

# 基于级联型具有旋转激励的平移振荡器系统的滑模控制

武宪青<sup>†</sup>, 张益波

(浙江理工大学 机械与自动控制学院, 浙江 杭州 310018)

**摘要:** 针对欠驱动具有旋转激励的平移振荡器(TORA)系统的控制问题, 本文首次提出一种全局滑模控制方法, 使闭环系统在整个控制过程对外界干扰均具有鲁棒性。相比已有控制方法, 本文所提方法结构简单, 便于实现; 而且放宽了对外界干扰的假设条件, 可实现闭环系统的全局滑模控制。具体而言, 本文首先将系统模型变换为由两个子系统组成的级联形式; 随后, 针对内环子系统设计了一种虚拟控制输入, 在此基础上构造了一种新颖的滑模面并设计了相应的滑模控制器; 最后, 通过严格的数学分析证明了闭环系统的稳定性及系统状态的渐近收敛性, 利用数值仿真测试检验了本文所提方法的控制性能。通过与已有方法进行仿真对比可知, 本文方法在镇定控制与鲁棒性方面均表现出良好的控制性能。

**关键词:** 具有旋转激励的平移振荡器; 欠驱动系统; 滑模控制; 基于级联控制

**引用格式:** 武宪青, 张益波. 基于级联型具有旋转激励的平移振荡器系统的滑模控制. 控制理论与应用, 2020, 37(2): 307 – 315

DOI: 10.7641/CTA.2019.80688

## Sliding-mode control of the cascade-based translation oscillators with rotating actuator system

WU Xian-qing<sup>†</sup>, ZHANG Yi-bo

(Faculty of Mechanical Engineering and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

**Abstract:** For the control problem of the underactuated translation oscillators with rotating actuator (TORA) system, a global sliding-mode control method is firstly proposed in this paper, which exhibits good robust to extraneous disturbances during the whole control process. Compared with existing control methods, the structure of the proposed method is simple, which is easy to realize. Moreover, the assumption condition of the external disturbances is relaxed and global sliding-mode control of the closed-loop system is achieved. Specifically, the system model is first transformed into a cascade form consisting of two subsystems. Then, a virtual control input is designed for the inner-loop subsystem, based on which a novel sliding-mode surface is constructed and a corresponding sliding-mode controller is proposed. Finally, the stability of the closed-loop system and the asymptotic convergence of system states are proved through rigorous mathematical analysis, the control performance of the proposed method is examined by using numerical simulation tests. Simulation results show that, in comparison with existing methods, the proposed method achieves superior control performance in stabilization control and robust control.

**Key words:** translation oscillators with rotating actuator; underactuated systems; sliding-mode control; cascaded-based control

**Citation:** WU Xianqing, ZHANG Yibo. Sliding-mode control of the cascade-based translation oscillators with rotating actuator system. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(2): 307 – 315

## 1 引言

具有旋转激励的平移振荡器(translation oscillators with rotating actuator, TORA), 最初由Rand等研究人员<sup>[1]</sup>提出并作为双自旋航天器的简化模型用于研究自

振现象, 后来其作为一种非线性基准系统主要用于非线性控制器设计、检验非线性控制器的性能或教育目的。TORA系统与桥式吊车<sup>[2-4]</sup>、船用吊车<sup>[5]</sup>、塔式吊车<sup>[6]</sup>、杂技机器人<sup>[7]</sup>、倒立摆<sup>[8]</sup>、球杆<sup>[9]</sup>等系统类似,

收稿日期: 2018-09-11; 录用日期: 2019-04-30.

<sup>†</sup>通信作者。E-mail: wxq@zstu.edu.cn; Tel.: +86 571-86843341.

本文责任编辑: 徐胜元。

浙江省自然科学基金项目(LQ18F030011, LQ19F030014), 国家自然科学基金项目(61803339, 61703371)资助。

Supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LQ18F030011, LQ19F030014) and the National Natural Science Foundation of China (61803339, 61703371).

控制输入个数少于系统的被控量个数, 是一种典型的欠驱动系统。由于这类系统省去了部分执行器, 使得其具有简单的机械结构, 而且因此能够有效地节约成本或降低系统本身的重量, 使得此类系统具有重量轻、能耗小、成本低等诸多优点。欠驱动特性带来便利的同时, 也为它的控制带来了极大的挑战, 由于这类系统复杂的动力学特性, 使得其具有强耦合、高度非线性等特点。因此, 相比全驱动的机械系统, 对 TORA 系统的控制难度更大, 控制器设计更具挑战性, 一直以来都受到控制、机械等领域研究学者的广泛关注。

TORA 系统的结构简图如图 1 所示, 其与倒立摆类似, 均具有两个被控量一个控制输入, 是一个以少控多的机械系统。TORA 系统主要由一个平移振荡小车和一个旋转小球组成, 其中, 旋转小球可在输入转矩作用下绕平面做旋转运动, 平移振荡小车可沿平面做往返振荡运动, 只能通过旋转小球的转动间接地对平移振荡小车的运动进行控制, 两种运动通过一个正弦项耦合在一起, 给 TORA 系统的控制带来了更大的难度。平移振荡小车不可被直接驱动, 只能通过非线性耦合项对其间接控制。因此, 对于 TORA 系统而言, 其控制任务是当平移振荡小车偏离平衡位置或受到外界干扰时, 通过旋转小球的转动消除小车的平移振荡运动, 使其返回到平衡点位置。

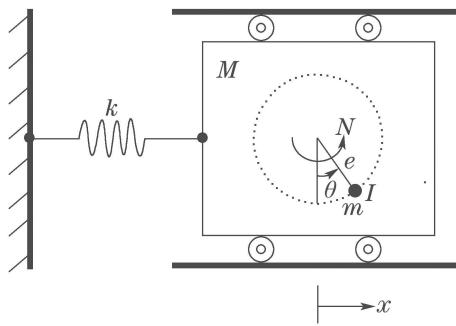


图 1 TORA 系统结构图

Fig. 1 TORA system structure

针对 TORA 系统的控制问题, 目前已有大量学者进行了深入的研究, 并提出了一些控制方法。具体而言, 文献 [10] 基于级联型 TORA 系统模型和基于无源性分别提出了多种非线性控制器; Guo 等人<sup>[11]</sup>首先将 TORA 系统化为级联规范型, 利用部分反馈线性和反步法设计了一种非线性控制器, 但这种方法结构较为复杂。此外, 考虑到系统可能存在参数不确定性和外部扰动, 文献 [12] 提出了一种自适应耦合控制器, 可在线估计系统不确定参数; 文献 [13] 利用级联规范型的系统模型提出了一种滑模控制器, 但其未考虑可能存在的外界干扰, 仅将系统中的部分非线性项虚构成外界干扰, 而且其对不确定干扰的假设较为苛刻。除上述几种控制方法外, 针对 TORA 系统的控制方法还

