一类耦合分数阶反应–扩散系统的边界控制

庄 波[1,2†], 崔宝同[1,2], 陈 娟[3]

(1. 江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122;

2. 江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122;

3. 塔林理工大学 计算机系统系, 爱沙尼亚 塔林 19086)

摘要: 针对带有空间变化的反应项的耦合分数阶反应–扩散系统边界镇定问题, 利用反步法设计了用于Robin边界条件的状态反馈控制. 通过可逆的积分变换将原耦合系统转化为一个稳定的目标系统. 利用变量代换和逐次逼近法分析了核函数矩阵的存在唯一性. 借助分数阶Lyapunov直接法证明了闭环系统的Mittag-Leffler稳定性. 数值仿真验证了所提出方法的有效性.

关键词: 边界控制; 反步法; 反应–扩散系统; 分数阶; 分布参数系统

引用格式: 庄波, 崔宝同, 陈娟. 一类耦合分数阶反应–扩散系统的边界控制. 控制理论与应用, 2020, 37(3): 592 – 602

DOI: 10.7641/CTA.2019.90061

Boundary control for a class of coupled fractional reaction-diffusion systems

ZHUANG Bo[1,2†], CUI Bao-tong[1,2], CHEN Juan[3]

(1. The Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education), Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;

2. The School of IoT Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;

3. Department of Computer Systems, Tallinn University of Technology, Tallinn 19086, Estonia)

Abstract: The problem of boundary stabilization is considered for a class of coupled fractional reaction-diffusion systems with spatially varying reactions, and a state feedback control for Robin boundary conditions is designed by the backstepping method. The original coupled system is transformed into a stable target system through a reversible integral transformation. The existence and uniqueness of the kernel function matrix is analyzed by using variable substitution and the method of successive approximations. The Mittag-Leffer stability of the close-loop system is proved by the the fractional Lyapunov direct method. Numerical simulations verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: boundary control; backstepping; reaction-diffusion systems; fractional order; distributed parameter systems

Citation: ZHUANG Bo, CUI Baotong, CHEN Juan. Boundary control for a class of coupled fractional reaction-diffusion systems. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(3): 592 – 602

1 引言

反常扩散是一种具有时间非线性的扩散系统[1], 通常用分数阶微积分描述, 由此产生的分数阶反应–扩散系统(fractional reaction-diffusion systems, FRDS)[2–3]成为重要的研究对象. 最近几年, FRDS边界控制问题引起了研究者的关注[4–9]. 受经典(整数阶)反应扩散系统(reaction-diffusion systems, RDS)边界控制[10–11]的启发, Ge等[4]基于反步法研究了具有Dirichlet和Neumann边界的FRDS边界控制问题. 随后, Chen等[5]研究了Robin和混合边界条件下FRDS的边界反馈镇定问题, 后又考虑了带有空间依赖扩散系数的情形[6]. Zhou等[7]利用Riesz基和分数阶Lyapunov方法研究了不稳定的FRDS的边界镇定问题. 相关结果还被推广到FRDS带有观测器的输出反馈控制[8]和事件触发控制[9]等.

在包含多个分量的(F)RDS中, 各分量在扩散的同

收稿日期: 2019–01–25; 录用日期: 2019–08–12.

†通信作者. E-mail: bozhuang@jiangnan.edu.cn.

本文责任编委: 郭宝珠.

国家自然科学基金项目(61807016, 61174021), 高等学校学科创新引智计划项目(B12018), 江苏省研究生科研创新计划项目(KYLX15–1170)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61807016, 61174021), the 111 Project (B12018) and the Postgraduate Innovation Project of Jiangsu Province (KYLX15–1170).

时发生反应并相互转化, 形成耦合(F)RDS. 近年来, 许多学者对整数阶耦合RDS的边界控制问题进行了深入研究[12–16]. 这些研究同样利用了反步控制方法[10–11]. 相关研究对象从常系数耦合RDS[12, 14]推广到系数随空间变化(空间依赖)的情形[15–16], 并进一步扩展到对流反应扩散方程[15]和偏积分微分方程[16]. 控制方法也从状态反馈控制[12, 15–16]发展到带有观测器的输出反馈控制[13–14]. 其中, Baccoli等[12]将基于反步法的边界控制方法[10]应用于常系数耦合RDS, 针对扩散系数相同和相异两种情况分别设计了使系统稳定的边界控制器, 并得到了核函数矩阵的级数解. 随后, Vazquez等[15]研究了系数随空间变化的耦合RDS边界控制问题. 在此基础上, 最近, Ge等[17]利用反步法研究了具有空间依赖参数的耦合分数阶半线性系统镇定问题, 通过基于观测器的输出反馈控制, 实现了闭环系统的Mittag-Leffler稳定性[18–19]. 其中通过假设核函数矩阵为对角阵, 获得了核函数矩阵的解析解, 但同时对控制器参数的选择提出了较高的要求. 总的来说, 对耦合分数阶系统边界控制的研究还很少, 很多问题有待深入研究.

鉴于以上考虑, 本文针对具有空间依赖反应项系数的耦合FRDS, 设计基于反步法的状态反馈控制器(Robin边界反馈控制器), 并借助分数阶Lyapunov方法证明闭环系统的Mittag-Leffler稳定性. 最后, 利用数值方法直接求解核函数矩阵方程, 得到控制增益, 并通过数值仿真验证本文的理论结果.

