

# 具有可参数化不确定性系统的对偶自适应模型预测控制

曹文祺, 李少远<sup>†</sup>

(上海交通大学 自动化系; 系统控制与信息处理教育部重点实验室, 上海 200240)

**摘要:** 控制系统中存在的不确定性为其性能优化带来诸多问题. 自适应控制和鲁棒控制是针对系统存在的不确定性而采取的不同设计策略; 前者没有充分考虑系统的未建模动态, 而后者往往是针对不确定的最大界而设计, 具有较强的保守性. 本文试图将自适应控制和鲁棒控制的策略相结合, 提出了一种在模型预测控制中利用未来不确定信息的对偶自适应模型预测控制策略. 该策略将系统中由未建模动态引起的不确定性参数化表达, 并为其设定边界约束, 作为优化问题中新的约束, 在优化控制目标的同时减小系统不确定性对控制的影响. 仿真结果表明, 本文提出的算法较传统自适应模型预测控制算法, 对于系统存在的不确定性由于在迭代过程中采用参数化描述, 得到了更好的系统性能, 且具有更好的收敛性.

**关键词:** 模型预测控制; 自适应控制; 对偶控制; 不确定性; 动态系统

**引用格式:** 曹文祺, 李少远. 具有可参数化不确定性系统的对偶自适应模型预测控制. 控制理论与应用, 2019, 36(8): 1197 – 1206

DOI: 10.7641/CTA.2018.80324

## Enhanced parameterizable uncertainty to dual adaptive model predictive control

CAO Wen-qi, LI Shao-yuan<sup>†</sup>

(Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University; Key Laboratory of System Control and Information Processing, Ministry of Education of China, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** Control performance always deteriorates because of the uncertainty in control systems. Adaptive control and robust control are two different strategies against system uncertainties. Adaptive control decreases uncertainty through updating model parameters without fully considering unmodeled dynamics, while the latter maintains control performance under strong conservation by setting the upper bound of the uncertainty in systems. This work tries to combine robust control and adaptive control, and presents a novel dual adaptive model predictive control with enhanced parameterizable uncertainty of future. The uncertainty causing from unmodeled dynamics is parameterized, and the control performance is enhanced by adding a constraint of parameterized uncertainty in the optimization problem with designing its upper bound. This new approach optimizes model predictive control performance and decreases the effect of uncertainty at the same time. Simulation result shows that compared with traditional adaptive model predictive control, our the approach costs less control energy to achieve the same performance and is of better convergence.

**Key words:** model predictive control; adaptive control; dual control; uncertainty; dynamic systems

**Citation:** CAO Wenqi, LI Shaoyuan. Enhanced parameterizable uncertainty to dual adaptive model predictive control. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(8): 1197 – 1206

## 1 引言

模型预测控制(model predictive control, MPC)可以有效解决约束系统的控制问题, 所以被广泛研究、运用<sup>[1]</sup>. 在这个方法中, 人们使用对象模型预测系统未来的表现, 从而得到动态系统的优化控制. 因此模型质量对MPC应用的效果有直接的影响, 建模过程耗时又复杂. 然而, 利用模型准确描述被控对象的动态

过程并不简单: 往往难以获取其实际结构、准确参数, 而真实对象中还会存在难以描述的高频成分, 即不可建模动态; 上述因素使基于模型的MPC控制系统具有未来不确定性. 尽管MPC自身由于其滚动时域特性, 能保证对充分小不确定性在一定程度上的鲁棒性, 但这并不够满足实际中的需求. 在MPC领域, 对闭环系统的不确定性处理, 是理论研究与应用技术面临的共

收稿日期: 2018-05-02; 录用日期: 2018-11-13.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: syli@sjtu.edu.cn; Tel.: +86 21-34204011.

本文责任编辑: 陈增强.

国家自然科学基金项目(61590924, 61521063, 61673273)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61590924, 61521063, 61673273).

性问题<sup>[2]</sup>.

针对带有不确定性的过程对象,鲁棒模型预测控制(robust model predictive control, RMPC)一直被广泛研究.鲁棒控制的思想是:在算法设计初期就将不确定性的最大界考虑进去,得到能使控制系统在一定范围内的扰动下依旧稳定运行的控制律.已经存在太多有关RMPC的研究,可参见文献[3-5],本文不展开具体讨论.然而鲁棒控制的性能,总会受到固定不变的初始模型的质量限制<sup>[6]</sup>,具有较强保守性,在模型发生较大变化时当前的控制方法就不再适用.

利用自适应工具对系统在线更新是解决不确定性问题的另一种方法.迄今,自适应MPC的研究仅受到很少关注<sup>[7]</sup>.自适应控制利用辨识技术,主动修正控制器本身的参数和策略,在原始模型未知或不准确、控制环境改变时仍能得到令人满意的控制效果.传统自适应MPC方法将辨识和控制分离,没有在控制中考虑系统的不确定性,特别是未建模动态带来的影响.

Feldbaum<sup>[8]</sup>于1960年提出,对系统的信号控制是一个具有对偶特性的过程:一方面尽可能地使控制结果更接近目标要求;另一方面利用在控制过程中捕获(probe)的信息优化控制器,从而提升控制器的未来表现.这个信息就是系统的不确定性.实际上,这两个方面互相冲突:前者以减小系统不确定性为目标,后者要增加对不确定性的利用;兼顾两者的控制即为“对偶控制(dual control)”.近10年对偶控制才被引入MPC的研究中.早期的工作比如Marafioti等人<sup>[9]</sup>以及Žáčková等人<sup>[10]</sup>通过持续激励输入信号实现MPC的对偶特性.Kim和Sugie<sup>[6]</sup>在前人RMPC的基础上,对参数估计误差建立了一个单调递减的边界数值函数,并给出了一个减小参数不确定性的、非传统形式的自适应的鲁棒控制方法.王超等人<sup>[11]</sup>基于状态反馈Tube不变集RMPC算法,利用自适应集元滤波在线估计系统过程噪声边界及状态可达集,给出了确保系统状态鲁棒渐近稳定,并收敛于终端干扰不变集的鲁棒自适应MPC算法.最近的工作中,人们通过修改目标函数来利用系统的不确定性.Houska等人<sup>[12]</sup>针对含状态估计器的MPC控制,提出一种名为self-reflective的非线性MPC控制策略,通过在目标函数中加入未来状态估计方差的函数实现对偶控制;Feng等人<sup>[13]</sup>延续了这个工作,为self-reflective MPC提供了目标函数权重自动确定的实时方法.

前人有关对偶MPC的研究,基于固定的对象模型,虽然利用了系统中存在的不确定性,但当对象模型不准确或发生改变时,不确定性会增大而影响控制.持续激励输入的方法,无法充分描述系统当前的不确定性,有时还会因过多信息的引入为控制带来更多不便.

