

具有外部干扰的二阶多自主体系统的协同运动

李玉玲¹, 杨洪勇^{1†}, 刘 凡¹, 杨怡泽^{1,2}, 刘远山¹

(1. 鲁东大学 信息与电气工程学院, 山东 烟台 264025; 2. 新南威尔士大学 电气工程与信息学院, 悉尼)

摘要: 为解决多自主体系统在群集运动过程受到外部干扰影响的问题, 本文研究了具有外部干扰的二阶多自主体系统的分布式协同控制. 本文中的外部干扰包括匹配干扰和不匹配干扰, 针对系统中的匹配干扰, 设计了状态观测器和干扰观测器, 对系统的未知状态和干扰进行估计, 并且构造了基于干扰观测器的多自主体协同控制算法. 对于系统中的不匹配干扰, 设计与匹配干扰不同的干扰观测器, 构造了基于主动抗干扰观测器的协同控制算法. 运用矩阵论和现代控制理论等方法, 研究了基于干扰观测器的二阶多自主体系统的协同控制. 应用计算机仿真分别验证在多自主体系统具有匹配干扰和不匹配干扰的情况下结论的有效性, 仿真结果表明, 本文所设计的多自主体协同控制算法可以使跟随者最终都收敛到领导者的状态, 实现了具有匹配干扰和不匹配干扰的二阶多自主体系统的状态一致性.

关键词: 多自主体系统; 协同运动; 匹配干扰; 不匹配干扰; 主动抗干扰控制

引用格式: 李玉玲, 杨洪勇, 刘凡, 等. 具有外部干扰的二阶多自主体系统的协同运动. 控制理论与应用, 2019, 36(7): 1113 – 1121

DOI: 10.7641/CTA.2018.80086

Cooperative motion of second order multi-agent systems with external disturbances

LI Yu-ling¹, YANG Hong-yong^{1†}, LIU Fan¹, YANG Yi-ze^{1,2}, LIU Yuan-shan¹

(1. School of Information and Electrical Engineering, Ludong University, Yantai Shandong 264025, China;

2. School of Electrical Engineering and Telecommunications, The University of New South Wales, Sydney, Australia)

Abstract: In order to solve the problem of flocking for multi-agent systems with external disturbances, this paper studies the distributed cooperative control of second-order multi-agent systems with external disturbances. Both matched and unmatched disturbances are considered. For the matched disturbances in the systems, state observers and disturbance observers are designed to estimate the unknown states and disturbances of the systems. Based on the disturbance observers, a multi-agent cooperative control algorithm is constructed. For the unmatched disturbances in the systems, disturbance observers which are different from that of the matched disturbances are designed. Based on the active anti-disturbance observers, a multi-agent cooperative control algorithm is constructed. By applying matrix theory and modern control theory, the cooperative control of second-order multi-agent systems based on the disturbance observers are studied. Computer simulations are used to verify the validity of the proposed method in the multi-agent systems with matched disturbances and unmatched disturbances. The simulation results show that the multi-agent cooperative control algorithm designed in this paper can make the states of followers converge to the states of leaders, and the state consistency of the second-order multi-agent systems with matched disturbances and unmatched disturbances is achieved.

Key words: multi-agent system; cooperative motion; matched disturbances; unmatched disturbances; active anti-disturbance control

Citation: LI Yuling, YANG Hongyong, LIU Fan, et al. Cooperative motion of second order multi-agent systems with external disturbances. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(7): 1113 – 1121

收稿日期: 2018-01-29; 录用日期: 2018-09-04.

[†]通信作者. E-mail: hyyang@yeah.net; Tel.: +86 535-6681285.

本文责任编辑: 王龙.

国家自然科学基金项目(61673200, 61472172, 61471185), 山东省自然科学基金项目(ZR2017PF010, ZR2018ZC0438), 烟台市重点研发项目(2016ZH061)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61673200, 61472172, 61471185), the Natural Science Foundation of Shandong Province of China (ZR2017PF010, ZR2018ZC0438) and the Key R&D Program of Yantai City of China (2016ZH061).

1 引言

近年来,多自主系统协同控制^[1-4]由于在军事侦察和勘测、交通运输控制和智能机器人等方面的广泛应用,吸引了国内外许多不同领域研究人员的极大关注.多自主系统的协同优化问题成为复杂系统领域的热点研究问题,促进着分布式系统研究的快速发展.

一致性问题是指个体通过局部信息交流设计的控制协议,通过相互作用影响最终使得个体状态达到共识和一致,一致成问题是分布式协同控制的一个重要研究方向.文献[5]研究了具有主动性领导者和可变互连拓扑的多自主系统一致性问题.文献[6]研究了有向拓扑下异构多自主系统的一致性问题,并且给出了使一致性算法能渐近实现异构多自主系统一致性的充要条件.文献[7]研究了连续时间多自主系统的分布式最优一致性问题,并且得出在联合连通的通信网络中,系统可以达到最优一致性.文献[8]研究了二阶多自主系统的全局一致性问题,并且得出基于事件触发控制的一致性跟踪算法.文献[9]研究了多自主系统的领导者—跟随者一致性问题,并且提出了一种能够确保自主通信网络达到一致性的分布式控制协议.文献[10]研究了离散时间多智能体系统存在通信时延条件下的安全一致性问题.文献[11]讨论了具有切换通信拓扑的多自主系统的一致性问题,建立了一个状态反馈矩阵,使得系统达到一致性.文献[12]研究了基于量子化相互作用的二阶连续时间多自主系统的一致性问题,通过选择合适的控制增益和充分小的量子器模型可以使系统实现一致性.文献[13]研究了基于非线性动态和有向拓扑的二阶多自主系统的一致性问题,如果一般的代数连接和通信量比相应的阈值大,就可以实现系统的一致性.文献[14]研究了有限的自主系统相互作用范围内的分布式线性一致性协议,得到了使二阶系统达到一致性的有限相互作用范围的充分条件.