2　数学模型和问题描述

考虑n个分量之间存在耦合反应项构成的分数阶反应–扩散系统

$$
\begin{aligned}
&{}_0^CD_t^\alpha Z(x,t) = AZ_{xx}(x,t) + \Phi(x)Z(x,t),\\
&\qquad\qquad (x,t)\in(0,1)\times(0,\infty), \qquad \text{(1a)}\\
&Z(x,0) = Z_0(x),\ x\in[0,1], \qquad \text{(1b)}
\end{aligned}
$$

其中

$$Z(x,t) = [z_1(x,t)\ \ \cdots\ \ z_n(x,t)]^{\mathrm T}\in[L_2(0,1)]^n$$

为系统状态. 这里$L_2(0,1)$表示所有的平方可积函数$z(x,t), x\in[0,1], t\in[0,\infty)$组成的Hilbert空间, 其范数定义为

$$\|z(x,t)\| := \Big(\int_0^1 z^2(x,t)\,\mathrm dx\Big)^{\frac12}.$$

$[L_2(0,1)]^n$为n个$L_2(0,1)$空间的直积空间, 其范数定义为

$$\|Z(x,t)\|_{2,n} := \Big(\sum_{i=1}^n \|z_i(x,t)\|^2\Big)^{\frac12}.$$

Caputo时间分数阶导数${}_0^CD_t^\alpha(\cdot)$定义为[20]

$${}_0^CD_t^\alpha z(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha}\frac{\partial z(x,\tau)}{\partial\tau}\,\mathrm d\tau,$$

其中阶次$\alpha\in(0,1)$为给定常数, $\Gamma(\cdot)$为Gamma函数, $x\in(0,1), t\in(0,\infty)$. 扩散系数矩阵$A=aI\in\mathbb R^{n\times n}$, $a>0$为常数, I为适当维数的单位阵. 耦合反应项系数(矩阵)

$$\Phi(x) = [\phi_{ij}(x)]_{n\times n}\in[C^1[0,1]]^{n\times n},$$

其中: $\phi_{ij}(x)\in C^1[0,1]$表示系统状态分量$z_j(x,t)$对$z_i(x,t)$的耦合作用, $i,j=1,\cdots,n$. $Z(x,0)=Z_0(x)\in[L_2(0,1)]^n$表示非零的系统初值. 系统(1)具有Robin边界条件

$$
\begin{aligned}
&Z_x(0,t) - BZ(0,t) = 0,\ t>0, \qquad \text{(2a)}\\
&Z_x(1,t) + DZ(1,t) = U(t),\ t>0, \qquad \text{(2b)}
\end{aligned}
$$

其中: $n\times n$矩阵$B=bI, D=dI; b>0, d>0$均为常数; $U(t)=[u_1(t)\ \ \cdots\ \ u_n(t)]^{\mathrm T}\in\mathbb R^n$表示作用于系统边界上的控制输入; 开环条件下($U(t)=0$), 耦合反应项$\Phi(x)Z(x,t)$可导致系统(1)–(2)不稳定[4, 12]. 本文利用反步法[11]研究该系统的稳定问题.

考虑积分变换

$$W(x,t) = Z(x,t) + \int_0^x K(x,y)Z(y,t)\mathrm dy, \qquad (3)$$

其中$K(x,y)=[k_{ij}(x,y)]_{n\times n}$为增益核函数矩阵. 适当选取增益核函数矩阵$K(x,y)$可将原系统(1)–(2)转换为目标系统

$$
\begin{aligned}
&{}_0^CD_t^\alpha W(x,t) = AW_{xx}(x,t) - CW(x,t),\\
&\qquad\qquad (x,t)\in(0,1)\times(0,\infty), \qquad \text{(4a)}\\
&W(x,0) = W_0(x),\ x\in[0,1] \qquad \text{(4b)}
\end{aligned}
$$

及边界条件

$$
\begin{aligned}
&W_x(0,t) - B^{\mathrm s}W(0,t) = 0,\ t>0, \qquad \text{(5a)}\\
&W_x(1,t) + D^{\mathrm s}W(1,t) = 0,\ t>0, \qquad \text{(5b)}
\end{aligned}
$$

其中:

$$W(x,t) = [w_1(x,t)\ \ \cdots\ \ w_n(x,t)]^{\mathrm T}\in[L_2(0,1)]^n$$

为目标系统状态, 矩阵$C\in\mathbb R^{n\times n}$为设计参数, 且系统初值

$$W_0(x) = Z_0(x) + \int_0^x K(x,y)Z_0(y)\mathrm dy.$$

矩阵$B^{\mathrm s}=b^{\mathrm s}I, D^{\mathrm s}=d^{\mathrm s}I$, 其中$b^{\mathrm s}, d^{\mathrm s}>0$均为常数. 本文的目标是适当选取矩阵$C$以保证系统(4)–(5)是稳定的, 从而得到闭环稳定的系统(1)–(2).

为进一步讨论上述分数阶系统的稳定性, 首先引入Mittag-Leffler稳定性的定义.

定义 1 (Mittag-Leffler稳定性[18–19].)　系统

$${}_0^CD_t^\alpha z(t) = f(t,z) \qquad (6)$$

的解被称为Mittag-Leffler稳定的, 如果

$$\|z(t)\| \leqslant \big(m[z(t_0)]E_\alpha(-\rho(t-t_0)^\alpha)\big)^b,$$

其中: t_0为初始时刻, $\alpha\in(0,1), \rho>0, b>0, m(0)=0, m(z)\geqslant 0$, 并且$m(z)$在$z\in\mathbb R^n$上关于$z$满足局部

Lipschitz条件, Lipschitz常数为m_0, E_α为Mittag-Leffler函数

$$E_\alpha(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k\alpha+1)},\ \forall\alpha>0,\ t\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

注 1 由定义1, 当$t\to\infty$时, $E_\alpha(-\rho(t-t_0)^\alpha)\to 0$. 这意味着$\lim\limits_{t\to\infty}\|z(t)\|=0$, 因此系统(6)是渐近稳定的, 从而也是Lyapunov稳定的[5,21]. Mittag-Leffler函数$E_\alpha(t)$在分数阶系统的稳定性中发挥了极其重要的作用, 因此, Mittag-Leffler稳定性也被称作分数阶Lyapunov稳定性.