Heirung等人<sup>[14]</sup>于2015年率先研究了对偶自适应MPC(dual adaptive MPC)控制:针对参数估计不确定性,基于确定性等价(certainty-equivalence, CE)<sup>[15]</sup>自

适应MPC,在其目标函数中加入未来参数估计的信息矩阵或协方差矩阵的函数项,优化性能指标的同时减小自适应MPC中的参数不确定性.这个开创性的工作利用自适应控制,解决了对象参数不确定性对控制性能带来的影响.在控制中利用不确定信息的对偶控制环节,虽然提高了未来辨识的准确性,但并没有对自适应控制的缺点进行补偿,即无法解决一直存在的未建模动态不确定性问题.在2017年发表的另一论文中,Heirung等人<sup>[16]</sup>针对随机系统中存在的不确定性问题,基于正交基模型,通过添加对未来跟踪误差的统计描述项,建立了一个以最小化期望性能损失为目标的最小二次约束二次规划(quadratically constrained quadratic program, QCQP)问题求解.将不确定性相关项加入目标函数,诚然实现了不确定性的减小;但是原目标函数中的性能指标和不确定性相关项存在耦合,即使可以调整权重,目标函数的最小化依旧不能明确体现性能指标或不确定性自身单独的优化程度.在实际应用中,修改目标函数的做法也可能无法满足人们对性能指标较为严格的要求.

本文提出一种减小系统中可参数化不确定性影响的对偶自适应MPC算法:使被控对象的数学模型尽可能准确的同时,当前MPC控制系统的未来不确定性也在减小.具体的做法是:首先将动态过程中的不确定性参数化表达;然后描述在自适应MPC的迭代过程中对不确定性的边界要求,得到约束不确定性的关于时间(迭代步数)的边界函数;最后在每一步MPC控制中,将当前时刻对不确定性的边界要求作为额外约束添加其中,得到在参数估计准确,且系统不确定性在用户要求范围内的最优控制输入.该算法结合了鲁棒控制与自适应控制的策略,兼具两者的优点,也弥补各自的缺点,均衡考虑了模型质量和未建模动态的影响.不确定性被参数化表达;不同于他人利用不确定信息的方法,添加不等式约束的形式,在控制中实现控制性能优化与不确定性信息优化的分离,从而得到对目标性能的更为准确的控制.值得一提的是:约束参数化不确定性的边界函数,可由用户自由设计,以满足对减小不确定性影响的不同具体需求;几种边界函数的设计建议也将被给出.本文进行了MATLAB仿真实验与敏感性分析,在与传统的确定性等价自适应MPC的对比实验中,对偶MPC算法在控制过程中会得到更为平滑的输入、输出,且具有更好收敛性.

本文结构如下:第2章讨论对偶控制的原理,介绍被控对象的数学模型及确定性等价自适应MPC的实现流程;第3章分别就自适应模型预测控制中不确定性的参数化方法、算法的具体实现以及边界函数的设计介绍本文的自适应对偶MPC算法;第4章是MATLAB仿真对比实验和敏感性仿真实验的结果及分析;第5章总结并展望未来可进行的研究工作.附录

中是定理1的证明.

## 2 背景及问题描述

### 2.1 对偶控制的原理

本文面向具有未建模动态及被控对象未知参数的控制系统, 故需对被控对象进行参数估计. 图1为传统的确定性等价自适应MPC的结构框图. 其中, 参数估计模块根据历史控制输入和系统输出, 用辨识方法计算参数的最优估计值; CE MPC控制模块认为参数估计模块估计的参数值就是被控对象模型的真实参数值, 对当前所谓的“参数真实的对象”进行MPC控制. 将控制后得到的新的输入输出数据传入参数估计模块, 更新模型中的参数估计值, 再进行MPC控制. 如此循环往复, 即为确定性等价自适应MPC的基本流程. 显然, 图中由虚线标注的部分存在未来参数、未建模动态等不确定性相关信息, 但是传统的控制方法并没有对不确定性相关信息加以利用.

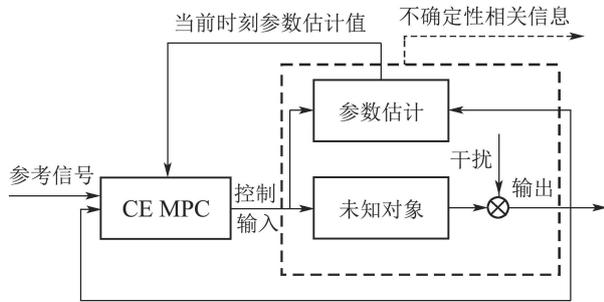


图 1 确定性等价自适应MPC的结构框图

Fig. 1 Block diagram illustrating a certainty-equivalence MPC structure

图2为对偶自适应MPC的结构框图. 对比确定性等价自适应MPC结构框图, 对偶MPC(dual MPC)控制模块利用了虚线框中存在的 uncertainty 相关信息, 得到可以使未来不确定性影响减小的控制输入. 更具体地说, 除了完成普通MPC的工作, dual MPC控制模块还利用当前系统中可以获取的数据, 去描述未来系统中存在的 uncertainty, 在计算控制律的同时减小参数化的 uncertainty 大小, 最终得到可以减小未来不确定性影响的控制律.

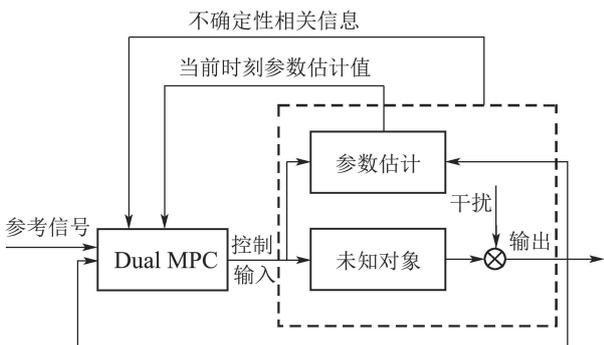


图 2 对偶自适应MPC的结构框图

Fig. 2 Block diagram illustrating a dual MPC structure

### 2.2 被控对象的描述

本文考虑的是离散的线性时不变单输入单输出 (single input single output, SISO) 系统. 根据上述假设, 将其模型描述如下:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) + b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + v(t), \quad (1)$$

其中:  $t = 1, 2, 3, \dots$  为离散时间点,  $y(t), u(t), v(t)$  分别为被控对象的输出、控制输入和  $t$  时刻的不可测噪声 (未建模动态); 系数  $\{a_i\}_{i=1}^{n_a}$  和  $\{b_i\}_{i=1}^{n_b}$  ( $b_1 \neq 0$ ) 为未知的参数; 假设  $v(t)$  为独立同分布的高斯随机变量, 均值为 0, 方差为  $r$ , 即

$$v(t) \sim \mathbf{N}(0, r), \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

下面将模型简写为

$$y(t) = \varphi^T(t-1)\theta + v(t), \quad (3)$$

其中:

$$\varphi^T(t-1) = [y(t-1) \dots y(t-n_a) u(t-1) \dots u(t-n_b)]^T, \quad (4a)$$

$$\theta = [a_1 \dots a_{n_a} b_1 \dots b_{n_b}]^T \quad (4b)$$

分别包含历史输入输出数据和未知参数.

### 2.3 确定性等价自适应MPC

下面分别对图1所示的确定性等价自适应MPC的参数估计部分和CE MPC控制部分的算法进行介绍. 本文选择的辨识方法为递推最小二乘法.

#### 2.3.1 递推最小二乘法

使用最小二乘法估计参数可以实现统计意义上的最优. 辨识本文被控对象的参数时, 目标函数为

$$\min_{\theta} V_{LS} = \sum_{k=1}^t [y(k) - \varphi^T(k-1)\theta]^2. \quad (5)$$

该目标函数可以通过求导直接得到最小值. 但是在线控制的过程中, 输入输出数据量逐渐增加, 为了减少计算的不便, 选择利用新输入输出修正上一步辨识结果以得到新结果的递推方法.

