^t x^3(x-1)^3, \\
u_d(x, t) = & t^2 e^t [72(x-1)^2 + 216x(x-1) + \\
& 72x^2] + (1+t)e^t x^3(x-1)^3.
\end{aligned}$$

迭代第 k 次时, 有

$$\begin{cases} t \frac{\partial^4 Q_k(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial Q_k(x, t)}{\partial t} = u_k(x, t), \\ y_k(x, t) = Q_k(x, t) + u_k(x, t). \end{cases}$$

结合假设3, 取初、边值: $Q_k(x, 0) = 0$,

$$\begin{aligned}
Q_k(0, t) = Q_k(1, t) = & \frac{\partial^2 Q_k(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \\
\frac{\partial^2 Q_k(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = & 0.
\end{aligned}$$

取初始控制 $u_0(x, t) = 1$, 构建如下迭代学习控制:

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + qe_k(x, t),$$

取 $q = 0.6$, 则 $\rho = |1 - q| = 0.4$, 即式(5)成立. 图1~3分别是迭代4, 7, 10次的输出误差曲面. 结合注3, 作者分别计算跟踪误差在 (L^2, λ) 范数(取 $\lambda = 6$)和 (L^2, s) 范数意义下的值, 由图4可知, 跟踪误差在这2种范数意义下沿迭代轴方向均是收敛的, 并且跟踪误差在 (L^2, λ) 范数意义下的值明显小于其在 (L^2, s) 范数意义下的值. 因此, 针对分布参数系统, 在理论分析时可借助 (L^2, λ) 范数进行收敛性证明, 而在实际的工程应用中则可采用 (L^2, s) 范数度量跟踪误差.

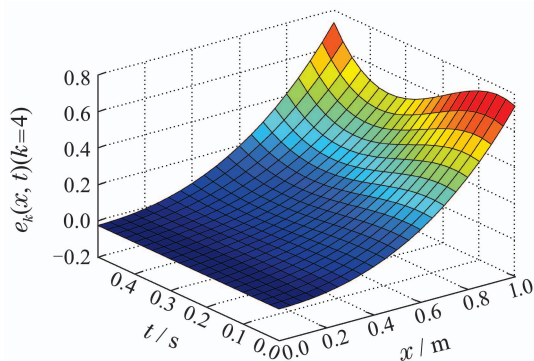


图1 输出误差曲面($k = 4$)

Fig. 1 Output error surface($k = 4$)

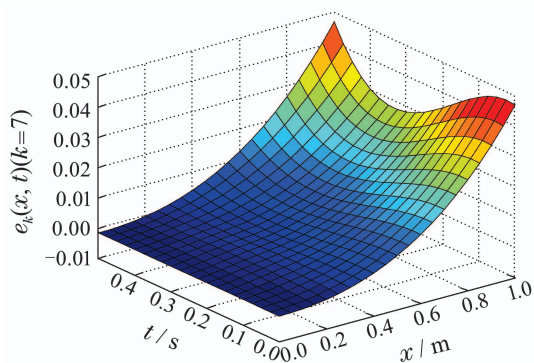


图2 输出误差曲面($k = 7$)

Fig. 2 Output error surface($k = 7$)

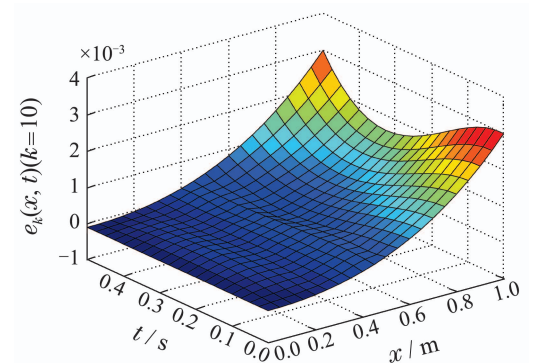


图3 输出误差曲面($k = 10$)

Fig. 3 Output error surface($k = 10$)