3 边界控制

根据变换(3)和边界条件(5b)可得边界反馈控制

$$U(t)=(D-D^{\rm s}-K(1,1))Z(1,t)-\int_0^1(K_x(1,y)+D^{\rm s}K(1,y))Z(y,t){\rm d}y,\ t>0, \tag{8}$$

其中$K_x(1,y)=K_x(x,y)|_{x=1}$. 可见, 要得到具体的边界控制(8), 需要求解核函数矩阵$K(x,y)$.

3.1 核函数矩阵方程

对积分变换(3)两边取α阶Caputo时间分数阶导数, 并利用分部积分, 可得

$$\begin{aligned}
&{}_0^CD_t^\alpha W(x,t)=\\
&AZ_{xx}(x,t)+\Phi(x)Z(x,t)+\\
&\int_0^x K(x,y)(AZ_{yy}(y,t)+\Phi(y)Z(y,t)){\rm d}y=\\
&AZ_{xx}(x,t)+\Phi(x)Z(x,t)+K(x,x)AZ_x(x,t)-\\
&K(x,0)AZ_x(0,t)-K_y(x,x)AZ(x,t)+\\
&K_y(x,0)AZ(0,t)+\int_0^x K_{yy}(x,y)AZ(y,t){\rm d}y+\\
&\int_0^x K(x,y)\Phi(y)Z(y,t){\rm d}y.
\end{aligned} \tag{9}$$

利用Leibniz微分法则

$$\frac{\rm d}{{\rm d}x}\int_0^x f(x,y){\rm d}y=f(x,x)+\int_0^x f_x(x,y){\rm d}y,$$

由积分变换(3)对x求导数, 得到

$$\begin{aligned}W_x(x,t)=&Z_x(x,t)+K(x,x)Z(x,t)+\\&\int_0^x K_x(x,y)Z(y,t){\rm d}y.\end{aligned} \tag{10}$$

将式(10)再次对x求导, 并引入记号

$$\frac{\rm d}{{\rm d}x}K(x,x)=K_x(x,x)+K_y(x,x),$$

且

$$K_x(x,x)=\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)|_{y=x},$$
$$K_y(x,x)=\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)|_{y=x},$$

可得

$$\begin{aligned}W_{xx}=&Z_{xx}(x,t)+\frac{\rm d}{{\rm d}x}K(x,x)Z(x,t)+\\&K(x,x)Z_x(x,t)+K_x(x,x)Z(x,t)+\\&\int_0^x K_{xx}(x,y)Z(y,t){\rm d}y.\end{aligned} \tag{11}$$

根据式(9)(11)并利用边界条件(2a), 可得

$$\begin{aligned}
&{}_0^CD_t^\alpha W(x,t)-AW_{xx}(x,t)+CW(x,t)=\\
&\big(\Phi(x)+C-AK_x(x,x)-K_y(x,x)A-\\
&A\frac{\rm d}{{\rm d}x}K(x,x)\big)Z(x,t)+\\
&\int_0^x\big(K_{yy}(x,y)A-AK_{xx}(x,y)+\\
&K(x,y)\Phi(y)+CK(x,y)\big)Z(y,t){\rm d}y+\\
&\big(K(x,x)A-AK(x,x)\big)Z_x(x,t)+\\
&\big(K_y(x,0)A-K(x,0)AB\big)Z(0,t).
\end{aligned} \tag{12}$$

显然, 系统(4a)要求式(12)对任意的$Z(x,t)$恒等于零. 于是, 再由$A=aI$, $B=bI$, $B^{\rm s}=b^{\rm s}I$, 可导出核函数矩阵$K(x,y)$, $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$, 应满足以下偏微分方程(partial differential equation, PDE):

$$\begin{aligned}&K_{xx}(x,y)-K_{yy}(x,y)=\\&\frac{1}{a}\big(K(x,y)\Phi(y)+CK(x,y)\big),\end{aligned} \tag{13a}$$

$$2a\frac{\rm d}{{\rm d}x}K(x,x)=\Phi(x)+C, \tag{13b}$$

$$K_y(x,0)=bK(x,0). \tag{13c}$$

根据式(3)(10), 结合边界条件(2a)和条件(5a), 可知系统初值$K(0,0)=B^{\rm s}-B=(b^{\rm s}-b)I$.

关于核函数矩阵方程(13)的适定性, 有以下结果:

引理 1 设$\Phi(x)\in[C^1[0,1]]^{n\times n}$, 则核函数矩阵PDE(13)具有唯一解, 该解有界且在$0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$上二次连续可微.

引理1的证明可参考文献[5,12]的证明方法(详见附录).

注 2 本文受文献[12]的启发, 将文献[5]中的核函数PDE及其适定性推广到耦合FRDS, 核函数从标量推广到矩阵形式. 对比文献[12], 本文中核函数PDE(13)是由分数阶系统和Robin边界控制导出的, 并且耦合反应项系数$\Phi(x)$是空间依赖的, 同时包含$K(0,0)\neq 0$的情形. 当$\Phi(x)=\Phi$为常数矩阵且$K(0,0)=0$, $B^{\rm s}=B=0$, $D^{\rm s}=D=0$时, 核函数PDE(13)退化到文献[12]中Neumann边界控制的形式, 其级数解为[12]

$$K(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{(x^2-y^2)^i(2x)}{i!(i+1)!(4a)^{i+1}}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}C^j(\Phi+C)\Phi^{i-j}\Big),$$

其中$0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$. 若同时满足$\Phi C=C\Phi$, 则有

$$K(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x^2-y^2)^i(2x)}{i!(i+1)!}\Big(\frac{\Phi+C}{4a}\Big)^{i+1},$$

其中$0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$.

3.2 Mittag-Leffler稳定性

首先给出Caputo分数阶动态系统平衡点的定义.

定义 2 (平衡点[19]) 常数z_0是Caputo分数阶动

态系统${}_0^CD_t^\alpha z(t)=f(t,z)$的平衡点, 当且仅当$f(t,z_0)=0$.

由定义2可知, $Z(x,\cdot)=0$是系统(1a)的平衡点.