令  $\Phi(t) = [\varphi^T(0) \varphi^T(1) \dots \varphi^T(t)]^T$ , 记  $\hat{\theta}$  为  $t$  ( $t = 1, 2, \dots$ ) 时刻最小二乘法得到的对参数的最优估计, 通过推导易知  $t$  时刻参数估计的协方差矩阵可表示为

$$P(t) = E\{(\theta - \hat{\theta}(t))(\theta - \hat{\theta}(t))^T\} = \frac{P(t-1)\varphi(t-1)\varphi^T(t-1)P(t-1)}{\varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1) + r} + P(t-1). \quad (6)$$

定义矩阵

$$K(t) = \frac{P(t-1)\varphi(t-1)}{\varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1) + r}, \quad (7)$$

易得递推公式

$$P(t) = (I - K(t)\varphi^T(t-1))P(t-1), \quad (8a)$$

$$\hat{\theta} = K(t)(y(t) - \varphi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1)) + \hat{\theta}(t-1), \quad (8b)$$

其中 $I$ 为与 $P(t)$ 同阶的单位矩阵.

使用递推最小二乘法得到了模型参数后, 系统往往会因为无法描述随机干扰而按如下模型被使用:

$$y(t+1) = \varphi^T(t)\hat{\theta}(t). \quad (9)$$

### 2.3.2 确定性等价MPC

MPC一般会有类似如下形式的二次有限时域目标函数:

$$\min_{\{u(k)\}_{k=t}^{t+N-1}} V_{\text{MPC}} = \sum_{k=t}^{t+N-1} [\omega_1 y^2(k+1|t) + \omega_2 u^2(k)], \quad (10)$$

其中:  $N$ 为预测时域(式(10)取控制时域等于预测时域),  $w_1, w_2$ 为权重参数,

$$\begin{cases} y(k+1|t) = \varphi^T(k)\theta, \\ k = t, t+1, \dots, t+N-1, \end{cases} \quad (11)$$

$\varphi(k)$ 包含对 $i = k - n_a + 1, k - n_a + 2, \dots, k$ , 在 $i \leq t$ 时的记录输出 $y(i)$ ,  $i > t$ 时由模型计算得的预测输出 $y(i|t)$ ; 以及对 $j = k - n_b + 1, k - n_b + 2, \dots, k$ ,  $j < t$ 时的记录输入 $u(j)$ 和 $j \geq t$ 时的自由变量 $u(j)$ .

需要说明的是, 目标函数可根据需要进行调整, 如: 取不相等的预测时域与控制时域, 为输出、输入变量设置非零参考值, 添加控制输入变化量有关的项(有时也可通过将模型转化为增量模型, 直接用 $u(t)$ 表示控制输入变化量)等.

在确定性等价MPC中,  $t$ 时刻参数值为辨识方法估计所得的 $\hat{\theta}(t)$ , 因此式(10)中的 $\theta$ 应选用 $\hat{\theta}(t)$ . 记 $k$ 时刻MPC控制中, 由 $\hat{\theta}(t)$ 计算得到控制输出为 $\hat{y}(k+1|t)$ , 含由 $\hat{\theta}(t)$ 计算所得预测输出或输入变量的回归向量为 $\hat{\varphi}(k)$ . 又, 大部分MPC控制均包含对输入、输出的上下界约束; 故确定性等价MPC的优化问题可被描述为

$$\min_{\{u(k)\}_{k=t}^{t+N-1}} V_{\text{MPC}} = \sum_{k=t}^{t+N-1} [\omega_1 \hat{y}^2(k+1|t) + \omega_2 u^2(k)]. \quad (12a)$$

约束于

$$\begin{cases} \hat{y}(k+1|t) = \varphi^T(k)\hat{\theta}(t), \\ k = t, t+1, \dots, t+N-1, \end{cases} \quad (12b)$$

$$\begin{cases} u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}, \\ k = t, t+1, \dots, t+N-1, \end{cases} \quad (12c)$$

$$\begin{cases} y_{\min} \leq \hat{y}(k+1|t) \leq y_{\max}, \\ k = t, t+1, \dots, t+N-1, \end{cases} \quad (12d)$$

$$\{y(k)\}_{k=t-n_a+1}^t, \{u(k)\}_{k=t-n_b+1}^{t-1}, \hat{\theta}(t) \text{ 已知}, \quad (12e)$$

其中 $u_{\min}, u_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$ 分别为输入与输出的上、下界.

式(12)是一个凸二次规划(quadratic programming, QP)问题. 问题共有线性约束 $(3n_a + 2n_b)N$ 个. 其中: 等式约束个数为 $n_a N$ , 不等式约束个数 $2(n_a + n_b)N$ . 解该问题, 得到最优开环控制序列 $\{u^{\text{CE}}(k)\}_{k=t}^{t+N-1}$ , 取序列的第一个值 $u^{\text{CE}}(t)$ , 令 $u(t) = u^{\text{CE}}(t)$ , 对未知系统进行控制, 得到新的系统输出; 再利用新获得的数据更新参数估计值, 如此循环往复, 构成完整的确定性等价MPC控制.

### 3 对偶自适应MPC

本文具有可参数化不确定性系统的对偶自适应MPC算法通过对由未建模动态等引起的系统未来不确定性影响进行数学描述, 在自适应MPC的控制环节添加了有关不确定性的约束. 这样做保证被控对象参数估计准确的同时, 实现了具有鲁棒性能的MPC控制, 弥补了传统自适应MPC未充分考虑未建模动态的缺陷; 最终得到未来不确定性影响满足一定范围的使控制性能指标函数最优的控制律, 从整体上提升了控制性能. 由于主动对未建模动态不确定性进行约束, 某种程度上增加了未来模型估计的准确性, 所以本文算法也可使优化问题中由计算的预测值描述的性能指标更接近下一时刻性能指标的真实值, 同时提高了系统未来真实输出满足式(12d)中对预测输出的上下界约束的可能.

定义 $t$ 时刻在MPC问题中添加的不确定性约束为

$$\rho(t+1) \leq \rho_{\text{ub}}(t+1), \quad (13)$$

其中:  $\rho(t+1)$ 为 $t$ 时刻描述未来不确定性的函数, 与未来不确定性成正相关;  $\rho_{\text{ub}}(t+1)$ 为根据用户需求预定义的边界函数, 代表当前时刻用户能够允许的未来不确定性的最大值. 第3.3节将对边界函数的设计进行讨论并给出几种可行的方法.

#### 3.1 不确定性的讨论

为了利用控制中的不确定性, 首先需要尝试将其对系统控制的影响参数化表达. 本文欲在MPC控制环节对系统未来的未建模动态添加约束, 实际上就是在 $t$ 时刻想办法对式(3)中的随机噪声 $v(i)$  ( $i = t, t+1, \dots$ )进行具体描述.

在真实系统中, 当参数准确时, 式(3)反映了回归向量(历史输入、输出数据)和输出数据之间的函数关系; 如果已知回归向量和输出数据, 将数据看作参数, 则式(3)反映了随机干扰 $v(t)$ 与原模型参数 $\theta$ 的计算关系: 对一对已知的 $\varphi(t-1), y(t)$ 数据, 若已知 $\theta$ 的大小, 则可求此时 $v(t)$ 大小. 在辨识过程中用到的模型其实是式(9), 经过参数辨识得到的最优 $\hat{\theta}(t)$ 值, 使回归向量和输出数据尽可能满足由 $\hat{\theta}(t)$ 描述的式(9)中的模型. 观察式(3)(9)的差别, 可以发现 $\hat{\theta}(t)$ 中其实包含了对随机干扰的描述; 所以不难理解, 参数真值 $\theta$ 与最优估计值 $\hat{\theta}(t)$ 的差别从一定程度反映了随机干扰, 也就是未建模动态的大小; 未来时刻的参数估计值 $\hat{\theta}(t)$ 与真值 $\theta$ 的偏离程度, 体现了未来系统中不确定性的大小.