在实际应用中,多自主系统通常会受到各种干扰的影响,干扰的存在会影响系统的运动状态,所以研究干扰对系统所产生的影响是很有必要的.多数文献中的多自主系统所受的干扰为匹配干扰,即干扰与控制输入在系统的同一通道中.文献[15]讨论了带有未知干扰和输入延迟的多自主系统的分布式一致性问题.文献[16]研究了具有外部干扰的多自主系统的一致性问题,并且得到了实现分布式一致性的充分条件.文献[17]研究了具有外部干扰的二阶多自主系统的一致性问题,通过李雅普诺夫方法给出了多自主系统一致性的充分条件.文献[18]研究了具有干扰的非线性多自主系统的分布式异步一致性问题.文献[19]研究了带有未知外部干扰的线性多自主系统的一致性,得出基于一致性算法所提出的观测器可以解决领导者—跟随者一致性问题.文献

[20]解决带有随机产生的非线性、不确定性和干扰的多自主系统的一致性问题,得到使系统实现均方一致性的充分条件.文献[21]研究了分布式输出反馈控制对异构和扰动非线性多自主系统的鲁棒输出一致性控制,不仅包含内部渐近输出一致性,而且抑制了闭环系统的某些扰动.文献[22]研究了带有外部干扰的分数阶多自主系统的鲁棒一致性问题.另外,若系统中的干扰与控制输入在系统的不同通道中,则这类干扰称为不匹配干扰^[23],例如多液压机械臂系统和多导弹系统等.多液压机械臂的电液伺服作动器中,模型参数摄动、环境干扰力矩等干扰直接影响活塞杆和机械臂的运动,而不是通过控制电压通道,属于不匹配干扰.在多导弹系统中,导弹所受到的风等环境干扰属于不匹配干扰.文献[24]研究了带有不匹配干扰的齐次高阶多自主系统输出一致性控制问题,并且采用分布式主动抗干扰合作控制方案来解决这个问题.文献[25]讨论了带有不匹配干扰的线性齐次系统的输出一致性问题.不匹配干扰以异于匹配干扰的方式对系统性能产生影响,已有的抑制匹配干扰的控制方法无法有效的处理不匹配干扰对系统性能的影响,然而现有文献对具有不匹配干扰的多自主系统的一致性问题研究鲜有报道.因此,研究带有不匹配干扰的多智能体系统的稳定问题的抗干扰控制意义重大.

本文研究了具有匹配干扰和不匹配干扰的二阶多自主系统的一致性,在多自主系统受到匹配干扰和不匹配干扰影响的情况下,使用状态观测器和干扰观测器分别对系统的未知状态和所受干扰进行估计,提出了使系统实现一致性的协同控制算法.

2 代数图论

设 $G=(V, E, A)$ 是 n 个节点的加权无向图, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 表示其节点的集合,其中节点的下标是一个有限集合 $I=\{1, 2, \dots, n\}$; $E \subseteq V \times V$ 表示边的集合, $e_{ij}=(v_i, v_j)$ 表示图 G 的边; $A=[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为节点邻接矩阵,对于 $\forall i \in I$,都有 $a_{ii}=0$; 对于 $e_{ij} \in E$,都有 $a_{ij} > 0$,否则 $a_{ij}=0$.节点 i 的邻居集合定义为 $N_i=\{v_j \in V \mid (v_i, v_j) \in E\}$.令

$$D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

为图 G 的度矩阵,其中

$$d_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n,$$

拓扑图 G 的Laplacian矩阵定义为 $L=D-A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.如果节点 v_i 和 v_j 之间路径存在,那么则称 v_i 和 v_j 之间是可达的,否则,称 v_i 和 v_j 之间是不可达的.

引理1^[26] 假设多项式 $q(s) = \rho_0 + \rho_1 s + \dots + \rho_n s^n$,并且令 $s = j\omega$,记作 $q(j\omega) = m(\omega) + jn(\omega)$.当且仅当满足以下条件时, $q(s)$ 是Hurwitz稳定的:

1) $m(\omega) = 0$ 的根 $m_1 < m_2 < \dots$ 和 $n(\omega) = 0$ 的根 $n_1 < n_2 < \dots$ 满足 $m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \dots$ 或 $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \dots$.

2) $m(0)n'(0) - m'(0)n(0) > 0$.

引理 2 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则有可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中 λ_i 为矩阵 A 的特征值.

引理 3^[27] 考虑非线性系统 $\dot{x} = f(x, u, t)$, 如果系统 $\dot{x} = f(x, 0, t)$ 是全局均一化指数型稳定, 当 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ 时, 系统 $\dot{x} = f(x, u, t)$ 的状态渐近收敛到 0, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

3 具有匹配干扰的多自主体系统的协同运动

考虑带有匹配干扰的具有 n 个自主体的多自主体系统, 假设多自主体系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = p_i(t), \\ \dot{p}_i(t) = u_i(t) + d_{i1}(t), \\ y_{i1}(t) = q_i(t), \\ y_{i2}(t) = p_i(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $i = 1, \dots, n$, $q_i(t)$ 为自主体 i 的位置状态, $u_i(t)$ 为自主体 i 的控制输入, $p_i(t)$ 为对应的速度状态, $d_{i1}(t)$ 为匹配干扰.

对于系统(1), 令

$$\mathbf{x}_i(t) = [q_i(t) \ p_i(t)]^T, \mathbf{y}_i(t) = [y_{i1}(t) \ y_{i2}(t)]^T,$$

则

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \bar{A}\mathbf{x}_i(t) + \bar{D}u_i(t) + \bar{D}d_i(t), \\ \mathbf{y}_i(t) = \bar{G}\mathbf{x}_i(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $i = 1, \dots, n$,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

假设系统的外部干扰 $d_i(t)$ 可描述为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = W\xi_i(t), \\ d_i(t) = V\xi_i(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中: $i = 1, \dots, n$; W, V 为系统矩阵, 且 (W, V) 可观.

对于系统(2), 建立状态观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i(t) = \bar{A}\hat{\mathbf{x}}_i(t) + \bar{D}u_i(t) + \bar{D}\hat{d}_i(t) + K_{i1}(\mathbf{y}_i(t) - \hat{\mathbf{y}}_i(t)), \\ \hat{\mathbf{y}}_i(t) = \bar{G}\hat{\mathbf{x}}_i(t), \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\hat{\mathbf{x}}_i(t)$, $\hat{d}_i(t)$ 和 $\hat{\mathbf{y}}_i(t)$ 分别为 $\mathbf{x}_i(t)$, $d_i(t)$ 和 $\mathbf{y}_i(t)$ 的

估计;

$$K_{i1} = \begin{bmatrix} h_{1i} \\ h_{2i} \end{bmatrix}$$

为观测器(4)的未知参数;

$\hat{\mathbf{x}}_i(t) = [\hat{q}_i(t) \ \hat{p}_i(t)]^T$, $\hat{\mathbf{y}}_i(t) = [\hat{y}_{i1}(t) \ \hat{y}_{i2}(t)]^T$, $\hat{q}_i(t)$ 和 $\hat{p}_i(t)$ 分别为 $q_i(t)$ 和 $p_i(t)$ 的估计.