为讨论系统(4)–(5)的稳定性, 先给出两个引理.

引理 2[22] 若$z(t)\in\mathbb{R}$是连续且可微函数, 对任意时刻$t\geqslant 0$, 有

$$\frac{1}{2}{}_0^CD_t^\alpha z^2(t)\leqslant z(t){}_0^CD_t^\alpha z(t),\ 0<\alpha<1.$$

引理 3 对任意的$x\in(0,1)$, 函数$W(x,t)$在$t\in[0,\infty)$上是连续可微的.

证 采用文献[5]类似的方法证明. 因为$Z(x,t)$满足方程(1)和Caputo时间分数阶导数, 可知$Z(x,t)$在$t\in[0,\infty)$上连续且可微. 由此经过积分变换(3)可得$W(x,t)$在$t\in[0,\infty)$上连续可微. 又因为$W(x,t)$满足方程(9), 根据Caputo时间分数阶导数的定义[20]可知$W(x,t)$在$t\in[0,\infty)$上也是连续可微的. 证毕.

下面用$H^1(0,1)$表示所有标量函数$z(x,t)$组成的Sobolev空间, $x\in[0,1]$, $t\geqslant 0$, 其范数定义为

$$\|z(x,t)\|_{H^1}=(z^2(0,t)+z^2(1,t)+\int_0^1 z_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}.$$

$[H^1(0,1)]^n$是n个$H^1(0,1)$空间的直积, 其范数定义为

$$\|Z(x,t)\|_{H^{1,n}}:=\big(\sum_{i=1}^n\|z_i\|_{H^1}^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

对任意方阵A, 记$S[A]:=\dfrac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}$为其对称部分.

关于目标系统(4)–(5)的稳定性, 有以下结果:

定理 1 若$S[C]$为正定矩阵, 则系统(4)–(5)满足

i) 在空间$[L^2(0,1)]^n$上是Mittag-Leffler稳定的;

ii) 在空间$[H^1(0,1)]^n$上是Mittag-Leffler稳定的.

证 i) 考虑如下Lyapunov函数:

$$V_1(t,W(x,t))=\frac{1}{2}\int_0^1 W^{\mathrm{T}}(x,t)W(x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

应用引理2和系统(4)–(5), 可得

$$\begin{aligned}&{}_0^CD_t^\alpha V_1(t,W(x,t))=\\&\frac{1}{2}\int_0^1{}_0^CD_t^\alpha(\sum_{i=1}^n w_i^2(x,t))\,\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_0^1 W^{\mathrm{T}}(x,t){}_0^CD_t^\alpha W(x,t)\,\mathrm{d}x=\\&-W^{\mathrm{T}}(1,t)AD^{\mathrm{s}}W(1,t)-W^{\mathrm{T}}(0,t)AB^{\mathrm{s}}W(0,t)-\\&\int_0^1 W_x^{\mathrm{T}}(x,t)AW_x(x,t)\,\mathrm{d}x-\\&\int_0^1 W^{\mathrm{T}}(x,t)CW(x,t)\,\mathrm{d}x\leqslant\\&-ad^{\mathrm{s}}\|W(1,t)\|_{2,n}^2-ab^{\mathrm{s}}\|W(0,t)\|_{2,n}^2-\\&a\|W_x(x,t)\|_{2,n}^2-2\lambda_{\min}(S[C])V_1(t,W(x,t)),\end{aligned}$$

其中$\lambda_{\min}(S[C])$为$S[C]$的最小特征值. 再由$a>0$, $b^{\mathrm{s}}>0$, $d^{\mathrm{s}}>0$和式(14), 最后得到

$${}_0^CD_t^\alpha V_1(t,W(x,t))\leqslant-2\lambda_{\min}(S[C])V_1(t,W(x,t)). \tag{15}$$

根据引理3可知$W(x,t)$在$t\in[0,\infty)$上是连续可微的, 因此$V(t,W(x,t))$也是连续可微的. 基于文献[18]的证明, 针对不等式(15)取非负函数$R(t)$, 有

$$\begin{aligned}&{}_0^CD_t^\alpha V_1(t,W(x,t))+R(t)=\\&-2\lambda_{\min}(S[C])V_1(t,W(x,t)).\end{aligned} \tag{16}$$

因为$W^{\mathrm{T}}(\cdot,t)W(\cdot,t)$的Laplace变换存在, 所以$V_1(t,W(x,t))$和$R(t)$关于$t$的Laplace变换也存在. 于是, 对式(16)进行Laplace变换, 得到

$$s^\alpha V_1(s)-s^{\alpha-1}V_1(0)+R(s)=-2\lambda_{\min}(S[C])V_1(s), \tag{17}$$

其中:

$$V_1(0)=\frac{1}{2}\int_0^1 W^{\mathrm{T}}(x,0)W(x,0)\,\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

$V_1(s)=\mathscr{L}\{V_1(t,W(x,t))\}$和$R(s)=\mathscr{L}\{R(t)\}$分别是$V_1(x,W(x,t))$和$R(t)$的Laplace变换. 由等式(17)可得

$$V_1(s)=\frac{s^{\alpha-1}V(0)-R(s)}{s^\alpha+2\lambda_{\min}(S[C])}. \tag{18}$$

由式(14), 显然$V_1(t,W(x,t))$关于$W(x,t)$满足局部Lipschitz条件. 其满足分数阶微分方程的解存在唯一性定理[23]. 进而$V_1(s)$的Laplace逆变换, 也是方程(16)的唯一解, 可表示为

$$\begin{aligned}V_1(t)=\;&V_1(0)E_\alpha(-2\lambda_{\min}(S[C])t^\alpha)-\\&R(t)*[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-2\lambda_{\min}(S[C])t^\alpha)],\end{aligned}$$