有基于无源性的控制<sup>[14-16]</sup>、输出反馈控制<sup>[17-20]</sup>、基于反步法的控制<sup>[21-22]</sup>等其他一些控制方法<sup>[23-26]</sup>。

针对实际应用中的机械系统, 其不可避免地会受到参数不确定性和外部扰动的影响, 特别地, 对于 TORA 系统而言亦是如此。众所周知, 滑模控制技术对于外部扰动和未建模动态具有很强的鲁棒性, 但对于欠驱动 TORA 系统而言, 应用该方法的主要难点在于如何构造一个合适的滑模面, 将可直接驱动变量和不可直接驱动变量融合于滑模面中。不同于全驱动系统, 受制于 TORA 系统的欠驱动特性, 由于滑模面包含不同的状态变量, 增加了滑模面上系统状态收敛性分析的难度。目前为止, 已有研究人员对 TORA 系统的滑模控制展开了研究, 如文献 [13] 所提滑模控制器, 虽然对外界干扰具有鲁棒性, 但其假设条件较为保守, 且其鲁棒性仅存在于滑动模态阶段无法保证闭环系统在响应的全过程均具有鲁棒性。

鉴于上述原因, 本文考虑了存在外部扰动的欠驱动 TORA 系统的控制问题, 首次提出了一种具有全程滑动模态的滑模控制器, 使系统在响应的全过程都具有鲁棒性。相比现有基于反步控制技术所设计的控制方法, 本文所提方法结构更为简单; 相比已有滑模控制方法, 本文方法放宽了对外部扰动的假设条件, 克服了现有滑模控制方法在控制过程中到达模态不具有鲁棒性的不足。具体而言, 首先对系统模型进行一系列变换, 得到一种等价的无量纲化级联型系统模型, 并在此基础上针对内环子系统设计一种虚拟的控制输入; 随后, 根据所设计的虚拟控制输入对级联型系统模型进行进一步变换, 构造了一种新颖的滑模面, 并根据所构造的滑模面设计了相应的滑模控制器; 最后, 通过严格的数学分析证明了闭环系统关于平衡点的全局渐近稳定性及对外界干扰的全局鲁棒性, 借助数值仿真验证了本文所提方法的有效性及鲁棒性, 并与现有文献中的 4 种典型的控制方法进行了对比, 结果表明本文所提方法不仅具有更优越的控制效果, 而且对外界不确定扰动具有较强的鲁棒性。此外, 本文给出了一种避免系统抖振的方法, 通过与不连续的情况进行对比, 表明替代方法不仅可消除不连续滑模变结构控制的抖振现象, 而且仍具有良好的控制效果和较强的鲁棒性。

## 2 系统模型

本文考虑如图 1 所示的欠驱动 TORA 系统, 通过 Euler-Lagrange 方法建模可得 TORA 系统的动力学模型, 其具体表达式如下<sup>[10, 25]</sup>:

$$(M+m)\ddot{x} + me(\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + kx = 0, \quad (1)$$

$$me\ddot{x}\cos\theta + (me^2 + I)\ddot{\theta} = N + d, \quad (2)$$

其中:  $M$  表示平移振荡小车的质量, 其通过一个劲度

系数为  $k$  的弹簧连接于固定端上;  $x(t)$  表示平移振荡小车偏移平衡点位置的位移;  $m$  为旋转小球的质量, 其在输入转矩  $N(t)$  的作用下, 可在水平面内作旋转运动;  $e$  为旋转小球的转动半径;  $\theta(t)$  代表小球的旋转角度;  $I$  为小球关于其质心的转动惯量,  $d(t)$  表示系统可能受到的外界不确定干扰, 包括未建模动态、摩擦、扰动等不确定因素. 在实际应用中, 不确定外界干扰具有如下上界<sup>1</sup>:

$$|d(t)| \leq \bar{d}, \quad (3)$$

其中  $\bar{d} \in \mathbb{R}^+$  表示外界不确定性外界干扰  $d(t)$  的上限值. 该基准系统的控制目标为当平移振荡小车偏离平衡位置或系统受到外界干扰时, 在输入转矩  $N(t)$  的作用下, 通过旋转小球的来回转动将偏离平衡位置的小车镇定至平衡位置或消除外界不确定干扰.

为便于随后的控制器设计和稳定性分析, 在此, 引入如下无量纲状态变量:

$$x_n = \sqrt{\frac{M+m}{I+me^2}}x, \tau = \sqrt{\frac{k}{M+m}}t, \quad (4)$$

$$u = \frac{M+m}{k(I+me^2)}N, d_n = \frac{M+m}{k(I+me^2)}d, \quad (5)$$

$$\theta_n = \theta, \epsilon = \frac{me}{\sqrt{(M+m)(I+me^2)}}, \quad (6)$$

其中:  $x_n(\tau)$  表示无量纲化的小车位移;  $u(\tau), d_n(\tau)$  分别为无量纲化的控制力矩和外界干扰;  $\tau$  为无量纲化的时间变量<sup>2</sup>; 平移振荡和旋转运动之间的耦合关系由辅助参数  $\epsilon$  表示. 根据所引入的无量纲状态变量, 可将 TORA 系统的系统模型(1)–(2)改写为如下形式:

$$\ddot{x}_n + x_n - \epsilon(\dot{\theta}_n^2 \sin \theta_n - \ddot{\theta}_n \cos \theta_n) = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{\theta}_n + \epsilon \ddot{x}_n \cos \theta_n = u + d_n. \quad (8)$$

由式(3)和式(6)可知无量纲化的外界干扰满足如下条件:

$$|d_n| = \frac{M+m}{k(I+me^2)}|d| \leq \frac{M+m}{k(I+me^2)}\bar{d} = \bar{d}_n, \quad (9)$$

其中  $\bar{d}_n \in \mathbb{R}^+$  表示无量纲化外界干扰  $d_n(\tau)$  的上界.