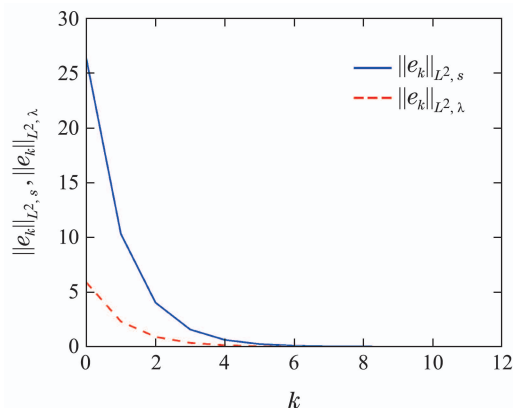


图4 跟踪误差随迭代次数的变化趋势

Fig. 4 Tendency of tracking errors with iterations

5 结论

本文针对一类高阶分布参数系统, 进行了迭代学习控制设计. 该类分布参数系统由退化高阶抛物型偏微分方程构成, 并具有适定的初、边值定解条件. 在P型学习算法的作用下, 系统的输出跟踪误差于 L^2 空间内沿迭代轴方向收敛. 此外, 仿真结果也验证了算法的有效性.

参考文献:

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.
- [2] SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control*. Beijing: National Defence Industry Press, 1999.
(孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制. 北京: 国防工业出版社, 1999.)
- [3] XIE Shengli, TIAN Senping, XIE Zhendong. *Theory and Application of Iterative Learning Control*. Beijing: Science Press, 2005.
(谢胜利, 田森平, 谢振东. 迭代学习控制的理论与应用. 北京: 科学出版社, 2005.)
- [4] CHI Ronghu, HOU Zhongsheng, WANG Danwei, et al. An optimal terminal iterative learning control approach for nonlinear discrete-time systems. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1025 – 1030.
(池荣虎, 侯忠生, 王郸维, 等. 非线性离散时间系统的最优终端迭代学习控制. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1025 – 1030.)
- [5] YAN Qiuzhen, SUN Mingxuan. Error-tracking iterative learning control with state constrained for nonparametric uncertain systems. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(7): 895 – 901.
(严求真, 孙明轩. 非参数不确定系统状态受限误差跟踪学习控制方法. 控制理论与应用, 2015, 32(7): 895 – 901.)
- [6] TAO Hongfeng, DONG Xiaoqi, YANG Huizhong. Optimal algorithm and application for point to point iterative learning control via updating reference trajectory. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(9): 1207 – 1213.
(陶洪峰, 董晓齐, 杨慧中. 参考轨迹更新的点到点迭代学习控制算法优化及应用. 控制理论与应用, 2016, 33(9): 1207 – 1213.)
- [7] SUN M, GE S S, MAREELS I M Y. Adaptive repetitive learning control of robotic manipulators without the requirement for initial repositioning. *IEEE Transaction on Robotics*, 2006, 22(3): 563 – 568.
- [8] CHEN Y, MOORE K L, YU J, et al. Iterative learning control and repetitive control in hard disk drive industry — a tutorial. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2008, 22(4): 325 – 343.