其中: $t>0$, $E_{\alpha,\alpha}(t):=\sum\limits_{k=0}^\infty\dfrac{t^k}{\Gamma((k+1)\alpha)}$, 符号“$*$”为卷积运算符. 显然, 对任意$\alpha\in(0,1)$, $\lambda>0$, 总有$t^{\alpha-1}>0$, $E_{\alpha,\alpha}(-2\lambda t^\alpha)>0$, 故有

$$V_1(t)\leqslant V_1(0)E_\alpha(-2\lambda_{\min}(S[C])t^\alpha). \tag{19}$$

根据不等式(19)可知

$$\|W(x,t)\|_{2,n}\leqslant\big(2V_1(0)E_\alpha(-2\lambda_{\min}(S[C])t^\alpha)\big)^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

其中: $V_1(0)=V_1(0,W(x,0))>0$当$W(x,0)\neq 0$, 而$V_1(0)=0$当且仅当$W(x,0)=0$; 并且$V_1(t,W(x,t))$关于$W(x,t)$满足了局部Lipschitz条件, 故$V_1(0)$关于$W(x,0)$也满足局部Lipschitz条件, 当$W(x,0)=0$时$V_1(0)=0$. 根据定义1, 系统(4)–(5)是Mittag-Leffler稳定的, 结论i)得证.

ii) 下面证明目标系统(4)–(5)在$[H^1(0,1)]^n$空间上Mittag-Leffler稳定. 定义Lyapunov函数如下:

$$V_2(t,W(x,t))=$$

$$\int_0^1 W_x^{\mathrm{T}}(x,t)W_x(x,t)\,\mathrm{d}x+$$
$$b^{\mathrm{s}}W^{\mathrm{T}}(0,t)W(0,t)+d^{\mathrm{s}}W^{\mathrm{T}}(1,t)W(1,t). \tag{21}$$

应用引理2, 可得

$$\begin{aligned}&{}_0^CD_t^\alpha V_2(t,W(x,t))=\\&\int_0^1 {}_0^CD_t^\alpha(\sum_{i=1}^n w_{ix}^2(x,t))\,\mathrm{d}x+\\&b^{\mathrm{s}}{}_0^CD_t^\alpha(\sum_{i=1}^n w_i^2(0,t))+d^{\mathrm{s}}{}_0^CD_t^\alpha(\sum_{i=1}^n w_i^2(1,t))\leqslant\\&2\int_0^1 W_x^{\mathrm{T}}(x,t){}_0^CD_t^\alpha W_x(x,t)\,\mathrm{d}x+2b^{\mathrm{s}}W^{\mathrm{T}}(0,t)\times\\&{}_0^CD_t^\alpha W(0,t)+2d^{\mathrm{s}}W^{\mathrm{T}}(1,t){}_0^CD_t^\alpha W(1,t).\end{aligned} \tag{22}$$

用$W_{xx}(x,t)$乘以式(4a)并利用分部积分从0到1积分, 然后代入边界条件(5a)和(5b), 可以得到

$$\begin{aligned}&\int_0^1 W_{xx}^{\mathrm{T}}(x,t){}_0^CD_t^\alpha W(x,t)\,\mathrm{d}x=\\&-d^{\mathrm{s}}W^{\mathrm{T}}(1,t){}_0^CD_t^\alpha W(1,t)-b^{\mathrm{s}}W^{\mathrm{T}}(0,t)\times\\&{}_0^CD_t^\alpha W(0,t)-\int_0^1 W_x^{\mathrm{T}}(x,t){}_0^CD_t^\alpha W_x(x,t)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{23}$$

将式(23)改写为

$$\begin{aligned}&\int_0^1 W_x^{\mathrm{T}}(x,t){}_0^CD_t^\alpha W_x(x,t)\,\mathrm{d}x=\\&-\int_0^1 W_{xx}^{\mathrm{T}}(x,t){}_0^CD_t^\alpha W(x,t)\,\mathrm{d}x-d^{\mathrm{s}}W^{\mathrm{T}}(1,t)\times\\&{}_0^CD_t^\alpha W(1,t)-b^{\mathrm{s}}W^{\mathrm{T}}(0,t){}_0^CD_t^\alpha W(0,t).\end{aligned} \tag{24}$$

因为$W(x,t)\in[H^1(0,1)]^n$满足状态方程(4a), 应用分部积分并代入边界条件(5a)和条件(5b), 可得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 W_{xx}^{\mathrm{T}}(x,t){}_0^CD_t^\alpha W(x,t)\,\mathrm{d}x=\\&a\int_0^1 W_{xx}^{\mathrm{T}}(x,t)W_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x+\\&d^{\mathrm{s}}W^{\mathrm{T}}(1,t)CW(1,t)+b^{\mathrm{s}}W^{\mathrm{T}}(0,t)CW(0,t)+\\&\int_0^1 W_x^{\mathrm{T}}(x,t)CW_x(x,t)\,\mathrm{d}x\geqslant\\&a\int_0^1 W_{xx}^{\mathrm{T}}(x,t)W_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x+\\&\lambda_{\min}(S[C])V_2(t,W(x,t)).\end{aligned} \tag{25}$$

将式(24)–(25)应用于不等式(22), 可得

$${}_0^CD_t^\alpha V_2(t,W(x,t))\leqslant-2\lambda_{\min}(S[C])V_2(t,W(x,t)). \tag{26}$$

应用与结论i)类似的证明方法, 由不等式(26)可得

$$V_2(t)\leqslant V_2(0)E_\alpha(-2\lambda_{\min}(S[C])t^\alpha),\ \forall t>0, \tag{27}$$

其中: $V_2(t)=V_2(t,W(x,t))$, $V_2(0)=V_2(0,W(x,0))$. 再由$V_2(t,W(x,t))$关于$W(x,t)$满足局部Lipschitz条件以及定义1, 可知目标系统(4)–(5)在$[H^1(0,1)]^n$空间上是Mittag-Leffler稳定的, 结论ii)得证. 证毕.