对于系统(3)建立干扰观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_i(t) = W\hat{\xi}_i(t) + K_{i2}(d_i(t) - \hat{d}_i(t)), \\ \hat{d}_i(t) = V\hat{\xi}_i(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中: $i = 1, \dots, n$, K_{i2} 为观测器(5)的待定参数.

令

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]^T, \\ \mathbf{p}(t) &= [p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_n(t)]^T, \\ \mathbf{x}(t) &= [\mathbf{q}(t) \ \mathbf{p}(t)]^T, \\ \mathbf{u}(t) &= [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_n(t)]^T, \\ \mathbf{d}(t) &= [d_1(t) \ d_2(t) \ \dots \ d_n(t)]^T, \\ \boldsymbol{\xi}(t) &= [\xi_1(t) \ \xi_2(t) \ \dots \ \xi_n(t)]^T, \\ \mathbf{y}_1(t) &= [y_{11}(t) \ y_{21}(t) \ \dots \ y_{n1}(t)]^T, \\ \mathbf{y}_2(t) &= [y_{12}(t) \ y_{22}(t) \ \dots \ y_{n2}(t)]^T, \\ \mathbf{y}(t) &= [\mathbf{y}_1(t) \ \mathbf{y}_2(t)]^T, \end{aligned}$$

则系统(2)可改写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{d}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (6)$$

系统(3)可改写为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = (W \otimes I_n)\boldsymbol{\xi}(t), \\ \mathbf{d}(t) = (V \otimes I_n)\boldsymbol{\xi}(t). \end{cases} \quad (7)$$

状态观测器(4)可改写为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{d}}(t) + K_1(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)), \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}(t), \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix};$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

为一个待定矩阵, 其中 $H_1 = \text{diag}\{h_{11}, \dots, h_{1n}\}$, $H_2 = \text{diag}\{h_{21}, \dots, h_{2n}\}$.

干扰观测器(5)可改写为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}}(t) = (W \otimes I_n)\hat{\boldsymbol{\xi}}(t) + K_2(\mathbf{d}(t) - \hat{\mathbf{d}}(t)), \\ \hat{\mathbf{d}}(t) = (V \otimes I_n)\hat{\boldsymbol{\xi}}(t), \end{cases} \quad (9)$$

其中 $K_2 = \text{diag}\{K_{12}, \dots, K_{n2}\}$.

假设多自主系统有一个领导者, 它的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{q}_0(t) = p_0(t), \\ \dot{p}_0(t) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

令 $\mathbf{x}_0(t) = [\bar{q}_0(t) \ \bar{p}_0(t)]^T$, 其中:

$$\begin{aligned} \bar{q}_0(t) &= [q_0(t) \ q_0(t) \ \cdots \ q_0(t)]^T, \\ \bar{p}_0(t) &= [p_0(t) \ p_0(t) \ \cdots \ p_0(t)]^T, \end{aligned}$$

则系统(10)可改写为

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = A\mathbf{x}_0(t). \quad (11)$$

对于自主体 i 构造控制器

$$\begin{aligned} u_i(t) &= c \left(\sum_{k \in N_i} a_{ik} (\hat{q}_k(t) - \hat{q}_i(t)) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{k \in N_i} a_{ik} (\hat{p}_k(t) - \hat{p}_i(t)) - b_i (\hat{q}_i(t) - \right. \\ &\quad \left. q_0(t)) - b_i (\hat{p}_i(t) - p_0(t)) \right) - \hat{d}_i(t), \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $b_i \geq 0$, $c > 0$ 为控制增益, 是一个待定参数. 令

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}(t) &= \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) - \bar{\mathbf{q}}_0(t) \\ \mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}_0(t) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_x(t) &= \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q(t) \\ \mathbf{e}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) - \hat{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{p}(t) - \hat{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_\xi(t) &= \boldsymbol{\xi}(t) - \hat{\boldsymbol{\xi}}(t). \end{aligned}$$

根据式(6)–(9)(11)–(12), 可得到如下等式:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = (A - N_1 - N_2)\boldsymbol{\theta}(t) + (N_1 + N_2)\mathbf{e}_x(t) + \\ \quad D(V \otimes I_n)\mathbf{e}_\xi(t), \\ \dot{\mathbf{e}}_x(t) = (A - K_1 G)\mathbf{e}_x(t) + D(V \otimes I_n)\mathbf{e}_\xi(t), \\ \dot{\mathbf{e}}_\xi(t) = (W \otimes I_n - K_2(V \otimes I_n))\mathbf{e}_\xi(t) = \\ \quad N_3\mathbf{e}_\xi(t), \end{cases} \quad (13)$$

其中:

$$\begin{aligned} N_1 &= [cDL \ cDL], \quad N_2 = [cDB \ cDB], \\ B &= \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}, \end{aligned}$$

L 为系统的Laplacian矩阵,

$$\begin{aligned} K_2 &= \text{diag}\{K_{12}, \dots, K_{n2}\}, \\ N_3 &= \begin{bmatrix} W - K_{12}V & & \\ & \ddots & \\ & & W - K_{n2}V \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

定理 1 假设多自主系统的拓扑结构是具有 n 个自主体的有向网络, 并且领导者为全局可达节点. 通过运用状态观测器(4)和干扰观测器(5), 如果满足以下2个条件, 则可以基于控制器(12), 使二阶多自主系统(1)达到稳定.

1) $W - K_{i2}V$ 是负定的.

2) 控制增益 $c > 0$, 并且 $c > \max\{\frac{|\text{Im}(\mu_i)|^2}{\text{Re}(\mu_i)|\mu_i|^2}\}$,

其中 μ_i 是矩阵 $\bar{L} = B + L$ 的特征值, $\mu_i = \text{Re}(\mu_i) + j\text{Im}(\mu_i)$.