为将 TORA 系统模型(7)–(8)化为级联形式模型, 引入如下变换变量:

$$\begin{cases} \chi_1 = x_n + \epsilon \sin \theta_n, \\ \chi_2 = \dot{x}_n + \epsilon \dot{\theta}_n \cos \theta_n, \\ z_1 = \theta_n, z_2 = \dot{\theta}_n. \end{cases} \quad (10)$$

如前所述, 本文的控制目标是将系统状态变量调节至平衡点位置, 即点

$$[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (11)$$

<sup>1</sup>相比已有滑模控制方法对外界不确定因素的假设条件, 本文方法放宽了对外界不确定因素的假设, 更具一般性, 更加符合实际的应用环境.

<sup>2</sup>在随后的分析中, 如无特殊说明, 均以  $\tau$  为时间常数.

从式(10)可知该控制目标(11)等价于

$$[\chi_1 \ \chi_2 \ z_1 \ z_2]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (12)$$

因此, 可通过设计  $u(\tau)$  使得

$$\chi_1, \chi_2, z_1, z_2 \rightarrow 0 \quad (13)$$

来实现本文的控制目标. 因此, 根据式(10)所给变换变量可将无量纲化的系统模型(7)–(8)变换为如下级联形式:

$$\dot{\chi}_1 = \chi_2, \quad (14)$$

$$\dot{\chi}_2 = -\chi_1 + \epsilon \sin z_1, \quad (15)$$

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (16)$$

$$\dot{z}_2 = v, \quad (17)$$

其中  $v(\tau)$  为辅助变量, 其与控制转矩  $u(\tau)$  的关系如下:

$$v = \frac{\epsilon \cos z_1 [\chi_1 - (1 + z_2^2)\epsilon \sin z_1] + u + d_n}{1 - \epsilon^2 \cos^2 z_1}. \quad (18)$$

接下来将利用所得的等价模型(14)–(17)进行随后的控制器设计和稳定性分析.

**注 1** 由于 TORA 系统与倒立摆、球杆系统、杂技机器人、桥式吊车、船用吊车、塔式吊车、飞行器吊运系统等其他欠驱动系统有着类似的结构和性质. 因此, 本文所提方法经适当变换后有望能解决类似欠驱动系统的控制问题.

### 3 主要结果

在本节, 将根据前面所得级联形式的等价模型对 TORA 系统设计一种全局滑模控制器, 并通过严格的理论分析证明在其控制作用下, 系统能达到期望的控制目标, 且整个闭环系统具有全局鲁棒性.

#### 3.1 控制器设计

为了达到上述目标, 首先基于反步法的控制思想, 将  $z_1(\tau)$  看作内环子系统(14)–(15)的控制输入, 设计一个理想的虚拟控制输入信号  $z_{1d}(\tau)$  实现内环子系统的镇定控制. 为此, 令该虚拟控制输入为

$$z_{1d} = -\arctan(\alpha \chi_2), \quad (19)$$

其中  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  是一个正的控制参数. 通过分析可知, 虚拟控制输入  $z_{1d}(\tau)$  可实现对内动态的镇定控制, 对于该性质会在接下来的稳定性分析部分给出.

考虑到  $z_{1d}(\tau)$  是一个虚拟的控制输入量, 其与  $z_1(\tau)$  之间的偏差表示为

$$\xi_1 := z_1 - z_{1d} = z_1 + \arctan(\alpha \chi_2), \quad (20)$$

易得其关于时间的一、二阶导数分别为

$$\dot{\xi}_2 := \dot{\xi}_1 = z_2 - \dot{z}_{1d}, \quad (21)$$

$$\xi_3 := \dot{\xi}_2 = \dot{z}_2 - \ddot{z}_{1d} = v - \ddot{z}_{1d}, \quad (22)$$

其中  $\dot{z}_{1d}(\tau)$  和  $\ddot{z}_{1d}(\tau)$  的具体表达式如下:

$$\dot{z}_{1d} = \alpha \frac{\chi_1 - \epsilon \sin z_1}{1 + (\alpha \chi_2)^2}, \quad (23)$$

$$\ddot{z}_{1d} = \alpha \frac{\chi_2 - \epsilon z_2 \cos z_1}{1 + (\alpha \chi_2)^2} + \alpha^3 \frac{2\chi_2(\chi_1 - \epsilon \sin z_1)^2}{(1 + (\alpha \chi_2)^2)^2}. \quad (24)$$

利用式(18)(20)–(22)可将等价模型(14)–(17)写为如下形式:

$$\dot{\chi}_1 = \chi_2, \quad (25)$$

$$\dot{\chi}_2 = -\chi_1 + \epsilon \sin(\xi_1 + z_{1d}), \quad (26)$$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad (27)$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\varrho_1 + u + d_n}{\varrho_2} - \ddot{z}_{1d}, \quad (28)$$

其中  $\varrho_1(\tau)$  和  $\varrho_2(\tau)$  是辅助变量<sup>3</sup>, 其具体表达式分别为如下表达式:

$$\varrho_1 = \epsilon \cos z_1 [\chi_1 - (1 + z_2^2) \epsilon \sin z_1], \quad (29)$$

$$\varrho_2 = 1 - \epsilon^2 \cos^2 z_1. \quad (30)$$

由式(19)–(21)可知

$$\chi_1, \chi_2, z_1, z_2 \rightarrow 0 \iff \chi_1, \chi_2, \xi_1, \xi_2 \rightarrow 0. \quad (31)$$

鉴于此, 在此根据所得级联形式模型(25)–(28)构造如下滑模面  $s(\tau)$ :

$$s(\tau) := \xi_2(\tau) - \xi_2(0) - \int_0^\tau \psi(\omega) d\omega. \quad (32)$$

辅助变量  $\psi(\tau)$  的具体表达式为

$$\psi = -\beta \xi_2 - \gamma \xi_1, \quad (33)$$

其中  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$  均是正的常数, 其选取需使得多项式  $z^2 + \beta z + \gamma = 0$  为 Hurwitz 多项式 ( $z$  为复变量).

根据系统模型(25)–(28)及所引入的滑模面(32), 提出如下滑模控制器:

$$u = -k_s \operatorname{sgn} s - k_\varsigma s - \varrho_1 + \varrho_2(\ddot{z}_{1d} + \psi), \quad (34)$$

其中:  $\operatorname{sgn} *$  表示符号函数,  $k_s, k_\varsigma \in \mathbb{R}^+$  均为正的控制增益, 且  $k_s$  的选取需满足如下条件:

$$\kappa_s \geq \bar{d}_n. \quad (35)$$

### 3.2 稳定性分析

在这一部分, 将通过3个定理证明在所提滑模控制器作用下, 可保证系统状态始终处于  $s(\tau) = 0$  上, 且全部系统状态随着时间的推移最终趋于平衡点位置.