自适应控制中, 参数估计的方差矩阵 $P(t)$ 描述估计值 $\hat{\theta}(t)$ 与真值 $\theta$ 的偏离程度. 因此可以说, 未来时刻的参数估计方差矩阵正相关地描述了未来系统中的不确定性大小:  $P(t)$ 越大,  $\hat{\theta}(t)$ 偏离 $\theta$ 真值越大, 系统受到未建模动态的影响就越大, 未建模动态不确定性就越大. 对 $t$ 时刻的MPC问题, 取未来 $N_e(N_e \in \mathbb{N}^*)$ 个时刻的参数估计方差矩阵的函数组合构成 $\rho(t+1)$ , 来描述未建模动态引起的不确定性:

$$\rho(t+1) = \sum_{k=t}^{t+N_e-1} \delta^{k-t} f(P(k+1)), \quad (14)$$

其中:  $f(P(k))$ 为 $P(k)$ 的函数(需满足 $f(P(k))$ 能正相关地描述参数估计的不确定性或 $P(k)$ 的大小),  $\delta \in (0, 1]$ 为 $f(P(k))$ 的遗忘因子. 使用遗忘因子, 可以弱化遥远未来影响, 增强被描述得更加准确的近期未来的影响. 本文建议 $N_e$ 的取值小于预测时域 $N$ , 过大的 $N_e$ 会因模型不准、控制的主要目的是满足控制性能指标等原因而没有意义.

将式(14)代入式(13)便能得到一个完整的有关未来不确定性的约束. 第3.2节中会给出 $f(P(k))$ 的设计建议并在后文及仿真中选用其中一种设计方法.

### 3.2 对偶MPC优化问题

下面给出本文对偶自适应MPC算法的MPC优化问题. 为了将有关未来参数估计协方差矩阵的不等式约束引入优化问题, 需向优化问题中加入有关 $P(k)(k = t+1, \dots, t+N_e)$ 计算的等式约束. 由式(12)–(14), 以及方差矩阵的迭代公式(7)(8a), 具有对偶特性的MPC优化问题如下:

$$\min_{\{u(k)\}_{k=t}^{t+N-1}} V_{\text{MPC}} = \sum_{k=t}^{t+N-1} [\omega_1 \hat{y}^2(k+1|t) + \omega_2 u^2(k)]. \quad (15a)$$

约束于

$$\begin{cases} \hat{y}(k+1|t) = \varphi^T(k)\hat{\theta}(t), \\ k = t, t+1, \dots, t+N-1, \end{cases} \quad (15b)$$

$$\begin{cases} u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}, \\ k = t, t+1, \dots, t+N-1, \end{cases} \quad (15c)$$

$$\begin{cases} y_{\min} \leq \hat{y}(k+1|t) \leq y_{\max}, \\ k = t, t+1, \dots, t+N-1, \end{cases} \quad (15d)$$

$$\begin{cases} K(t+1) = \frac{P(t)\hat{\varphi}(t)}{\hat{\varphi}^T(t)P(t)\hat{\varphi}(t) + r}, \\ k = t, t+1, \dots, t+N_e-1, \end{cases} \quad (15e)$$

$$\begin{cases} P(t+1) = (I - K(t+1)\hat{\varphi}^T(t))P(t), \\ k = t, t+1, \dots, t+N_e-1, \end{cases} \quad (15f)$$

$$\sum_{k=t}^{t+N_e-1} \delta^{k-t} f(P(k+1)) \leq \rho_{\text{ub}}(t+1), \quad (15g)$$

$$\begin{cases} \{y(k)\}_{k=t-n_a+1}^t, \{u(k)\}_{k=t-n_b+1}^{t-1}, \\ \hat{\theta}(t), P(t), \rho_{\text{ub}}(t+1) \text{ 已知}, \end{cases} \quad (15h)$$

其中需要注意的是:  $P(k+1)(k = t, t+1, \dots, t+N_e-1)$ 不是 $k+1$ 时刻协方差矩阵的真实值, 而是由自由变量 $u(j)(j \geq t)$ 、历史输入输出数据, 以及由式(15b)计算的预测输出共同计算表示的变量; 可以较为接近地表示未来协方差矩阵的值.

这个对偶MPC问题是一个非线性规划(nonlinear programming, NLP)问题; 对比确定性等价MPC的QP优化问题, 本文算法增加了对方差矩阵的利用, 为优化问题添加了3组非线性约束, 很大程度增加了问题的复杂程度. 定义辅助变量 $z(k) \in \mathbb{R}^{(n_a+n_b) \times 1}$ 和 $\zeta(k) \in \mathbb{R}^1$ 如下:

$$\begin{cases} z(k) = P(k)\hat{\varphi}(k), \\ k = t, t+1, \dots, t+N_e-1, \end{cases} \quad (16a)$$

$$\begin{cases} \zeta(k) = \hat{\varphi}^T(k)z(k), \\ k = t, t+1, \dots, t+N_e-1. \end{cases} \quad (16b)$$

又考虑到方差矩阵 $P(k+1)$ 为对称矩阵的性质,  $K(k+1), P(k+1)$ 的迭代公式可化为简单的二次约束形式:

$$\begin{cases} z(k) = rK(k+1) + \zeta(k)K(k+1), \\ k = t, t+1, \dots, t+N_e-1, \end{cases} \quad (17a)$$

$$\begin{cases} P(k+1) = P(k) - K(k+1)z^T(k), \\ k = t, t+1, \dots, t+N_e-1, \end{cases} \quad (17b)$$

$f(P(k))$ 有多种可行的设计方法, 理论上, 对本文系统, 能正相关地描述不确定性或 $P(k)$ 大小的设计均可行. 行列式、各种范数、矩阵的迹等都可以用来衡量矩阵的大小<sup>[14]</sup>, 显著的不同之处在于计算的复杂程度. 矩阵的范数涉及代价高昂的非线性计算, 增加了原本就因 $P(k)$ 的存在而颇受影响的计算复杂程度. 行

列式提供了矩阵范数的一种替代. 但是当阶数超过三时, 行列式不再能由简单的公式直接计算; 常规计算方法需要展开行列式, 求元素与代数余子式乘积之和, 包含大量乘法, 十分复杂. 一个简单的行列式计算方法是求所有特征值的乘积, 但是特征值的计算也是非线性且复杂的. 可以通过利用矩阵指数公式使用行列式:

$$\det(\exp(P(k+1))) = \exp(\text{tr}(P(k+1))), \quad (18)$$

其中 $\det(M)$ ,  $\exp(M)$ ,  $\text{tr}(M)$ 分别表示矩阵 $M$ 的行列式、矩阵的自然指数和矩阵的迹. 矩阵的迹可以直接通过对矩阵对角线所有元素求和得到, 易于计算, 且该计算过程无需向优化问题中添加额外约束. 采用式(18)是一种可行且计算较为简便的 $f(P(k+1))$ 的选择. 本文直接选则矩阵的迹作为 $f$ 函数:

$$f(P(k+1)) = \text{tr}(P(k+1)), \quad (19)$$

如此便可通过计算 $P(k+1)$ 对角线元素之和得到函数值. 向优化问题(15)中代入式(16)–(17)(19), 得到重写的优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\{u(k)\}_{k=t}^{t+N-1}} V_{\text{MPC}} = & \\ \sum_{k=t}^{t+N-1} [\omega_1 \hat{y}^2(k+1|t) + \omega_2 u^2(k)]. & \quad (20a) \end{aligned}$$