下面说明变换(3)是可逆的. 假设其逆变换为

$$Z(x,t)=W(x,t)-\int_0^x L(x,y)W(y,t)\mathrm{d}y. \tag{28}$$

采用导出核函数矩阵PDE(13)类似的方法, 可以得到以下PDE:

$$L_{xx}(x,y)-L_{yy}(x,y)=$$
$$-\frac{1}{a}\big(L(x,y)C+\varPhi(x)L(x,y)\big), \tag{29a}$$
$$2a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L(x,x)=\varPhi(x)+C, \tag{29b}$$
$$L_y(x,0)=b^{\mathrm{s}}L(x,0). \tag{29c}$$

根据初始条件(2a)(5a)及逆变换(28)可知初始条件为$L(0,0)=B-B^{\mathrm{s}}$. 对比方程(13)和方程(29), 若将$\varPhi$和C分别替换为$-C$和$-\varPhi$, 且令$b^{\mathrm{s}}=b$, 则可以得到$L(x,y)=-K(x,y)$. 若将两个方程的解分别记为

$$L(x,y):=L(x,y;C,\varPhi),\ K(x,y):=K(x,y;\varPhi,C),$$

容易验证, 代换

$$L(x,y;C,\varPhi)=-K(x,y;-\varPhi,-C).$$

将式(29)转换为式(13). 由此可知, 变换(3)是可逆的. 于是, 根据文献[24], 存在正常数β,γ使得

$$\begin{cases}\|Z(x,t)\|_{2,n}\leqslant\beta\|W(x,t)\|_{2,n},\\\|W(x,0)\|_{2,n}\leqslant\beta\|Z(x,0)\|_{2,n},\end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases}\|Z(x,t)\|_{H^{1,n}}\leqslant\gamma\|W(x,t)\|_{H^{1,n}},\\\|W(x,0)\|_{H^{1,n}}\leqslant\gamma\|Z(x,0)\|_{H^{1,n}}.\end{cases} \tag{31}$$

于是, 关于系统(1)–(2)的稳定性有以下结果:

定理 2 若存在矩阵C使$S[C]$正定, 那么, 在边界控制(8)作用下, 系统(1)–(2)有唯一解且其平衡点($Z(x,\cdot)=0$)在空间$[L_2(0,1)]^n$和$[H^1(0,1)]^n$上都是Mittag-Leffler稳定的, 其中$K(x,y)$由方程(13)的解给出.

证 首先利用反步法证明系统(1)–(2)解的存在唯一性. 根据积分变换(3)以及其逆变换(28)可知系统(4)–(5)与系统(1)–(2)是等价的. 故只需要证明目标系统(4)–(5)的解存在唯一. 考虑积分变换

$$W(x,t)=Q(x,t)+\int_0^x P(x,y)Q(y,t)\mathrm{d}y, \tag{32}$$

其中: 系统状态$Q(x,t)=[q_1(x,t)\ \ \cdots\ \ q_n(x,t)]^{\mathrm{T}}$; 核函数$P(x,y)=[p_{ij}(x,y)]_{n\times n}$, $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$, 满足方程

$$P_{xx}(x,y)-P_{yy}(x,y)=\frac{1}{a}CP(x,y)-\frac{1}{a}P(x,y)S,$$
$$P(x,x)=B^{\mathrm{s}}+\frac{1}{2a}(C-S)x,\ P_y(x,0)=0,$$

其中n阶方阵$S=sI$, $s>0$为常数. 于是, 根据文献[12], 上述核函数方程是适定的, 且变换(32)是可逆的. 利用该变换, 可将目标系统(4)–(5)变换为

$$\begin{aligned}&{}_0^CD_t^\alpha Q(x,t)=AQ_{xx}(x,t)-SQ(x,t),\\&Q_x(0,t)=Q_x(1,t)=0,\\&Q(x,0)=Q_0(x),\end{aligned}$$

即n个系统

$$ {}_0^C D_t^\alpha q_i(x,t) = a q_{i\mathrm{xx}}(x,t) - s q_i(x,t), \tag{33a}$$

$$ q_{i\mathrm{x}}(0,t) = q_{i\mathrm{x}}(1,t) = 0, \tag{33b}$$

$$ q_i(x,0) = q_{i0}(x), \tag{33c}$$

其中$i=1,\cdots,n$. 根据文献[7], 若$q_{i0}(x)\in L_2(0,1)$, $i=1,\cdots,n$, 每个系统(33a)–(33c)都具有唯一解. 因此, 目标系统(4)–(5)以及与之等价的系统(1)–(2)的解存在且唯一.

根据定理1可知系统(4)–(5)在$[L_2(0,1)]^n$空间上是稳定的, 且满足式(20), 即

$$\|W(x,t)\|_{2,n}^2 \leqslant \|W(x,0)\|_{2,n}^2 E_\alpha(-2\lambda_{\min}(S[C])t^\alpha).$$

结合不等式(30), 可得

$$\|Z(x,t)\|_{2,n}^2 \leqslant \beta^4 \|Z(x,0)\|_{2,n}^2 E_\alpha(-2\lambda_{\min}(S[C])t^\alpha),$$

其中: $x\in[0,1]$, $t\in[0,\infty)$. 根据定义1, 可知系统(1)–(2)在$[L_2(0,1)]^n$上是Mittag-Leffler稳定的.

类似地, 因为$W(x,t)\in[H^1(0,1)]^n$, 结合式(27)和不等式(31)可得

$$\|Z(x,t)\|_{H^{1,n}}^2 \leqslant T_2\|Z(x,0)\|_{H^{1,n}}^2 \times E_\alpha(-2\lambda_{\min}(S[C])t^\alpha),$$

其中:

$$T_2 = \frac{M}{m}\gamma^4,\ m=\min\{1,b^{\mathrm{s}},d^{\mathrm{s}}\},$$
$$M=\max\{1,b^{\mathrm{s}},d^{\mathrm{s}}\},\ x\in[0,1],\ t\in[0,\infty).$$

根据定义1可知系统(1)–(2)在$[H^1(0,1)]^n$上是Mittag-Leffler稳定的. 定理2结论得证.　　证毕.