证 令 $\mathbf{Q}(t) = [\boldsymbol{\theta}(t) \ \mathbf{e}_x(t) \ \mathbf{e}_\xi(t)]^T$, 根据式(13), 可得到

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \psi\mathbf{Q}(t), \quad (14)$$

其中

$$\psi = \begin{bmatrix} A - N_1 - N_2 & N_1 + N_2 & D(V \otimes I_n) \\ 0 & A - K_1 G & D(V \otimes I_n) \\ 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}.$$

下面计算特征值. 令 $|\lambda E - \psi| = 0$, 得到

$$|\lambda E - (A - N_1 - N_2)| = 0, \quad (15a)$$

$$|\lambda E - (A - K_1 G)| = 0, \quad (15b)$$

$$|\lambda E - N_3| = 0. \quad (15c)$$

i) 对于式(15a),

$$A - N_1 - N_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -c\bar{L} & -c\bar{L} \end{bmatrix},$$

其中 $\bar{L} = B + L$. 式(15a)可写为

$$|\lambda^2 E + \lambda c\bar{L} + c\bar{L}| = 0. \quad (16)$$

假设矩阵 $\bar{L}$ 的特征值为 μ_i , 令 $\mu_i = a + jb$, 其中 $a > 0$. 因此, 由引理2可知, 式(16)可化简为下列等式:

$$\lambda^2 + \lambda c\mu_i + c\mu_i = 0. \quad (17)$$

令 $r(\lambda) = \lambda^2 + \lambda c(a + jb) + c(a + jb)$, $\lambda = j\omega$, 则式(17)变为

$$r(j\omega) = m(\omega) + jn(\omega), \quad (18)$$

其中 $m(\omega) = -\omega^2 - bc\omega + ac$, $n(\omega) = \omega ac + bc$. 由于 $m(0) = ac$, $m'(0) = -bc$, $n(0) = bc$, $n'(0) = ac$, 则存在 $m(0)n'(0) - m'(0)n(0) = c^2|\mu_i|^2 > 0$. $m(\omega) = 0$ 和 $n(\omega) = 0$ 的根分别为

$$m_{1,2} = \frac{-bc \pm \sqrt{b^2c^2 + 4ac}}{2}, \quad n = \frac{-b}{a}. \quad (19)$$

存在

$$\begin{cases} \frac{-bc - \sqrt{b^2c^2 + 4ac}}{2} < \frac{-b}{a}, \\ \frac{-b}{a} < \frac{-bc + \sqrt{b^2c^2 + 4ac}}{2}, \end{cases} \quad (20)$$

可得到

$$c > \frac{b^2}{a|\mu_i|^2}. \quad (21)$$

因此, 由引理1可知, 当控制增益 c 满足定理1的条件2), 式(15a)的特征值都处于复杂空间的左半平面.

$r(\lambda)$ 是Hurwitz稳定的, 则特征方程(17)的特征值都为负.

ii) 对于式(15b),

$$A - K_1 G = \begin{bmatrix} -H_1 & I \\ 0 & -H_2 \end{bmatrix}.$$

由于矩阵 H_1 和 H_2 是元素都为正实数的对角阵, 所以矩阵 $A - K_1 G$ 满秩且其特征值都具有负实部, 所以特征方程(15b)的特征值都为负数.

iii) 对于式(15c), 由于 (W, V) 可观, 总能找到一个矩阵 K_{i2} , 使 $W - K_{i2}V$ 是负定的.

综上所述, 系统(14)在平衡点处收敛, $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$, 即 $q(t) \rightarrow \bar{q}_0(t)$, $p(t) \rightarrow \bar{p}_0(t)$, 系统(1)达到一致性. 证毕.

注1 在控制器(12)中, 要求参数 $b_i \geq 0$, 控制增益 $c > 0$, 并且由定理1中的推导可得控制增益的具体范围为 $c > \frac{b^2}{a|\mu_i|^2}$. 为了满足定理1中的条件(1), 需要使 $W - K_{i2}V$ 是负定的, 由于 (W, V) 可观, 总能找到一个矩阵 K_{i2} , 使 $W - K_{i2}V$ 是负定的. 所以对于干扰观测器(5)中的观测增益 K_{i2} 的设计, 只要能使 $W - K_{i2}V$ 是负定的即可.

推论1 假设多自主体系统的拓扑结构是具有 n 个自主体的无向网络, 并且领导者为全局可达节点. 通过运用状态观测器(4)和干扰观测器(5), 如果满足以下2个条件, 则可以基于控制器(12), 使二阶多自主体系统(1)达到稳定.

- 1) $W - K_{i2}V$ 是负定的.
- 2) 控制增益 $c > 0$.

4 具有匹配干扰和不匹配干扰的多自主体系统的协同运动

考虑带有匹配干扰的具有 n 个自主体的多自主体系统, 假设多自主体系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}}_i(t) = \bar{p}_i(t) + d_{i2}(t), \\ \dot{\bar{p}}_i(t) = u_i(t) + d_{i1}(t), \\ y_{i1}(t) = \bar{q}_i(t), \\ y_{i2}(t) = \bar{p}_i(t) + d_{i2}(t), \end{cases} \quad (22)$$

其中: $i = 1, \dots, n$, $\bar{q}_i(t)$ 为自主体 i 的位置状态, $u_i(t)$ 为自主体 i 的控制输入, $\bar{p}_i(t)$ 为对应的速度状态, $d_{i1}(t)$ 为匹配干扰, $d_{i2}(t)$ 为不匹配干扰.

令 $q_i(t) = \bar{q}_i(t)$, $p_i(t) = \bar{p}_i(t) + d_{i2}(t)$, $d_i(t) = \dot{d}_{i2}(t) + d_{i1}(t)$, 则系统(23)可以转化为系统

$$\dot{q}_i(t) = p_i(t), \quad (23a)$$

$$\dot{p}_i(t) = u_i(t) + d_i(t), \quad (23b)$$

$$y_{i1}(t) = q_i(t), \quad (23c)$$

$$y_{i2}(t) = p_i(t), \quad (23d)$$

其中 $i = 1, \dots, n$.

对于系统(23), 令

$$\mathbf{x}_i(t) = [q_i(t) \ p_i(t)]^T, \ \mathbf{y}_i(t) = [y_{i1}(t) \ y_{i2}(t)]^T,$$

则

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \bar{A}\mathbf{x}_i(t) + \bar{D}u_i(t) + \bar{D}d_i(t), \\ \mathbf{y}_i(t) = \bar{G}\mathbf{x}_i(t), \end{cases} \quad (24)$$

其中: $i = 1, \dots, n$,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \bar{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

假设1 干扰 $d_i(t)$ 和 $\dot{d}_i(t)$, $i = \{1, 2, \dots, n\}$ 都是有界的, 即存在 d_i^* , ϕ_i , 使得 $d_i^* = \sup_{t \geq 0} \{|d_i(t)|\}$, $\phi_i = \sup_{t \geq 0} \{|\dot{d}_i(t)|\}$.