**定理1** 对于存在外界不确定干扰的TORA系统, 在非线性滑模控制器(34)作用下, 保证系统状态  $\chi_1(\tau), \chi_2(\tau), \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)$  将始终保持在  $s(\tau) = 0$ .

**证** 首先, 由所定义的滑模面(32)可知其初始时刻的值

$$s(0) = \xi_2(0) - \xi_2(0) - \int_0^0 \psi(\omega) d\omega \equiv 0, \quad (36)$$

式(36)表明在初始时刻系统状态处于  $s(\tau) = 0$  上.

接下来, 为证明该定理, 选取如下非负函数:

$$V_s(\tau) = \frac{1}{2} s^2. \quad (37)$$

对式(37)进行求导, 并利用式(28)(32)及所提滑模控制器(34)进行整理可得

$$\dot{V}_s(\tau) = \frac{-k_\varsigma s^2 - k_s |s| + s d_n}{\varrho_2}. \quad (38)$$

由于  $k_s \geq \bar{d}_n \geq |d_n(\tau)|$ , 因此有如下结论:

$$\begin{aligned} \dot{V}_s(\tau) &= \frac{-k_\varsigma s^2 - k_s |s| + s d_n}{\varrho_2} \leq \\ &\leq \frac{-k_\varsigma s^2 - |s|(k_s - \bar{d}_n)}{\varrho_2} \leq \frac{-k_\varsigma s^2}{\varrho_2} \leq 0, \end{aligned} \quad (39)$$

表明  $V_s(\tau)$  为一个非增函数, 且

$$V_s \in \mathcal{L}_\infty \implies s \in \mathcal{L}_\infty \implies \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{L}_\infty. \quad (40)$$

由式(36)可知  $V_s(0) = 0$ , 结合上述结论  $V_s(\tau)$  为非增函数, 因此有如下结论:

$$V_s = 0, \forall \tau \geq 0. \quad (41)$$

结合其表达式(37)可进一步得出

$$s = \dot{s} = 0, \forall \tau \geq 0. \quad (42)$$

至此, 定理1得证. 证毕.

**注2** 不同于传统的滑模控制方法, 本文所提方法具有全程滑动模态, 即不存在到达运动阶段, 使系统在响应的全过程均具有鲁棒性, 克服了传统滑模控制中到达模态不具有鲁棒性的特点.

**定理2** 当系统状态变量  $\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)$  保持在  $s(\tau) = 0$  上时, 它们将渐近收敛于平衡点位置, 即

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\xi_1 \ \xi_2]^T = [0 \ 0]^T. \quad (43)$$

**证** 由定理1结论可知

$$\dot{s}(\tau) = 0, \forall \tau \geq 0. \quad (44)$$

结合式(32)和式(33)可得如下结论:

$$\dot{\xi}_2 - \psi = \ddot{\xi}_1 + \beta \dot{\xi}_1 + \gamma \xi_1. \quad (45)$$

由于多项式  $z^2 + \beta z + \gamma = 0$  是一个 Hurwitz 多项式, 易得  $\xi$ -子系统(27)–(28)关于平衡点位置全局渐近稳定, 故随时间推移, 状态变量  $\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)$  将趋近于平衡点位置, 即

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\xi_1 \ \xi_2]^T = [0 \ 0]^T. \quad (46)$$

因此, 定理2得证. 证毕.

<sup>3</sup>由参数  $\epsilon$  的具体表达式(6)可知  $0 < \epsilon < 1$ , 因此可知辅助变量  $\varrho_2(\tau) > 0, \forall \tau \geq 0$ .

**定理3** 当 $\xi_1(\tau) = 0$ 时, 由 $z_{1d}(\tau)$ 作为控制输入的闭环 $\chi$ -子系统关于其平衡点是全局渐近稳定的, 系统状态将渐近收敛于平衡点位置, 即

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\chi_1 \ \chi_2]^T = [0 \ 0]^T. \quad (47)$$

证 由定理2结论可知, 在本文所提控制器作用下, 系统状态 $\xi_1(\tau)$ 最终收敛于零点, 此时

$$z_1 = z_{1d} = -\arctan(\alpha \chi_2). \quad (48)$$

$\chi$ -子系统(25)–(26)变为

$$\dot{\chi}_1 = \chi_2, \quad (49)$$

$$\dot{\chi}_2 = -\chi_1 + \epsilon \sin z_{1d}. \quad (50)$$

为分析闭环 $\chi$ -子系统的稳定性, 选取如下Lyapunov函数:

$$V_\chi(\tau) = \frac{1}{2}\chi_1^2 + \frac{1}{2}\chi_2^2. \quad (51)$$

对式(51)进行求导, 并利用式(49)–(50)及虚拟控制输入 $z_{1d}(\tau)$ 表达式(48)对结果表达式进行整理可得

$$\dot{V}_\chi(\tau) = -\chi_2 \epsilon \sin[\arctan(\alpha \chi_2)] \leqslant 0, \quad (52)$$

表明闭环 $\chi$ -子系统是Lyapunov意义下稳定的, 且

$$V_\chi \in \mathcal{L}_\infty \implies \chi_1, \chi_2, z_{1d} \in \mathcal{L}_\infty. \quad (53)$$

为完成定理证明, 定义如下不变集:

$$\Phi = \{(\chi_1, \chi_2) \mid \dot{V}_\chi(\tau) = 0\}, \quad (54)$$

基于式(54), 可知在不变集 $\Phi$ 中, 有

$$\chi_2 = 0 \implies \dot{\chi}_2 = 0. \quad (55)$$

结合式(48)和式(49)可得

$$\dot{\chi}_1 = 0, z_{1d} = 0. \quad (56)$$

进一步联立式(50)可知

$$\chi_1 = 0. \quad (57)$$

综合上述分析可知, 在不变集 $\Phi$ 中仅包含唯一平衡点

$$[\chi_1 \ \chi_2]^T = [0 \ 0]^T. \quad (58)$$

由LaSalle不变集原理<sup>[27]</sup>可知, 当 $\xi_1(\tau) = 0$ 时, 闭环 $\chi$ -子系统关于平衡点 $[0 \ 0]^T$ 是全局渐近稳定的.

证毕.