注 3　定理2将文献[5]的结果推广到耦合的FRDS. 对比文献[12], 本文针对分数阶系统且具有空间依赖的耦合系数. 另外, Robin边界控制也使结果更具一般性, 因为当$B^{\mathrm{s}}=B=0$, $D^{\mathrm{s}}=D=0$时, 结论即退化为Neumann边界控制. 另外, 在文献[17]中, 假设核函数矩阵$K(x,y)$为对角阵, 在一定条件下得到核函数的解析解[10–11]. 本文无此约束, 针对多数无法求得解析解的情况均可采用数值解, 这也使得控制参数矩阵C的选取更加灵活(见仿真2).

最后, 针对可化为单一核函数的耦合FRDS边界控制问题给出一个算例.

例 1　若耦合FRDS(1)–(2)满足$\varPhi(x)=\phi(x)I+P$, 其中P为常数矩阵. 那么选取$C=cI-P$, 其中设计参数$c>\lambda_{\max}(S[P])$可使$S[C]$正定, 其中$\lambda_{\max}(S[P])$为$S[P]$的最大特征值. 令核函数矩阵$K(x,y)=I\times k(x,y)$, 记$\mu(\cdot):=\dfrac{1}{a}(\phi(\cdot)+c)$, 可将方程(13)化为$n$个相同的PDE

$$k_{xx}(x,y)-k_{yy}(x,y)=\mu(y)k(x,y), \tag{34a}$$

$$k(x,x)=k(0,0)+\frac{\mu(x)}{2}x, \tag{34b}$$

$$k_y(x,0)=bk(x,0), \tag{34c}$$

$$k(0,0)=b^{\mathrm{s}}-b. \tag{34d}$$

根据定理2可知, Robin边界控制

$$U(t)=-k(1,1)Z(1,t)-\int_0^1\big(k_x(1,y)+d^{\mathrm{s}}k(1,y)\big)Z(y,t)\mathrm{d}y \tag{35}$$

可使系统(1)–(2)Mittag-Leffler稳定, 其中核函数$k(1,y)$和$k_x(1,y)$可根据文献[10]给出的数值方法求解方程(34)得到. 特别地, 当$\phi(x)=0$, $b^{\mathrm{s}}=b$时, 取

$$c>\max\{0,\lambda_{\max}(S[P])\}.$$

根据文献[10], 可解得核函数

$$k(x,y)=\frac{-\mu b}{\sqrt{\mu+b^2}}\int_0^{x-y}\mathrm{e}^{-\frac{b\tau}{2}}\sinh(\frac{\sqrt{\mu+b^2}}{2}\tau)\times I_0\big(\sqrt{\mu(x+y)(x-y-\tau)}\big)\,\mathrm{d}\tau+\mu x\frac{I_1\big(\sqrt{\mu(x^2-y^2)}\big)}{\sqrt{\mu(x^2-y^2)}}, \tag{36}$$

其中$I_n(\cdot)$表示修正的n阶Bessel函数, 并且

$$k(1,y)=\frac{-\mu b}{\sqrt{\mu+b^2}}\int_0^{1-y}\mathrm{e}^{-\frac{b\tau}{2}}\sinh(\frac{\sqrt{\mu+b^2}}{2}\tau)\times I_0\big(\sqrt{\mu(1+y)(1-y-\tau)}\big)\,\mathrm{d}\tau+\mu\frac{I_1\big(\sqrt{\mu(1-y^2)}\big)}{\sqrt{\mu(1-y^2)}}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}k_x(1,y)=&-\frac{\mu b}{\sqrt{\mu+b^2}}(\mathrm{e}^{-\frac{b(1-y)}{2}}\sinh(\frac{\sqrt{\mu+b^2}}{2}(1-y))\times\\&I_0(0)+\int_0^{1-y}\mathrm{e}^{-\frac{b\tau}{2}}\sinh(\frac{\sqrt{\mu+b^2}}{2}\tau)\times\\&\frac{I_1(\sqrt{\mu(1+y)(1-y-\tau)})}{\sqrt{\mu(1+y)(1-y-\tau)}}(\mu-\frac{\mu\tau}{2})\,\mathrm{d}\tau)+\\&\frac{\mu}{\sqrt{\mu(1-y^2)}}I_1(\sqrt{\mu(1-y^2)})+\\&\frac{\mu}{1-y^2}I_2(\sqrt{\mu(1-y^2)}).\end{aligned} \tag{38}$$

4　数值仿真

本文采用有限差分法求解Caputo时间分数阶反应扩散方程[25]. 将时间域$[0,T]$和空间域$[0,L]$分别均匀划分为N和M个区间. 以下仿真中, 取

$$T=5,\ N=500,\ L=1,\ M=100.$$

系统参数取

$$\alpha=0.7,\ a=1,\ b=b^{\mathrm{s}}=1,\ d=d^{\mathrm{s}}=2.$$

4.1 仿真 1: 可化为单一核函数的情形

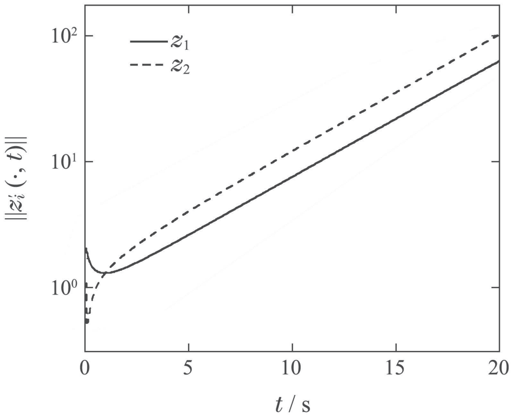
考虑包含两个 $(n=2)$ FRDS的耦合系统 (1)–(2), 耦合反应项系数矩阵