注2 假设1在DOBC领域是很常见的假设, 如果干扰具有很快时变, 那么干扰观测器很难进行估算. 在实际应用上, 有很多种干扰满足这种假设, 例如: 常值干扰、谐波干扰等.

假设2 系统(24)中, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{d}(t) = 0$.

注3 假设2是用来证明干扰估计误差系统(28c)渐近收敛的, 但只要观测器的动态足够快, 在选择适当的观测增益下, 干扰观测器(25)也可以估计快时变干扰.

对于系统(24), 其干扰可由以下干扰观测器估计:

$$\begin{cases} \dot{g}_i(t) = -\bar{F}\bar{D}(g_i(t) + \bar{F}\mathbf{x}_i(t)) - \bar{F}(\bar{A}\mathbf{x}_i(t) + \bar{D}u_i(t)), \\ \hat{d}_i(t) = g_i(t) + \bar{F}\mathbf{x}_i(t), \end{cases} \quad (25)$$

其中: $\hat{d}_i(t)$ 是干扰 $d_i(t)$ 的估计, $g_i(t)$ 为辅助中间变量, $\bar{F}$ 为待设计的干扰观测器增益矩阵.

令

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]^T,$$

$$\mathbf{p}(t) = [p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_n(t)]^T,$$

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{q}(t) \ \mathbf{p}(t)]^T,$$

$$\mathbf{d}(t) = [d_1(t) \ d_2(t) \ \dots \ d_n(t)]^T,$$

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t)]^T,$$

$$\mathbf{y}_1(t) = [y_{11}(t) \ y_{21}(t) \ \dots \ y_{n1}(t)]^T,$$

$$\mathbf{y}_2(t) = [y_{12}(t) \ y_{22}(t) \ \dots \ y_{n2}(t)]^T,$$

$$\mathbf{g}(t) = [g_1(t) \ g_2(t) \ \dots \ g_n(t)]^T,$$

则系统(24)可改写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{d}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (26)$$

干扰观测器(25)可以改写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{g}}(t) = -FD(\mathbf{g}(t) + F\mathbf{x}(t)) - \\ F(A\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)), \\ \hat{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{g}(t) + F\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (27)$$

假设系统中的控制协议采用前面设计的控制器式(12), 令

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) - \bar{\mathbf{q}}_0(t) \\ \mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}_0(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}_x(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q(t) \\ \mathbf{e}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) - \hat{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{p}(t) - \hat{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}_d(t) = \mathbf{d}(t) - \hat{\mathbf{d}}(t).$$

根据式(8)(11)–(12)(26)–(27), 可得到如下等式:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = (A - N_1 - N_2)\boldsymbol{\theta}(t) + \\ (N_1 + N_2)\mathbf{e}_x(t) + D\mathbf{e}_d(t), \\ \dot{\mathbf{e}}_x(t) = (A - K_1G)\mathbf{e}_x(t) + D\mathbf{e}_d(t), \\ \dot{\mathbf{e}}_d(t) = \dot{\mathbf{d}}(t) - FD\mathbf{e}_d(t). \end{cases} \quad (28)$$

定理 2 假设多自主体系统的拓扑结构是具有 n 个自主体的有向网络, 并且领导者为全局可达节点. 通过运用状态观测器(4)和干扰观测器(25), 如果满足以下2个条件, 则可以基于控制器(12), 使二阶多自主体系统(22)达到稳定.

1) 控制增益 $c > \max\{\frac{|\text{Im}(\mu_i)|^2}{\text{Re}(\mu_i)|\mu_i|^2}\}$, 其中 μ_i 是矩阵 $\bar{L} = B + L$ 的特征值, $\mu_i = \text{Re}(\mu_i) + j\text{Im}(\mu_i)$.

2) 矩阵 $-FD$ 是Hurwitz的.

证 令 $\mathbf{M}(t) = [\boldsymbol{\theta}(t) \ \mathbf{e}_x(t) \ \mathbf{e}_d(t)]^T$, 根据式(28)可以得到

$$\dot{\mathbf{M}}(t) = \varphi \mathbf{M}(t) + T\dot{\mathbf{d}}(t), \quad (29)$$

其中:

$$\varphi = \begin{bmatrix} A - N_1 - N_2 & N_1 + N_2 & D \\ 0 & A - K_1G & D \\ 0 & 0 & -FD \end{bmatrix},$$

$$T = [0 \ 0 \ I]^T.$$

应用引理3 ISS定理, 将 $\dot{\mathbf{d}}$ 看作是系统(29)的输入, 由假设2可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{d}}(t) = 0$, 则系统(29)变化为

$$\dot{\mathbf{M}}(t) = \varphi \mathbf{M}(t). \quad (30)$$

应用定理1的类似的证明过程, 可以得到系统(30)是稳定的, 则由ISS定理可知, 系统(29)也是ISS稳定的, 在平衡点处收敛, $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\theta}(t) = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\delta}(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\eta}(t) = 0$, 即 $\mathbf{q}(t) \rightarrow \bar{\mathbf{q}}_0(t)$, $\mathbf{p}(t) \rightarrow \bar{\mathbf{p}}_0(t)$, 二阶多自主体系统(22)达到稳定, 实现一致性. 证毕.

5 仿真结果及分析

为了验证控制器(12)的控制效果, 本文考虑4个受扰跟随者和1个领导者, 跟随者集合为 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 领导者为0, 假设多自主体系统的有向通信拓扑图如图1所示.

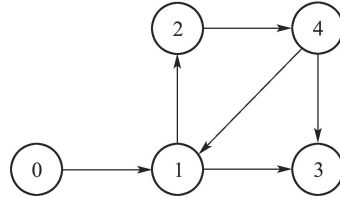


图1 多自主体系统的有向通信拓扑图

Fig. 1 The communication topology of multi-agent systems

假设拓扑图所有边的权重为1, 图的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则系统的Laplacian矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.1 具有匹配干扰的二阶多自主体系统的协同运动的系统仿真

对于系统中只存在匹配干扰的情况下, 假设4个跟随者的初始位置状态为 $\mathbf{q}(0) = [8 \ 2 \ 0 \ 3]^T$, 4个跟随者的初始速度为 $\mathbf{p}(0) = [1 \ 2 \ 4 \ 5]^T$. 领导者的位置状态为 $\mathbf{q}_0(0) = 5$, 速度为 $\mathbf{p}_0(0) = 3$. 外部干扰系统(4)的参数选取为

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = [0 \ 1], \quad \xi_1(0) = [1 \ 1]^T,$$

$$\xi_2(0) = [1 \ 2]^T, \quad \xi_3(0) = [1 \ 3]^T, \quad \xi_4(0) = [1 \ 4]^T.$$

状态观测器(4)的参数选取为 $K_{i1} = 1$, 干扰观测器控制器(5)的参数选取为

$$K_{i2} = [1 \ \frac{12}{5}]^T,$$

控制器(12)的参数选取为 $c = 10$, $b_1 = 1$.