对于系统(25)–(28), 显然,  $\chi$ -子系统(25)–(26)等式右边是全局Lipschitz的. 此外, 由上述分析可知, 闭环 $\chi$ -子系统和闭环 $\xi$ -子系统关于平衡点均是全局渐近稳定的. 因此, 根据文献[28]中定理6.2可得整个闭环系统(25)–(28)关于平衡点是全局渐近稳定的, 即

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\chi_1 \ \chi_2 \ \xi_1 \ \xi_2]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (59)$$

结合式(11)–(12)与式(31)中结论, 可知式(59)等价于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (60)$$

即, 在本文所提非线性滑模控制器(34)作用下, 系统状

态最终渐近收敛于平衡点位置.

## 4 仿真结果与分析

为了检验本文所提非线性滑模控制器的控制性能, 接下来将在MATLAB/Simulink环境中进行数值仿真测试, 并给出一系列的仿真测试结果. 在随后的仿真测试中, 将选取无量纲系统模型(7)–(8)作为仿真模型, 系统参数 $\epsilon$ 选取为0.2. 为了更好地体现所提方法优越的控制性能, 本文选取文献[10]所提的基于无源性的控制方法和基于级联型系统模型的控制方法、文献[14]所提基于输出反馈的饱和约束控制方法、文献[12]所提自适应耦合控制方法进行对比, 其具体表达式如下:

1) 基于无源性的控制方法:

$$u_p = k_0 \epsilon x_n \cos z_1 - k_1 z_1 - k_2 z_2, \quad (61)$$

其中 $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ 为正的控制增益, 其值选取文献[10]所给参数, 分别为

$$k_0 = 10, k_1 = 1, k_2 = 0.5.$$

2) 基于级联型模型的控制方法:

$$u_c = -\varrho_1 + \varrho_2(-k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 + \ddot{z}_{1d}), \quad (62)$$

其中 $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ 为正的控制增益, 其值经调试后选取为

$$k_1 = 1, k_2 = 2.4.$$

3) 基于输出反馈的饱和约束控制方法:

$$u_o = -k_2 \tanh(z_c + bz_1) - k_1 \tanh z_1, \quad (63)$$

$$\dot{z}_c = -ak_2 \tanh(z_c + bz_1),$$

其中:  $k_1, k_2, a, b \in \mathbb{R}^+$ 为正的控制增益,  $z_c$ 为辅助函数, 控制增益值分别选取为

$$k_1 = 0.035, k_2 = 0.018, a = 550, b = 4.5.$$

4) 自适应耦合控制方法:

$$u_p = -k_1 z_1 - k_2 z_2 - \hat{\omega} x_n \cos z_1, \quad (64)$$

$$\dot{\hat{\omega}} = \text{Proj}(\tau_1 z_2 x_n \cos z_1),$$

其中:  $\text{Proj}(*)$ 为投影算子(具体表达式见参考文献[12]),  $k_1, k_2, \tau_1 \in \mathbb{R}^+$ 为正的控制增益, 其值分别选取为

$$k_1 = 1, k_2 = 0.6, \tau = 1.8.$$

仿真测试将分3部分进行, 分别在无干扰情形下和存在外界干扰时, 将已有方法的控制性能与本文方法的控制性能进行对比. 在第3部分, 为了消除抖振, 使用 $\tanh(20s)$ 替代本文所提滑模控制器(34)中的符号函数 $\text{sgn } s$ , 并对其仿真测试结果进行对比分析. 在仿真测试中, 本文所提滑模控制器的控制参数分别设置如下:

$$k_s = 1.1, k_c = 0.2, \alpha = 2.4, \beta = 2.4, \gamma = 1.$$

#### 4.1 无干扰对比测试

该部分检验不存在外界不确定因素时本文方法的控制性能，并与基于无源性方法(61)、基于级联型模型方法(62)、基于输出反馈的饱和约束控制方法(63)和自适应耦合控制方法(64)进行对比，选取系统的初始状态为

$$[x_n(0) \quad \dot{x}_n(0) \quad \theta_n(0) \quad \dot{\theta}_n(0)]^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

图2~5分别给出了5种控制方法作用下平移振荡小车和旋转小球随时间变化的仿真测试结果。当平移振荡小车偏离平衡点位置时，随着时间的推移5种控制方法最终均可将平移振荡小车及旋转小球镇定至目标位置。从图2和图3平移振荡小车随时间变化的曲线可知，相比之下，本文所提非线性滑模控制方法的暂态性能优于其他4种现有的控制方法，能够更快地将平移振荡小车镇定至平衡点位置。从图4旋球小球随时间变化的曲线可知，在本文所提方法作用下，旋转小球的旋转幅值介于基于无源性的控制方法(61)和基于级联型模型的控制方法(62)之间，但本文方法的控制效果优于这两种方法，使得旋转小球更快地进入稳定状态，避免旋转小球来回振荡。同样，从图5旋球小球随时间变化的曲线可知，相比基于输出反馈的饱和约束控制方法(63)和自适应耦合控制方法(64)，本文所提控制方法的控制效果更好。