- [9] SUN H, HOU Z, LI D. Coordinated iterative learning control schemes for train trajectory tracking with overspeed protection. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2013, 10(2): 323 – 333.
- [10] WANG Kangning. *Distributed Parameter Control Systems*. Beijing: Science Press, 1986.
(王康宁. 分布参数控制系统. 北京: 科学出版社, 1986.)
- [11] XIE Shengli, XIE Zhengdong, WEI Gang. Learning algorithm for tracking control of nonlinear distributed parameter systems. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(5): 627 – 632.
(谢胜利, 谢振东, 韦岗. 非线性分布参数系统跟踪控制的学习算法. 自动化学报, 1999, 25(5): 627 – 632.)
- [12] XU C, ARASTOO R, SCHUSTER E. On iterative learning control of parabolic distributed parameter systems. *Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control & Automation*. New York: IEEE, 2009: 510 – 515.
- [13] DAI Xisheng, LI Zheng, TIAN Senping. Iterative learning-control for distributed parameter systems based on vector-plot analysis. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(6): 619 – 623.
(戴喜生, 李政, 田森平. 基于向量图分析的分布参数系统迭代学习控制. 控制理论与应用, 2009, 26(6): 619 – 623.)
- [14] HUANG D, XU J X. Steady-state iterative learning control for a class of nonlinear PDE processes. *Journal of Process Control*, 2011, 21(8): 1155 – 1163.
- [15] TIAN Senping, WU Xinsheng. Iterative learning control of distributed parameter systems based on geometric analysis. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1082 – 1085.
(田森平, 吴忻生. 基于几何分析的分布参数系统的迭代学习控制. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1082 – 1085.)
- [16] DAI X, TIAN S, PENG Y, et al. Closed-loop P-type iterative learning control of uncertain linear distributed parameter systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2014, 1(3): 267 – 273.
- [17] DAI Xisheng, GUO Yajun, TIAN Senping, et al. Iterative learning control of nonlinear parabolic partial difference systems. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(12): 1607 – 1612.
(戴喜生, 郭亚君, 田森平, 等. 非线性抛物型偏差分系统迭代学习控制. 控制理论与应用, 2015, 32(12): 1607 – 1612.)
- [18] FU Qin. Iterative learning control for irregular distributed parameter systems. *Control and Decision*, 2016, 31(1): 114 – 122.
(傅勤. 非正则分布参数系统的迭代学习控制. 控制与决策, 2016, 31(1): 114 – 122.)
- [19] DAI Xisheng, TIAN Senping. Iterative learning control for first order strong hyperbolic distributed parameter systems. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1086 – 1089.
(戴喜生, 田森平. 一阶强双曲分布参数系统的迭代学习控制. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1086 – 1089.)
- [20] FU Qin. Iterative learning control for second order nonlinear hyperbolic distributed parameter systems. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2014, 34(3): 284 – 293.
(傅勤. 二阶非线性双曲型分布参数系统的迭代学习控制. 系统科学与数学, 2014, 34(3): 284 – 293.)
- [21] FU Qin. Iterative learning control for distributed parameter systems in space $W^{1,2}$. *Acta Mathematica Scientia*, 2016, 36A(2): 267 – 286.
(傅勤. 分布参数系统于 $W^{1,2}$ 空间中的迭代学习控制. 数学物理学报, 2016, 36A(2): 267 – 286.)
- [22] FU Q, GU P, WU J. Iterative learning control for one-dimensional fourth order distributed parameter systems. *Science China Information Sciences*, 2017, 60(1): 012204.)
- [23] ACHESON D J. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford: Clarendon Press, 1990.
- [24] MYERS T G. Thin films with high surface tension. *Siam Review*, 1998, 40(3): 441 – 462.
- [25] WITELSKI T P, BOWEN M. ADI schemes for higher-order nonlinear diffusion equations. *Applied Numerical Mathematics*, 2003, 45(2/3): 331 – 351.
- [26] AMANOV D. Solvability and spectral properties of the boundary value problem for degenerating higher order parabolic equation. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 268: 1282 – 1291.
- [27] LEE H S, BIEN Z. A note on convergence property of iterative learning controller with respect to sup norm. *Automatica*, 1997, 33(8): 1591 – 1593.
- [28] RUAN Xiao'e, LIAN Jianbang, WU Huizhuo. Convergence of iterative learning control with feedback information in the sense of Lebesgue-p norm. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(4): 513 – 516.
(阮小娥, 连建邦, 吴慧卓. 具有反馈信息的迭代学习控制律在 Lebesgue-p 范数意义下的收敛性. 自动化学报, 2011, 37(4): 513 – 516.)
- [29] RUAN X, BIEN Z Z, WANG Q. Convergence characteristics of proportional-type iterative learning control in the sense of Lebesgue-p norm. *IET Control Theory & Applications*, 2012, 6(6): 707 – 714.

作者简介:

顾盼盼 博士研究生, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: 1005131776@qq.com;

田森平 教授, 博士生导师, 目前研究方向为迭代学习控制理论与算法, E-mail: ausptian@scut.edu.cn.