系统仿真图2表示5个自主体的位置状态的实际值, 由图2可看出, 4个跟随者的位置状态都渐渐趋向于领导者0的位置状态5. 系统仿真图3表示5个自主体的速度的实际值, 由图3可看出, 4个跟随者的速度都

渐渐趋向于领导者0的速度3. 系统仿真图4表示自主体所受外部干扰的实际值, 跟随者1的干扰为 $d_1 = \cos t$, 跟随者2的干扰为 $d_2 = 2 \cos t$, 跟随者3的干扰为 $d_3 = 3 \cos t$, 跟随者4的干扰为 $d_4 = 4 \cos t$.

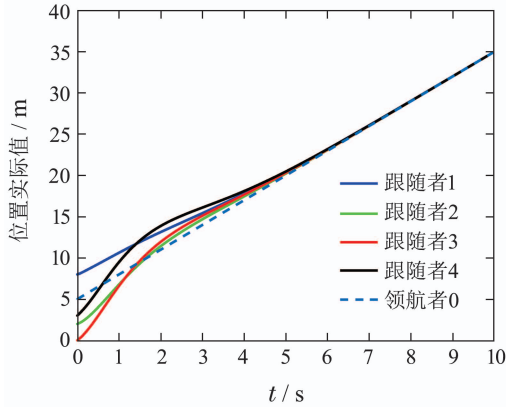


图2 位置状态的实际值

Fig. 2 The actual value of the position states

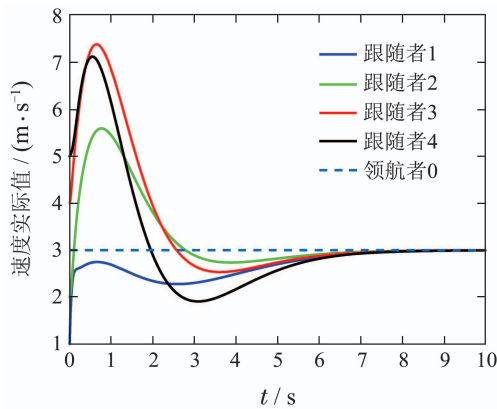


图3 速度的实际值

Fig. 3 The actual value of the velocity

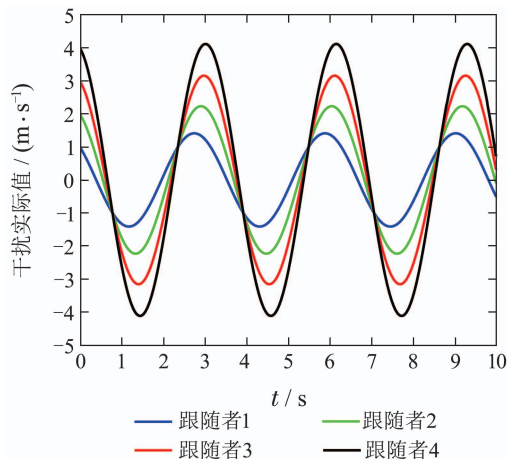


图4 外部干扰的实际值

Fig. 4 The actual value of the external disturbances

系统仿真图5表示观测器(4)对位置状态的观测误差, 系统仿真图6表示观测器(4)对速度的观测误差, 系

统仿真图7表示观测器(5)对外部干扰的观测误差. 由图5~7可看出, 观测器(5)和观测器(6)实现对系统的位置状态、速度和外部干扰的精确估计, 观测误差都渐渐趋于0, 达到了很好的观测效果.

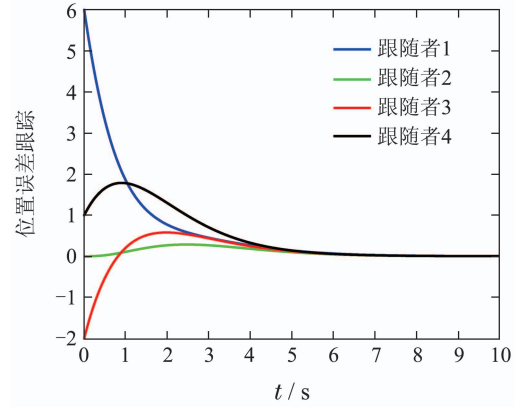


图5 位置状态的观测误差

Fig. 5 Observation error of the position states

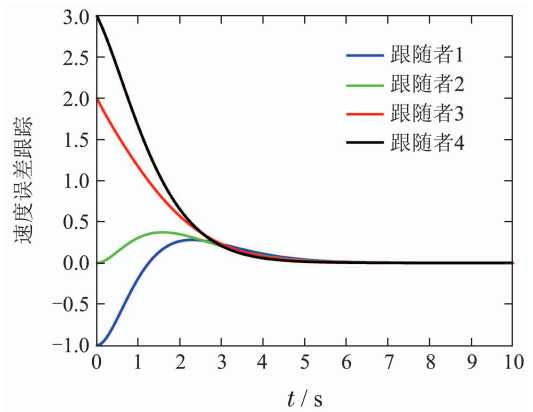


图6 速度的观测误差

Fig. 6 Observation error of the velocity

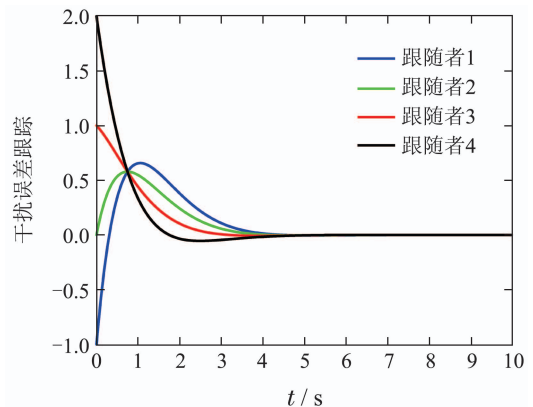


图7 外部干扰的观测误差

Fig. 7 Observation error of the external disturbances

5.2 具有匹配干扰和不匹配干扰的二阶多自主体系统的协同运动的系统仿真

对于系统中只存在匹配干扰的情况下, 假设4个跟随者的初始位置状态为 $q(0) = [8 \ 2 \ 0 \ 3]^T$, 4个跟随

者的初始速度为 $p(0) = [-2 \ 15 \ 7 \ 8]^T$. 领导者的位置状态为 $q_0(0) = 5$, 速度为 $p_0(0) = 3$. 控制器(12)的参数选取为 $c = 20$, 干扰观测器(25)的参数选取为 $F = [0 \ 10]^T$, 状态观测器(4)的参数选取为 $K_{i1} = [50 \ 50]^T$.