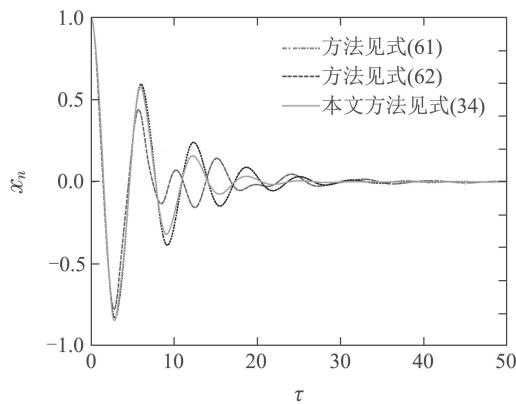


图2 小车位移仿真结果

Fig. 2 Simulation results of the cart position

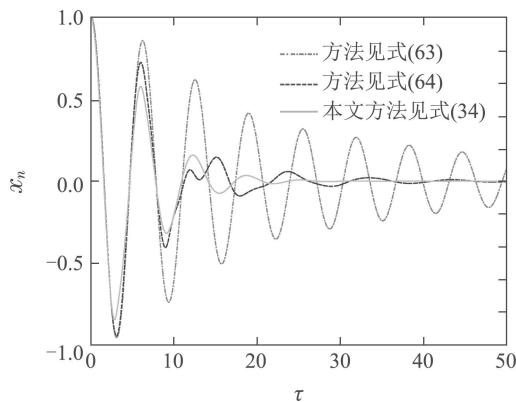


图3 小车位移仿真结果

Fig. 3 Simulation results of the cart position

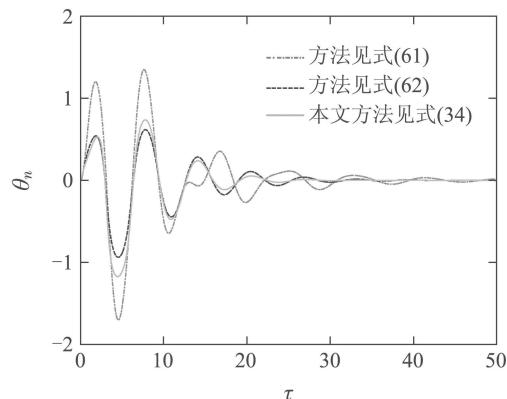


图4 小球旋转角度仿真结果

Fig. 4 Simulation results of the rotational angle

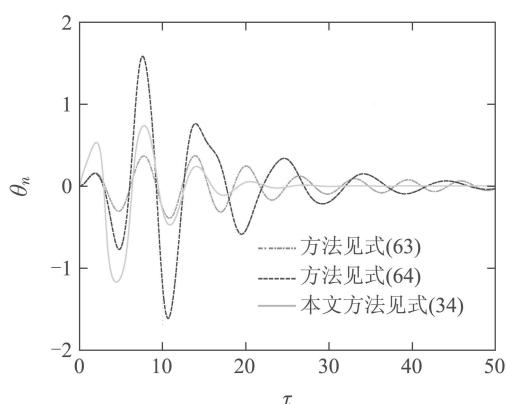


图5 小球旋转角度仿真结果

Fig. 5 Simulation results of the rotational angle

#### 4.2 鲁棒性测试

为了进一步验证本文所提方法对外界干扰良好的鲁棒性，在控制过程中通过添加两种不同的干扰，对5种方法的鲁棒性进行了对比。该部分系统的初始状态选取为

$$[x_n(0) \quad \dot{x}_n(0) \quad \theta_n(0) \quad \dot{\theta}_n(0)]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

并在区间6至6.2之间添加幅值为1的阶跃干扰，在区间20至30之间添加幅值为1的随机干扰。

存在外界不确定因素情形时，图6~9分别给出了平移振荡小车和旋转小球在5种控制方法作用下随时间变化的曲线。观察图6~9可知，在所提控制方法作用下，平移振荡小车和旋转小车几乎未偏离平衡点位置，闭环系统对外界不确定干扰表现出较强的鲁棒性。相比之下，在其他4种方法作用下，平移振荡小车和旋转小车均偏离了平衡点位置，且经历相当长时间，平移振荡小车和旋转小车仍存在振荡现象。特别地，对于基于输出反馈的饱和约束控制方法(63)，其在PD控制器的基础上考虑系统无速度反馈和饱和约束情形，影响了闭环系统的暂态性能和稳定性，导致其鲁棒性降低。本结果表明本文方法对外界不确定性的鲁棒性优于其他4种现有方法。

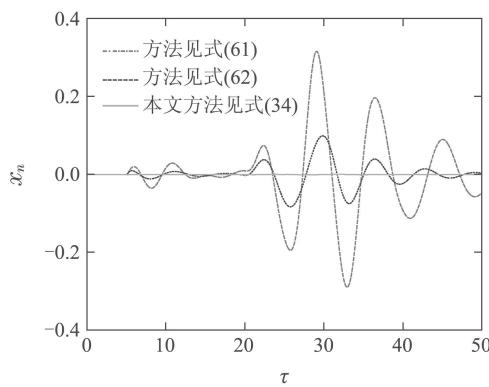


图 6 小车位移仿真结果

Fig. 6 Simulation results of the cart position

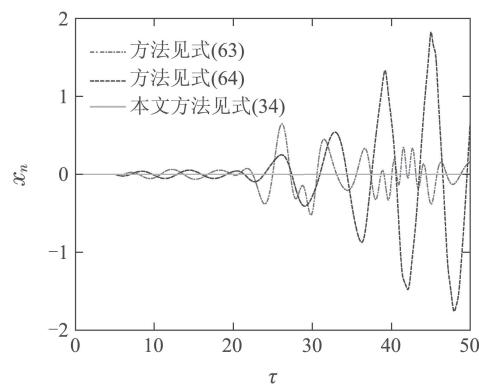


图 7 小车位移仿真结果

Fig. 7 Simulation results of the cart position

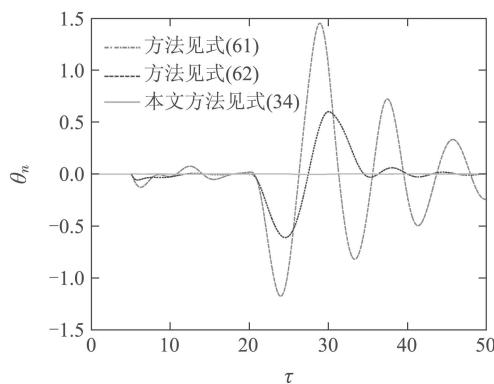


图 8 小球旋转角度仿真结果

Fig. 8 Simulation results of the rotational angle

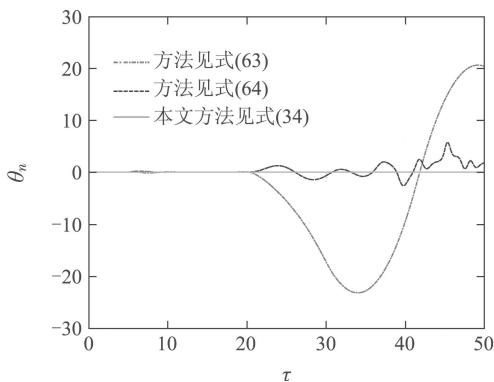


图 9 小球旋转角度仿真结果

Fig. 9 Simulation results of the rotational angle

### 4.3 消除抖振测试

众所周知,滑模变结构控制方法对外界干扰的鲁棒性比一般的连续控制方法强.然而,滑模控制方法的不连续开关特性会引起系统的抖振.该部分使用  $\tanh(20s)$  替代控制器中的符号函数项  $\text{sgn } s$  以避免控制过程中的抖振现象,通过仿真测试对比两种情况的控制性能.在此分两种情形进行对比测试,第1组选取第4.1节测试条件,第2组选取第4.2节测试条件.