约束于

$$\begin{cases} \hat{y}(k+1|t) = \varphi^T(k)\hat{\theta}(t), \\ k = t, t+1, \dots, t+N-1, \end{cases} \quad (20b)$$

$$\begin{cases} u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}, \\ k = t, t+1, \dots, t+N-1, \end{cases} \quad (20c)$$

$$\begin{cases} y_{\min} \leq \hat{y}(k+1|t) \leq y_{\max}, \\ k = t, t+1, \dots, t+N-1, \end{cases} \quad (20d)$$

$$\begin{cases} z(k) = P(k)\hat{\varphi}(k), \\ k = t, t+1, \dots, t+N_e-1, \end{cases} \quad (20e)$$

$$\begin{cases} \zeta(k) = \hat{\varphi}^T(k)z(k), \\ k = t, t+1, \dots, t+N_e-1, \end{cases} \quad (20f)$$

$$\begin{cases} z(k) = rK(k+1) + \zeta(k)K(k+1), \\ k = t, t+1, \dots, t+N_e-1, \end{cases} \quad (20g)$$

$$\begin{cases} P(k+1) = P(k) - K(k+1)z^T(k), \\ k = t, t+1, \dots, t+N_e-1, \end{cases} \quad (20h)$$

$$\sum_{k=t}^{t+N_e-1} \delta^{k-t} \text{tr}(P(k+1)) \leq \rho_{\text{ub}}(t+1), \quad (20i)$$

$$\begin{cases} \{u(k)\}_{k=t-n_a+1}^t, \{u(k)\}_{k=t-n_b+1}^{t-1}, \\ \hat{\theta}(t), P(t), \rho_{\text{ub}}(t+1) \text{ 已知}. \end{cases} \quad (20j)$$

至此已完成对偶MPC优化问题的全部推导. 对比确定

性等价MPC的优化问题(12), 对偶MPC的优化问题中增加了二次等式约束共 $(n_a + n_b + 1)^2 N_e$ 项; 因为矩阵 $P(k+1)$ 对称, 故可以只取其左下三角或右上三角(含对角线)部分的元素进行约束, 二次等式约束减少为 $[(n_a + n_b)^2 + 5(n_a + n_b) + 2]N_e/2$ 项. 在后添加的未来不确定性的不等式约束项(20i)中,  $\rho_{\text{ub}}(t+1)$ 已定义, 可认为是常数; 不等式左端可认为是不同时刻未来方差矩阵的对角线元素的线性组合; 故式(20i)为线性不等式约束.

经过辅助变量的引入和函数 $f(P(k+1))$ 的选取, 本文对偶MPC的初始NLP问题(15)被化为一个二次约束二次规划(quadratically-constrained quadratic programming, QCQP)问题. 现在已有求此类问题全局最优解的算法, 如GloMIQO算法<sup>[17]</sup>.

### 3.3 自定义边界函数的设计

本节给出边界函数 $\rho_{\text{ub}}(t+1)$ 的设计建议. 因为 $\rho_{\text{ub}}(t+1)$ 约束系统参数化的不确定性, 所以一种直观且简单的选取就是取常数 $\rho_c$  ( $\rho_c > 0$ ), 则不确定性约束(20i)变为

$$\sum_{k=t}^{t+N_e-1} \delta^{k-t} \text{tr}(P(k+1)) \leq \rho_c. \quad (21)$$

式(21)可以实现在控制的过程中, 系统参数化的不确定性一直小于 $\rho_c$ .

还可以将边界函数设置为分段函数:

$$\rho_{\text{ub}}(k) = \begin{cases} \rho_1, & k = 1, 2, \dots, t_m, \\ \rho_2, & k = t_m + 1, t_m + 2, \dots, \end{cases} \quad (22)$$

其中:  $\rho_1 > \rho_2 > 0$ 为设定的两个常数,  $k=1$ 为自适应MPC的初始时刻,  $t_m$ 为设定的转换时刻; 因为辨识的初期辨识参数不够准确, 可能存在较大的偏差, 所以这样设置能够在自适应MPC控制的前期中更加充分地利用系统信息, 实现更快的辨识; 随着辨识接近收敛, 再将不确定性的边界设置得更小, 以实现未来控制的良好鲁棒性.

分析本文中的不确定性约束(20i), 定义函数

$$g(t) = \sum_{k=t}^{t+N_e-1} \delta^{k-t} \text{tr}(P(k+1)), \quad t = 1, 2, 3, \dots, \quad (23)$$

则有如下定理:

**定理1** 当 $P(k+1)$  ( $k = t, t+1, \dots, t+N_e-1$ ) 为由式(15e)(15f)描述的、 $k+1$ 时刻对辨识方差矩阵的估计时, 式(23)中定义的函数 $g(t)$ 为单调递减函数.

定理1的证明见附录.

由定理1可知, 当不确定性参数化为式(14)(19)所示的未来时刻方差矩阵的迹的加权和时, 式(21)约束中的常数 $\rho_c$ 其实只对初始时刻的 $g(t)$ 进行了约束, 因为当 $k > 1$ 时, 必有 $g(k) < g(1)$ , 又通过控制, 有 $g(k)$

$< g(1) < \rho_c$ . 所以不妨将边界函数也定义成一个单调递减的函数, 从而实现每一次迭代的不确定性都进行一定程度的约束, 最简单的定义方式比如使用比例因子  $\lambda \in (0, 1]$ , 取

$$\rho_{ub}(k) = \lambda^k \rho_c, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

也可在一段时间后停止对不确定性的约束, 或当不确定性函数值达到一定指标时停止对其的进一步控制, 如令

$$\rho_{ub}(k) = \begin{cases} \lambda^k \rho_c, & k = 1, 2, \dots, t_m, \\ \rho_{ub}(t_m), & k = t_m + 1, t_m + 2, \dots \end{cases} \quad (25)$$

除上述列出的边界函数外, 还可设计很多其他更为精准的、可满足用户不同需求的函数, 本文不再展开讨论.

## 4 仿真及结果

### 4.1 可容许性及可行性分析

参数估计中的可容许性(admissibility)问题运用在自适应控制时<sup>[18]</sup>, 表明参数空间中存在一些辨识出来的模型参数, 会导致不良的控制性能, 其中一个典型的例子就是零极点相消. 本文明显不可容许的一组参数估计就是  $\hat{\theta} = \vec{0}$ . 对式(1)模型, 当  $y(t-i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n_a$ ) 的系数均为0时, 系统将不再表现出动态特性; 若  $u(t-j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n_b$ ) 的系数均为0, 系统变为不可控系统; 此时MPC控制器将不会给出非零的控制输入. 所以初始化参数估计时应避免取零向量.