系统仿真图8表示5个自主体的位置状态的实际值, 由图8可看出, 4个跟随者的位置状态都渐渐趋向于领导者0的位置状态5. 系统仿真图9表示5个自主体的速度的实际值, 由图9可看出, 4个跟随者的速度状态都渐渐趋向于领导者0的速度状态3.

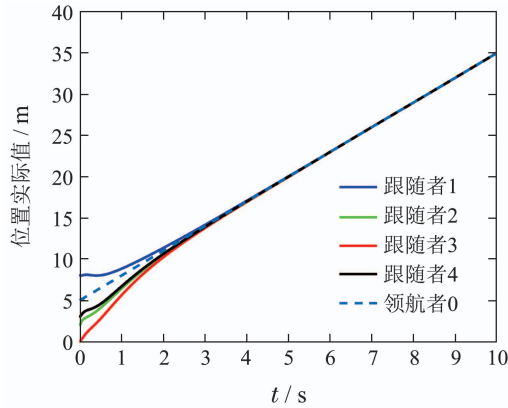


图8 位置状态的实际值

Fig. 8 The actual value of the position states

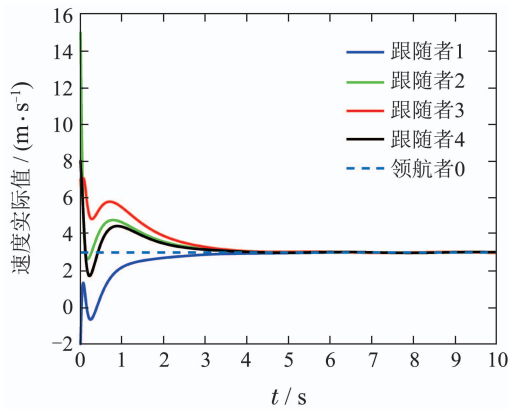


图9 速度的实际值

Fig. 9 The actual value of the velocity

系统仿真图10表示自主体所受外部干扰的估计值, 4个跟随者所受的不匹配干扰和匹配干扰分别选取为: 跟随者1的干扰 $d_{11} = 2, d_{12} = 1$; 跟随者2的干扰 $d_{21} = 1, d_{22} = 0.5$; 跟随者3的干扰 $d_{31} = 2 \cos(2t), d_{32} = 0.5 \sin(2t)$; 跟随者4的干扰 $d_{41} = 2 \sin(2t), d_{42} = 0.5 \cos(2t)$. 又因为 $d_i = \dot{d}_{i2} + d_{i1}$, 所以4个跟随者最终所受的干扰为: $d_1 = 2, d_2 = 1, d_3 = 3 \cos(2t), d_4 = \sin(2t)$, 由图10可看出, 观测器(26)可以很好的观测出干扰值.

系统仿真图11表示观测器(4)对位置状态的观测误差, 系统仿真图12表示观测器(4)对速度的观测误差. 由图11-12可看出, 观测器(4)实现对系统的位置

状态和速度的精确估计, 观测误差都渐渐趋于0, 达到了很好的观测效果.

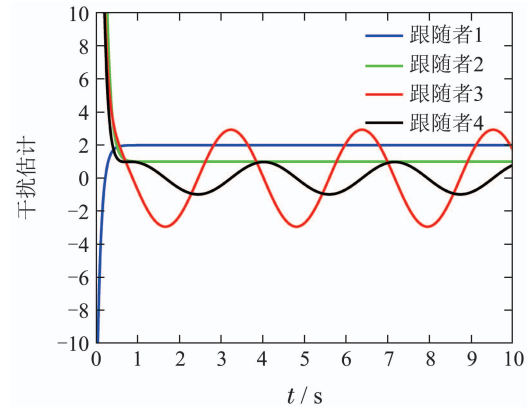


图10 外部干扰的实际值

Fig. 10 The actual value of the external disturbances

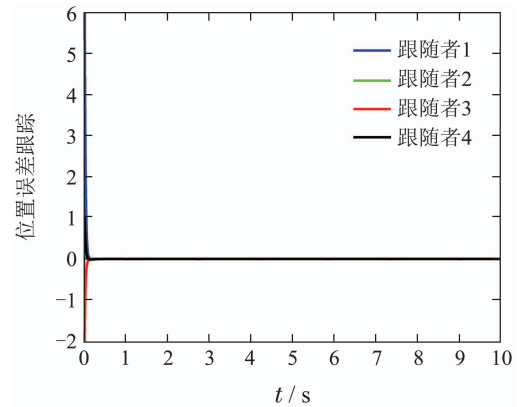


图11 位置状态的观测误差

Fig. 11 Observation error of the position states

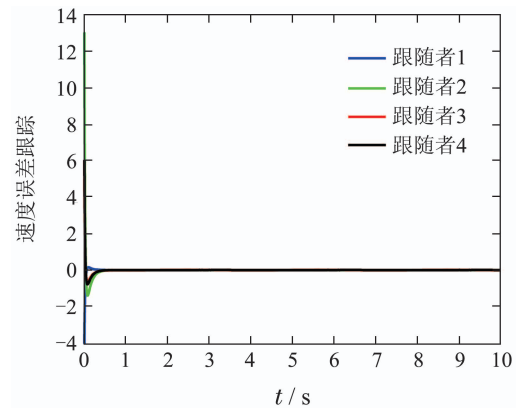


图12 速度的观测误差

Fig. 12 Observation error of the velocity

6 结论

本文研究了具有匹配和不匹配干扰的二阶多自主体系统的一致性问题. 利用状态观测器和干扰观测器对系统的位置、速度和干扰进行估计, 构造了基于干扰观测器的多自主体协同控制算法. 通过使用现代控制理论和矩阵论等方法, 研究了多自主体系统的一致

性. 仿真结果验证了本文所设计的一致性控制算法可以使跟随者收敛到领导者的状态, 实现一致性.