相应的仿真测试结果如图10–15所示.由图10–11可知,当平移振荡小车偏离平衡点位置时,两种情况均可将其镇定至目标位置.对比两种情况的仿真测试结果可知,使用  $\tanh(20s)$  替代控制器中的符号函数项  $\text{sgn } s$ , 闭环系统的暂态性能、稳态性能、稳定性以及对外界干扰的鲁棒性几乎完全不受影响.观察图12和图15可发现,使用符号函数  $\text{sgn } s$  的闭环系统控制输入存在严重的抖振现象,而使用  $\tanh(20s)$  可避免抖振现象.本结果表明本文方法使用  $\tanh(20s)$  替代控制器中符号函数  $\text{sgn } s$  不仅可消除不连续滑模变结构控制的抖振现象,而且仍具有良好的控制效果.

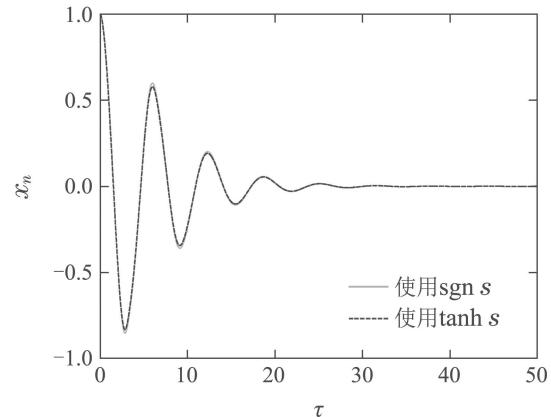


图 10 小车位移仿真结果

Fig. 10 Simulation results of the cart position

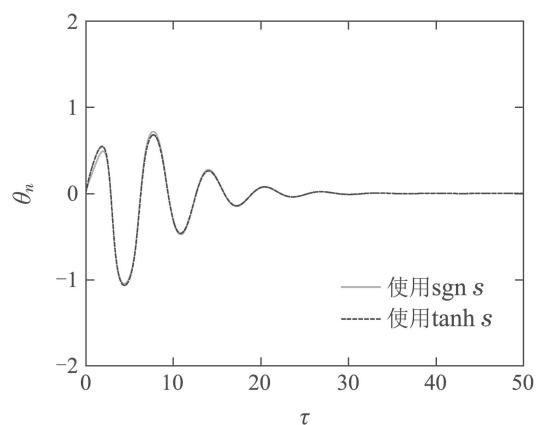


图 11 小球旋转角度仿真结果

Fig. 11 Simulation results of the rotational angle

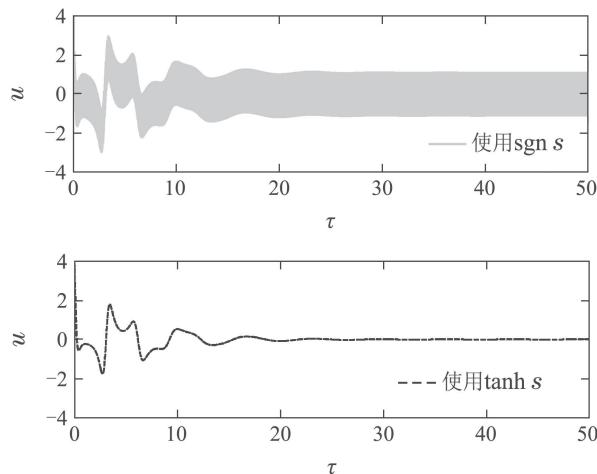


图 12 控制输入仿真结果

Fig. 12 Simulation results of the control input

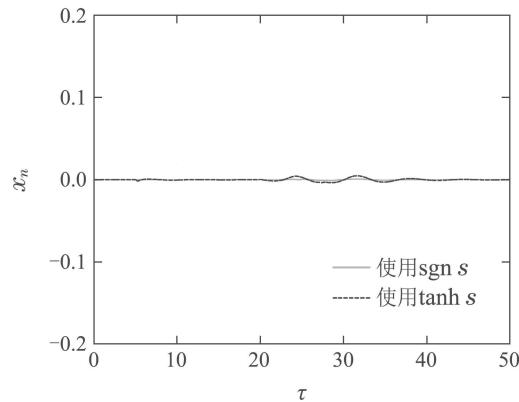


图 13 小车位移仿真结果

Fig. 13 Simulation results of the cart position

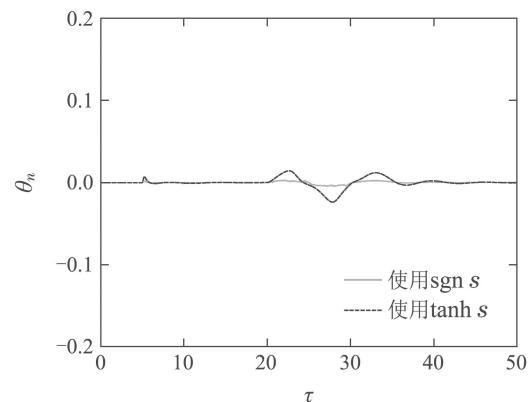


图 14 小球旋转角度仿真结果

Fig. 14 Simulation results of the rotational angle

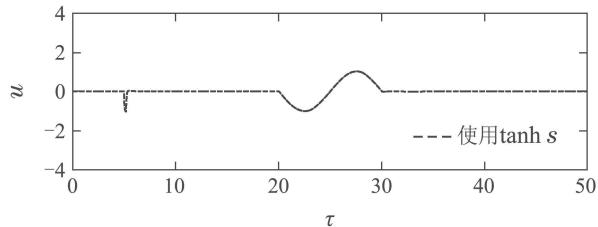
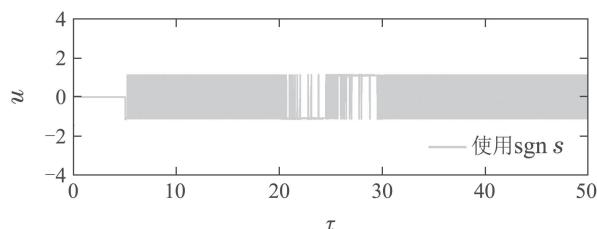