假设用户对控制输入、控制输出设定的上下界约束可以使确定性等价自适应MPC问题(12)具有可行域. 分析本文添加了参数化不确定性边界约束的对偶自适应MPC控制, 在自适应控制的过程中, 不确定性函数会随着辨识的收敛而越来越小, 对因此造成的控制输入的约束也会在控制过程中逐渐放宽; 可以认为: 只要在自适应控制的初始, 不选择过分严格的边界约束值, 则本文的对偶MPC控制问题可行.

### 4.2 仿真实验

本文对如下具体系统进行仿真实验:

$$y(t) = ay(t-1) + bu(t-1) + v(t), \quad (26)$$

其中  $a \neq 0$  且  $b \neq 0$ . 则有向量

$$\varphi(t) = [y(t) \quad u(t)]^T, \quad \hat{\theta}(t) = [\hat{a}(t) \quad \hat{b}(t)]^T. \quad (27)$$

$t$ 时刻对  $t+1$ 时刻输出的预测为

$$\hat{y}(t+1|t) = \hat{a}(t)y(t) + \hat{b}(t)u(t) = \varphi^T(t)\hat{\theta}(t). \quad (28)$$

除非特殊声明, 所有仿真取  $a = 1.1$  (不稳定系统),  $b = 1$ , 噪声的方差  $r = 0.01$ . 取  $y(0) = 1$ , 参数估计的初值为  $\hat{a}(0) = -0.1, \hat{b}(0) = -0.1$ , 递推最小二乘法

中取初始值  $P(0) = 10^{-3}I$ . 在MPC目标函数中取  $\omega_1 = \omega_2 = 1, N = 10$ , 令输入、输出的上下界分别为  $u_{\min} = -5, u_{\max} = 5, y_{\min} = -10, y_{\max} = 10$ .

首先进行确定性等价自适应MPC与本文算法的对比仿真实验. 对对偶MPC问题(20), 不妨取  $N_e = 1, \delta = 1$ ; 选取不确定性的边界函数为式(24)描述的单调递减函数, 取  $\lambda = 0.999, \rho_c = 1.4 \times 10^{-3}$ , 后文的分析均选取该边界函数以及当前  $\lambda, \rho_c$  的值.

使用MATLAB实现上述两种算法, 其中MPC问题的求解使用非线性最优化函数fmincon, 并选用其默认优化算法计算, 迭代终止条件取默认值(本文认为当控制和辨识趋于稳定时只需很少的迭代步数就可以获得最优解). 所有仿真均在配置为1.7 GHz, Intel Core i5 的处理器计算机上进行. 在上述对比仿真实验中, 确定性等价自适应MPC以及本文算法每一步迭代控制的CPU时间分别约为48.27 ms和83.03 ms; 实验所用时间数量级相同且, 时间差可接受, 故本文算法在运行时间上具有可操作性.

选取前50步自适应控制的仿真结果绘制图像, 如图3所示, 其中虚线代表确定性等价自适应MPC算法, 实线代表本文具有可参数化不确定性约束的对偶自适应MPC算法,  $t$ 表示迭代步数.

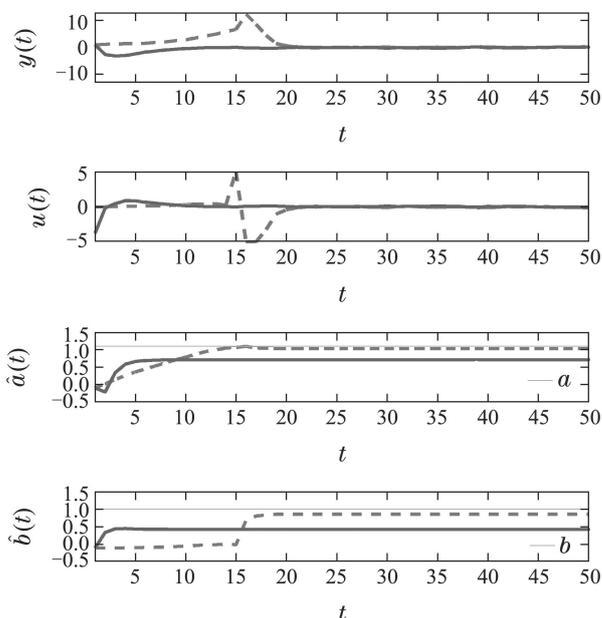


图 3 由式(20)描述的对偶自适应MPC和由式(12)描述的确定性等价自适应MPC, 在其他条件相同时的仿真结果对比(其中粗虚线为确定性等价自适应MPC的数据, 粗实线为本文算法获得的仿真数据)

Fig. 3 Simulation results of dual adaptive MPC (solid line) defined by (20) and the CE adaptive MPC (dotted line) defined by (12)

图3清楚地体现了本文方法与传统方法的差异. 仿真结果表明, 两个方法都能随时间推移, 使控制输

入、输出趋近目标函数中的要求;当辨识的参数值趋于稳定时,两个控制器也很快地在 $t = 8$ 和 $t = 20$ 左右两个时刻分别实现了收敛。对比而言,本文算法在控制的过程中,具有更加平滑的控制输入和控制输出曲线,可以在降低控制损耗的同时提升过程中整体的控制性能。解得的控制输入在一开始距目标零控制输入较远,这是由参数不准及系统不确定性约束引起的算法的正常反应,这种反应使系统具有良好的快速性。本文算法在辨识上的表现与传统方法有一定差异:传统自适应MPC方法辨识较慢收敛,但估计的参数更接近模型真实参数;本文方法参数估计的收敛值距真实值较远,但较快趋于稳定,这加快了控制进程的收敛。参数估计的收敛值远离真实值,实际上是因为更充分地考虑了系统中的不可建模动态;无论辨识的参数有多准确,未建模动态总会对象真实输出造成影响,使由模型得到的预测输出偏离真实值,所以从另一个角度来说,面向控制的自适应MPC,无需太过准确的参数估计,而应考虑系统中的不确定因素。

根据上述分析,可以认为,仿真结果体现了本文具有可参数化不确定性系统的对偶自适应MPC算法的思想和特点:在自适应控制的过程中考虑了系统中存在的不可建模动态,减小了未来的不确定性,从而提升控制的性能。仿真数据证明:本文算法成功地将不确定性的影响参数化表达,并且通过在优化中增添对其的边界约束减小了系统未来不确定性对控制的影响;对比传统方法,有更好的收敛性,获得了具有更少能量损耗的控制律、更加平滑且接近目标值的控制输出,实现了控制性能整体上的优化。

### 4.3 敏感性分析

首先建立敏感性指标。记 $N_{\text{step}}$ 为从初始时刻起的迭代步数, $a_t, b_t$ 分别为本文算法在辨识中模型参数 $\hat{a}, \hat{b}$ 趋于稳定后的取值(本实验中取为 $N_{\text{step}}$ 时刻的辨识值),为了表示算法的输入输出平滑性以及快速性,用均方误差定义指标:

$$E_y = \frac{1}{N_{\text{step}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{step}}} y(t)^2, \quad (29a)$$

$$E_u = \frac{1}{N_{\text{step}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{step}}} u(t)^2, \quad (29b)$$

$$E_{\hat{a}} = \frac{1}{N_{\text{step}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{step}}} (\hat{a}(k) - a_t)^2, \quad (29c)$$

$$E_{\hat{b}} = \frac{1}{N_{\text{step}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{step}}} (\hat{b}(k) - b_t)^2. \quad (29d)$$