由于各种因素制约, 各个自主体表现出不一样的动态行为(即智能自主个体可能具有不同的动力学方程)也是常见的现象, 因此, 下一步工作将对具有外部干扰的混合阶多自主体系统的协同运动进行研究.

参考文献:

- [1] CHOI J, OH S, HOROWITZ R. Distributed learning and cooperative control for multi-agent systems. *Automatica*, 2009, 45(12): 2802 – 2814.
- [2] YANG H Y, HAN F J, LIU F, et al. Distributed coordination of fractional dynamical systems with exogenous disturbances. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, (4): 1 – 7.
- [3] LU Y, WANG J Z. Robust cooperative control for multi-agent systems via distributed output regulation. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(11): 1049 – 1056.
- [4] YANG H Y, ZHU X L, ZHANG S Y. Consensus of second order delayed multi-agent systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, 16(2): 188 – 199.
- [5] HONG Y G, HU J P, GAO L X. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology. *Automatica*, 2007, 42(7): 1177 – 1182.
- [6] LIU K E, JI Z J, XIE G M, et al. Consensus for heterogeneous multi-agent systems under fixed and switching topologies. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(9): 3670 – 3683.
- [7] QIU Z R, LIU S, XIE L H. Distributed constrained optimal consensus of multi-agent systems. *Automatica*, 2016, 68(C): 209 – 215.
- [8] LI H Q, CHEN G, DONG Z Y, et al. Consensus analysis of multiagent systems with second-order nonlinear dynamics and general directed topology: An event-triggered scheme. *Information Sciences*, 2016, 370–371(C): 598 – 622.
- [9] YOON M G. Consensus of adaptive multi-agent systems. *Systems & Control Letters*, 2017, 102(1): 9 – 14.
- [10] WU Yiming, DING Jiajun, HE Xiongxiang, et al. Secure consensus control for multi-agent systems under communication delay. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(8): 1039 – 1045.
(伍益明, 丁佳俊, 何熊熊, 等. 通信时延下多智能体系统的安全一致性控制. *控制理论与应用*, 2016, 33(8): 1039 – 1045.)
- [11] VALCHER M E, ZORZAN I. On the consensus of homogeneous multi-agent systems with arbitrarily switching topology. *Automatica*, 2017, 84(1): 79 – 85.
- [12] ZHU Y R, ZHENG Y S, GUAN Y Q. Quantized consensus of second-order multi-agent systems via impulsive control. *Neurocomputing*, 2017, 270(1): 27 – 33.
- [13] LI H J, SU H Y. Second-order consensus in multi-agent systems with directed topologies and communication constraints. *Neurocomputing*, 2016, 173(P3): 942 – 952.
- [14] AI X D, SONG S J, YOU K Y. Second-order consensus of multi-agent systems under limited interaction ranges. *Automatica*, 2016, 68(C): 329 – 333.
- [15] WANG C Y, SUN J Y, ZUO Z Y, et al. Consensus disturbance rejection of network-connected dynamic systems with input delay and unknown network connectivity. *ScienceDirect*, 2017, 51(1): 10357 – 10362.
- [16] OUYANG D Q, YU Z Y, JIANG H J, et al. Consensus for general multi-agent networks with external disturbances. *Neurocomputing*, 2016, 198(C): 100 – 108.
- [17] ZHANG X X, LIU X Q. Consensus of second-order multi-agent systems with disturbances generated by nonlinear exosystems under switching topologies. *Science Direct*, 2014, 351(1): 473 – 486.
- [18] MA C, QIAO H. Distributed asynchronous event-triggered consensus of nonlinear multi-agent systems with disturbances: an extended dissipative approach. *Neurocomputing*, 2017, 243(1): 103 – 114.
- [19] CAO W J, ZHANG J H, REN W. Leader – follower consensus of linear multi-agent systems with unknown external disturbances. *Systems & Control Letters*, 2015, 82(1): 64 – 70.
- [20] HU M F, GUO L X, HU A H, et al. Leader-following consensus of linear multi-agent systems with randomly occurring nonlinearities and uncertainties and stochastic disturbances. *Neurocomputing*, 2015, 149(1): 884 – 890.
- [21] WANG X H, XU D B, JI H B. Robust almost output consensus in networks of nonlinear agents with external disturbances. *Automatica*, 2016, 70(1): 303 – 311.
- [22] REN G J, YU Y G. Robust consensus of fractional multi-agent systems with external disturbances. *Neurocomputing*, 2016, 218(1): 339 – 345.
- [23] LIU Fan, LI Yuling, YANG Hongyong. Consensus for leader-follower multi-agent systems with mismatched disturbance and correlated uncertainties. *Information and Control*, 2018, 47(1): 111 – 118, 128.
(刘凡, 李玉玲, 杨洪勇. 基于多源干扰的Leader-follower多智能体系统的一致性. *信息与控制*, 2018, 47(1): 111 – 118, 128.)
- [24] WANG X Y, LI S H, JAMES L. Distributed active anti-disturbance output consensus algorithms for higher-order multi-agent systems with mismatched disturbances. *Automatica*, 2016, 74(1): 30 – 37.
- [25] ZHANG J C, ZHU F L. Observer-based output consensus of a class of heterogeneous multi-agent systems with unmatched disturbances. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2017, 56(1): 240 – 251.
- [26] OGATA K. *Discrete-Time Control Systems*. New Jersey: Prentice-Hall, 1995.
- [27] KHALIL H. *Nonlinear Systems*. 3rd Ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.

作者简介:

李玉玲 硕士研究生, 目前研究方向为多自主体编队控制, E-mail: liyuling822@163.com;

杨洪勇 博士, 教授, 目前研究方向为复杂网络、多自主体编队控制、智能控制和非线性系统同控制等, E-mail: hyyang@yeah.net.

刘凡 硕士研究生, 目前研究方向为多自主体编队控制, E-mail: jsgyliufan@163.com;

杨怡泽 硕士研究生, 目前研究方向为多自主体群集运动, E-mail: yangyz1994@126.com;

刘远山 硕士研究生, 目前研究方向为多自主体编队控制, E-mail: liuysh9353@yeah.net.