图 15 控制输入仿真结果

Fig. 15 Simulation results of the control input

## 5 结论

本文针对存在外界扰动的欠驱动TORA系统,提出了一种具有全局鲁棒性的非线性滑模控制器,不仅实现了闭环系统的全局镇定控制目标,而且克服了现有滑模控制方法局部鲁棒性的不足,使得整个控制过程均具有鲁棒性。具体而言,首先通过一系列变量变换将系统模型变换为级联形式的系统模型。随后,在此基础上,进行了控制器设计和稳定性分析。最后,通过数值仿真测试与已有控制方法进行比较,结果表明本文方法表现出更好的控制效果和更强的鲁棒性。在后续工作中,笔者将致力于将智能型滑模控制、高阶滑模控制、连续滑模控制等方法用于解决欠驱动TORA系统的控制问题和提升TORA系统的暂态性能,并搭建TORA系统实验平台,以对所提控制方法的实际控制性能进行实验验证。

## 参考文献:

- [1] RAND R H, KINSEY R J, MINGORI D L. Dynamics of spinup through resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1992, 27(3): 489 – 502.
- [2] WU X, HE X. Nonlinear energy-based regulation control of three dimensional overhead cranes. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2017, 39(12): 1763 – 1770.
- [3] WU X, HE X. Enhanced damping-based anti-swing control method for underactuated overhead cranes. *IET Control Theory and Applications*, 2015, 9(12): 1893 – 1900.
- [4] SUN Ning, FANG Yongchun, CHEN He. Antiswing tracking control for underactuated bridge cranes. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(3): 326 – 333.  
(孙宁, 方勇纯, 陈鹤. 欠驱动桥式吊车消摆跟踪控制. 控制理论与应用, 2015, 32(3): 326 – 333.)
- [5] LU B, FANG Y, SUN N, et al. Antiswing control of offshore boom cranes with ship roll disturbances. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, 26(2): 740 – 747.
- [6] SUN N, FANG Y, CHEN H, et al. Slew/translation positioning and swing suppression for 4-DOF tower cranes with parametric uncertainties: design and hardware experimentation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(10): 6407 – 6418.
- [7] HORIBE T, SAKAMOTO N. Nonlinear optimal control for swing up and stabilization of the Acrobot via stable manifold approach: theory and experiment. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018: 1 – 14. DOI: 10.1109/TCST.2018.2865762.
- [8] SHIRIAEV A, POGROMSKY A, LUDVIGSEN H, et al. On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2000, 10(4): 283 – 300.

- [9] AGUILAR-IBAÑEZ C. The Lyapunov direct method for the stabilisation of the ball on the actuated beam. *International Journal of Control*, 2009, 82(12): 2169 – 2178.
- [10] JANKOVIC M, FONTAINE D, KOKOTOVIC P V. TORA example: Cascade- and passivity-based control designs. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1996, 4(3): 292 – 297.
- [11] GUO W, LIU D. Nonlinear dynamic surface control for the underactuated translational oscillator with rotating actuator system. *IEEE Access*, 2019, 7: 11844 – 11853.
- [12] WU Xianqing, HE Xiongxiong. Adaptive coupling controller design for underactuated RTAC systems. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(5): 1047 – 1052.  
(武宪青, 何熊熊. 欠驱动RTAC系统的自适应耦合控制器设计. 自动化学报, 2015, 41(5): 1047 – 1052.)
- [13] XU R, ÖZGÜNER Ü. Sliding mode control of a class of underactuated systems. *Automatica*, 2008, 44(1): 233 – 241.
- [14] WU X, GU M. Adaptive control of the TORA system with partial state constraint. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2019, 41(4): 1172 – 1177.
- [15] GAO B, BAO Y, XIE J, et al. Passivity-based control of two-dimensional translational oscillator with rotational actuator. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2014, 36(1): 111 – 118.
- [16] WU Xianqing, HE Xiongxiong. Constrained control for the underactuated benchmark system. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(12): 1692 – 1697.  
(武宪青, 何熊熊. 欠驱动基准系统的约束控制. 控制理论与应用, 2015, 32(12): 1692 – 1697.)
- [17] SUN N, WU Y, FANG Y, et al. Nonlinear stabilization control of multiple-RTAC systems subject to amplitude-restricted actuating torques using only angular position feedback. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(4): 3084 – 3094.
- [18] KARAGIANNIS D, JIANG Z P, ORTEGA R, et al. Output-feedback stabilization of a class of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems. *Automatica*, 2005, 41(9): 1609 – 1615.
- [19] CALANI F. Output regulation for the TORA benchmark via rotational position feedback. *Automatica*, 2011, 47(3): 584 – 590.
- [20] XU Qingyuan, YANG Zhi, FAN Zhengping, et al. A combination feedback system of nonlinear observer and energy-based control. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(1): 31 – 36.  
(许清媛, 杨智, 范正平, 等. 一种非线性观测器和能量结合的反馈控制系统. 控制理论与应用, 2011, 28(1): 31 – 36.)
- [21] LEE C H, CHANG S K. Experimental implementation of nonlinear TORA system and adaptive backstepping controller design. *Neural Computing and Applications*, 2012, 21(4): 785 – 800.
- [22] GUO Weiping, LIU Diantong, LI Shuai. Nonlinear recursive control TORA system. *Acta Electronica Sinica*, 2013, 41(11): 2252 – 2255.  
(郭卫平, 刘殿通, 李帅. 非线性递推控制 TORA 系统. 电子学报, 2013, 41(11): 2252 – 2255.)
- [23] QUAN Q, CAI K Y. Additive-state-decomposition-based tracking control for TORA benchmark. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(20): 4829 – 4841.
- [24] QUAN Q, CAI K Y, LIN H. Additive-state-decomposition-based tracking control framework for a class of nonminimum phase systems with measurable nonlinearities and unknown disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(2): 163 – 178.
- [25] ZHANG Yu, GUO Yuanbo, LI Luyu, et al. Nonsingular controller for TORA system based on maximal feedback linearization. *Control and Decision*, 2018, 33(8): 1415 – 1421.  
(张宇, 郭源博, 李芦钰, 等. 基于最大反馈线性化的TORA系统非奇异镇定控制. 控制与决策, 2018, 33(8): 1415 – 1421.)
- [26] AVIS J M, NERSESOV S G, NATHAN R. Decentralised energy-based hybrid control for the multi-RTAC system. *International Journal of Control*, 2010, 83(8): 1701 – 1709.
- [27] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [28] SUSSMANN H J, KOKOTOVIC P V. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(4): 424 – 440.

### 作者简介:

- 武宪青 讲师, 主要研究方向为欠驱动系统控制, 包括桥式吊车系统控制、TORA系统控制等, E-mail: wxq@zstu.edu.cn;
- 张益波 副教授, 主要研究方向为滑模控制、自适应控制等, E-mail: zhangy41@163.com.