需要注意的是, $N_{\text{step}}$ 的取值需满足参数辨识值、控制输入输出值均在 $N_{\text{step}}$ 时刻前趋于稳定。

依旧取 $N_e = 1, \delta = 1$ ,算法有关高斯白噪声的方差 $r$ 的敏感性仿真实验结果如图4所示。4个指标均具有相同的变化趋势:当不确定性描述确定时(即对于

确定的 $N_e, \delta$ ),随着 $r$ 指数增大,算法性能表现一开始会保持良好,当 $r$ 增大到一定程度时,算法性能会随着 $r$ 增大较快变差;总体上来说,当 $r$ 在一定范围内变化时,算法的快速性及平滑性整体上没有很大的变化;当 $r$ 过大时,可能需要通过改变算法的其他参数值以获取系统良好的性能。

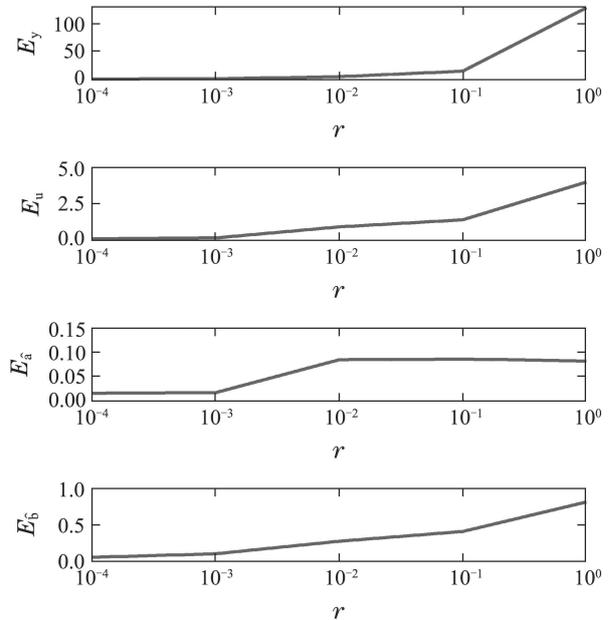


图4 高斯随机扰动方差的大小 $r$ ,对式(20)(24)描述的对偶自适应MPC的敏感性测试结果(其中 $E_y, E_u, E_{\hat{a}}, E_{\hat{b}}$ 由式(29)定义)

Fig. 4 Sensitivity of dual adaptive MPC defined by (20)(24) with respect to the variance,  $r$  of stochastic noise (The quantities  $E_y, E_u, E_{\hat{a}}$  and  $E_{\hat{b}}$  are defined in (29))

取 $\delta = 0.99$ ,测试算法关于 $N_e$ 的敏感程度,如图5所示。结果表明, $N_e$ 的选取对参数辨识的收敛没有过大的影响;随着 $N_e$ 增大,控制变量的敏感性指标值会逐渐增大,但是始终保持在可以接受的范围内。分析 $N_e$ 较大时 $u(t), y(t)$ 数据,发现控制初始的输入输出值都较大,且出现振荡,欲达到收敛需要更多迭代步数。仿真中还发现, $N_e$ 较大时,参数估计的收敛值会较接近真实值,如图6所示。因为关注的是控制性能的优化,所以对这方面的表现不过多分析。

取 $N_e = 4$ ,分析算法对 $\delta$ 取值的敏感性。仿真结果表明,随着 $\delta$ 的变化,敏感性指标值基本不变;故 $\delta$ 取值对算法性能没有很大影响。综上所述,本文算法在仿真实验中得到了平滑的控制信号,具有良好的快速性。当随机干扰的方差不过大时,根据需求任选 $\delta$ 和一个不大于 $\frac{1}{2}N$ 的 $N_e$ 值时,算法都会获得优于传统方法的控制性能。

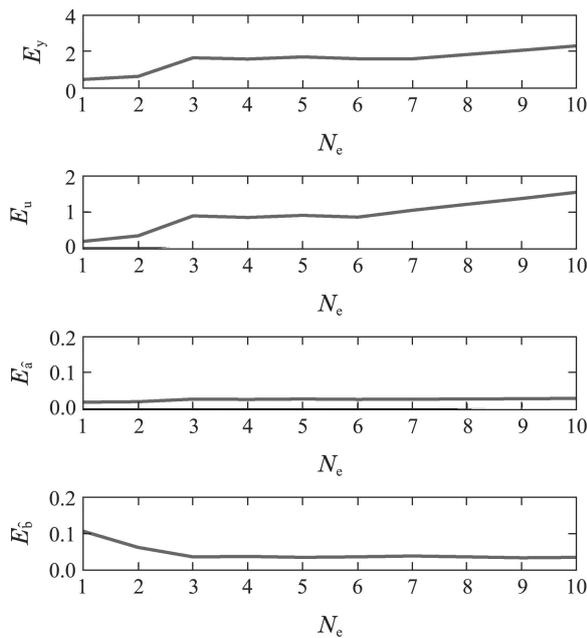


图5 不确定性描述项(23)中的参数 $N_e$  ( $N = 10$ ), 对式(20)(24)描述的对偶自适应MPC的敏感性测试结果(其中 $E_y, E_u, E_a, E_b$ 由式(29)定义)

Fig. 5 Sensitivity of dual adaptive MPC defined by (20)(24) with respect to  $N_e$  in (23) when  $N = 10$  (The quantities  $E_y, E_u, E_a$  and  $E_b$  are defined in (29))

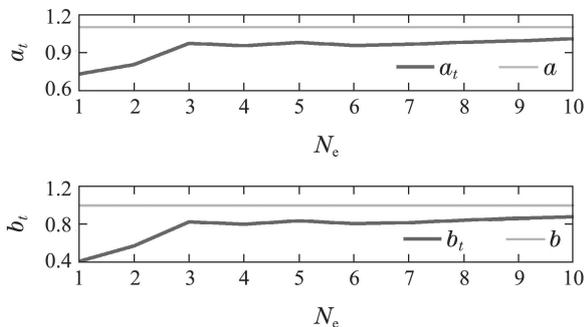


图6 不确定性描述项(23)中的参数 $N_e$ , 对由式(20)(24)描述的对偶自适应MPC的参数 $a, b$ 辨识的终值 $a_t, b_t$ 的影响

Fig. 6 Terminal values of identified parameters  $a_t, b_t$  of dual adaptive MPC defined by (20)(24) with respect to  $N_e$  in (23)

## 5 总结与展望

本文介绍了具有可参数化不确定性系统的一种对偶自适应MPC控制算法: 通过向MPC问题引入不确定性的约束, 将鲁棒控制思想与自适应控制结合, 同时考虑了控制过程中参数的不确定性以及未建模动态不确定性带来的影响. 本文给出将未建模动态引起的不确定性参数化的方法, 也为完整实验给出了不确定性约束的边界函数的设计建议. 仿真结果表明, 本文算法较传统的确定性等价自适应MPC算法, 用更小的控制损耗获得了更具快速性、更为平滑的辨识和控制结果; 本文算法的控制输入、输出随着迭代进行最

终收敛于确定性等价自适应MPC. 敏感性分析表明, 算法的平均控制性能优于传统算法, 且对较明显的干扰存在一定程度的容忍.

本文在自适应控制的相容许性和MPC算法的迭代可行性上, 只进行了粗略的讨论, 未来需要对此展开更具体的论证. 除此之外, 算法只面向单输入单输出(single input single output)系统, 并没有对多输入多输出(multiple input multiple output)系统进行算法、实验上的讨论. 算法有待被真实物理系统试验检验.

## 参考文献:

- [1] CHEN Hong. *Model Predictive Control*. Beijing: Beijing Science Press, 2013.  
(陈虹. 模型预测控制. 北京: 北京科学出版社, 2013.)
- [2] MESBAH A. Stochastic model predictive control with active uncertainty learning: a survey on dual control. *Annual Reviews in Control*, 2018, 45: 107 – 117.
- [3] XIE Lantao, XIE Lei, SU Hongye. A comparative study on algorithms of robust and stochastic MPC for uncertain systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(6): 969 – 992.  
(谢澜涛, 谢磊, 苏宏业. 不确定系统的鲁棒与随机模型预测控制算法比较研究. 自动化学报, 2017, 43(6): 969 – 992.)
- [4] QIN Weiwei, MA Jianjun, LIU Gang, et al. Robust model-predictive control for a constrained nonlinear system with bounded disturbance. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(5): 709 – 714.  
(秦伟伟, 马建军, 刘刚, 等. 一类干扰有界约束非线性系统的鲁棒模型预测控制. 控制理论与应用, 2011, 28(5): 709 – 714.)
- [5] LIU Gang, QIN Weiwei, LIU Jieyu, et al. RMPC for constrained nonlinear systems based on interval arithmetic. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(6): 735 – 740.  
(刘刚, 秦伟伟, 刘洁瑜, 等. 运用区间算法的约束非线性系统鲁棒模型预测控制. 控制理论与应用, 2014, 31(6): 735 – 740.)
- [6] KIM T H, SUGIE T. Adaptive receding horizon predictive control for constrained discrete-time linear systems with parameter uncertainties. *International Journal of Control*, 2008, 81(1): 62 – 73.
- [7] MAYNE D Q. Model predictive control: recent developments and future promise. *Automatica*, 2014, 50(12): 2967 – 2986.
- [8] FELDBAUM A A. Dual-control theory (I–II). *Automation and Remote Control*, 1960, 21: 1240 – 1249, 1453 – 1464.
- [9] MARAFIOTI G, BITMEAD R R, HOVD M. Persistently exciting model predictive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Process*, 2014, 28(6): 536 – 552.
- [10] ŽÁČEKOVÁ E, PRÍVARA S, PČOLKA M. Persistent excitation condition within the dual control framework. *Journal of Process Control*, 2013, 23(9): 1270 – 1280.
- [11] WANG Chao, ZHANG Shengxiu, QIN Weiwei, et al. Tube-reachable set-based robust model predictive control with adaptive disturbances boundaries. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(1): 11 – 18.  
(王超, 张胜修, 秦伟伟, 等. 具有自适应噪声边界的Tube可达集鲁棒预测控制. 控制理论与应用, 2014, 31(1): 11 – 18.)
- [12] HOUSKA B, TENLEN D, LOGIST F, et al. Self-reflective model predictive control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2017, 55(5): 2959 – 2980.
- [13] FENG X, HOUSKA B. Real-time algorithm for self-reflective model predictive control. *Journal of Process Control*, 2018, 65: 68 – 77.
- [14] HEIRUNG T A N, FOSS B, YDSITE B E. MPC-based dual control with online experiment design. *Journal of Process Control*, 2015, 32: 64 – 76.

- [15] ASTROM K J, WITTENMARK B. *Adaptive Control*. New York, America: Dover Publications, 2008.
- [16] HEIRUNG T A N, YDSITE B E, FOSS B. Dual adaptive model predictive control. *Automatica*, 2017, 80: 340 – 348.
- [17] MISENER R, FLOUDAS C A. GloMIQO: global mixed-integer quadratic optimizer. *Journal of Global Optimization*, 2013, 57(1): 3 – 50.
- [18] YDSITE B E. Certainty equivalence adaptive control: what's new in the gap. *AIChE Symposium Series*. New York: American Institute of Chemical Engineers, 1997, 93(316): 9 – 23.

## 附录 定理 1 的证明

由  $P(t)$  的递推公式(6), 当  $t = 1, 2, 3, \dots$  时, 有

$$P(t) - P(t+1) = \frac{P(t)\hat{\varphi}(t)\hat{\varphi}^T(t)P(t)}{\hat{\varphi}^T(t)P(t)\hat{\varphi}(t) + r}. \quad (\text{A1})$$

因为方差矩阵  $P(t)$  必为半正定矩阵, 所以对  $\forall \hat{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^{(n_a+n_b) \times 1}$ , 有

$$\hat{\varphi}^T(t)P(t)\hat{\varphi}(t) \geq 0. \quad (\text{A2})$$

由  $r > 0$ , 有

$$\hat{\varphi}^T(t)P(t)\hat{\varphi}(t) + r > 0. \quad (\text{A3})$$

半正定矩阵  $P(t)$  是对称矩阵, 即  $P(t) = P^T(t)$ , 故有

$$\begin{aligned} P(t)\hat{\varphi}(t)\hat{\varphi}^T(t)P(t) &= \\ P^T(t)\hat{\varphi}(t)\hat{\varphi}^T(t)P(t) &= \\ (P^T(t)\hat{\varphi}(t))(P^T(t)\hat{\varphi}(t))^T, & \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

其中易知  $P^T(t)\hat{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^{(n_a+n_b) \times 1}$  为一个  $(n_a + n_b)$  维的列向量.

定义列向量  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1} (n \geq 1)$ , 则  $n$

维方阵  $M = xx^T$  的迹满足

$$\text{tr}(M) = \text{tr}(xx^T) = \text{tr}(x^T x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0, \quad (\text{A5})$$

则对式(A4), 有

$$\begin{aligned} \text{tr}(P(t) - P(t+1)) &= \text{tr}(P(t)) - \text{tr}(P(t+1)) = \\ \text{tr}\left(\frac{P(t)\hat{\varphi}(t)\hat{\varphi}^T(t)P(t)}{\hat{\varphi}^T(t)P(t)\hat{\varphi}(t) + r}\right) &= \frac{\text{tr}(P(t)\hat{\varphi}(t)\hat{\varphi}^T(t)P(t))}{\hat{\varphi}^T(t)P(t)\hat{\varphi}(t) + r} \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

故

$$\text{tr}(P(t)) \geq \text{tr}(P(t+1)). \quad (\text{A7})$$

又  $\delta > 0$ , 故对  $\forall t \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} g(t+1) &= \sum_{k=t+1}^{t+N_e} \delta^{k-(t+1)} \text{tr}(P(k+1)) = \\ &\text{tr}(P(t+2)) + \delta \text{tr}(P(t+3)) + \dots + \\ &\delta^{N_e-1} \text{tr}(P(t+1+N_e)) \leq \\ &\text{tr}(P(t+1)) + \delta \text{tr}(P(t+2)) + \dots + \\ &\delta^{N_e-1} \text{tr}(P(t+N_e)) \leq g(t), \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

因此  $g(t)$  为单调递减函数. 当情况  $\exists t \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(k)\hat{\varphi}(k) \equiv \vec{0}$  ( $k = t, t+1, \dots, t+N_e-1$ ) 永远不发生时,  $g(t)$  严格单调递减. 证毕.

作者简介:

曹文祺 博士研究生, 研究方向为模型预测控制, E-mail: wenqi.cao@sjtu.edu.cn;

李少远 教授, 研究方向为分布式预测控制、网络控制、CPS系统的智能优化、动态系统优化, E-mail: syli@sjtu.edu.cn.