$$\varPhi(x)=\varPhi=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$$

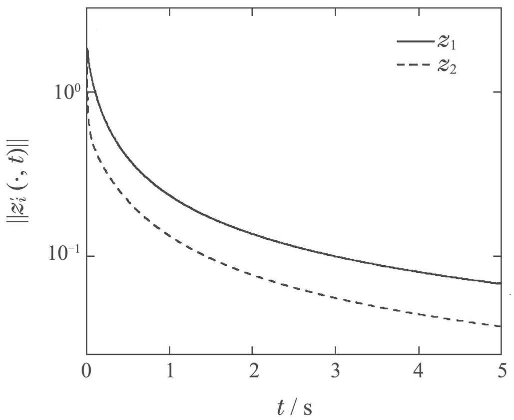
为常数矩阵. 系统初值为

$$z_1(x,0)=2+x(1-x),\ z_2(x,0)=2\cos(\pi x).$$

当没有控制输入($u_1(t)=u_2(t)=0$)时, 开环系统是不稳定的. 具体情形如图1–3所示.



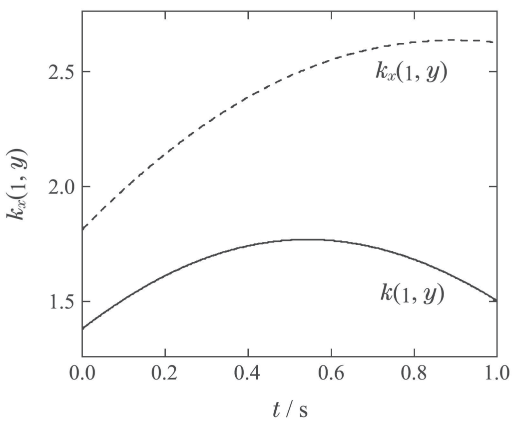
(a) 开环系统



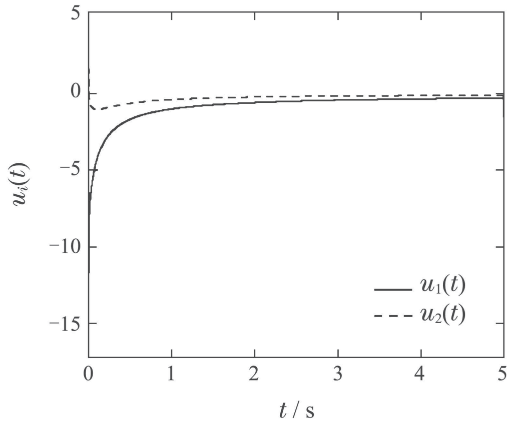
(b) 闭环系统

图 1 开环和闭环系统的状态L_2范数

Fig. 1 State L_2 norm of open-loop and close-loop systems



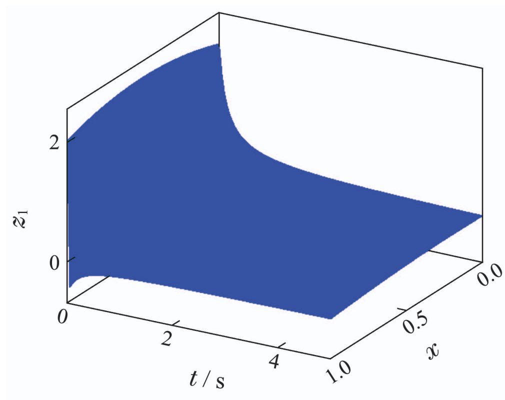
(a) 核函数$k(1,y)$和$k_x(1,y)$



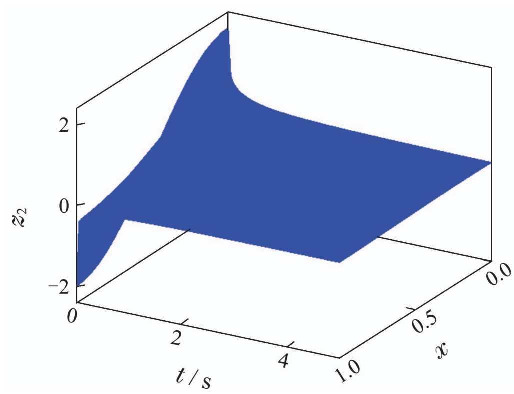
(b) 控制输入$U(t)$

图 2 核函数和控制输入

Fig. 2 Kernel function and control input



(a) 系统状态$z_1(x,t)$



(b) 系统状态$z_2(x,t)$

图 3 Robin边界控制作用下的系统状态

Fig. 3 System states with Robin boundary control

从图1(a)中可以看出, 开环系统的状态L_2范数是发散的. 采用边界控制器(35)(37)–(38), 取控制参数$c=3$, 可以得到

$$C=cI-\varPhi,\ \lambda_{\min}(S[C])=0.382>0,$$

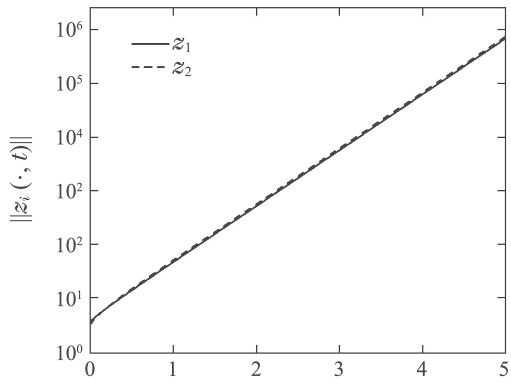
满足定理2条件. 根据例1可知核函数矩阵为$K(x,y)=k(x,y)I$, 其中$k(x,y)$由式(36)给出. 图2给出了核

函数和边界控制输入. 图1(b)显示闭环系统的状态L_2范数逐渐收敛到0, 图3进一步展示了两个耦合系统的时空状态演化. 从中可以看出, 本文提出的Robin边界控制可使被控系统Mittag-Leffler稳定.

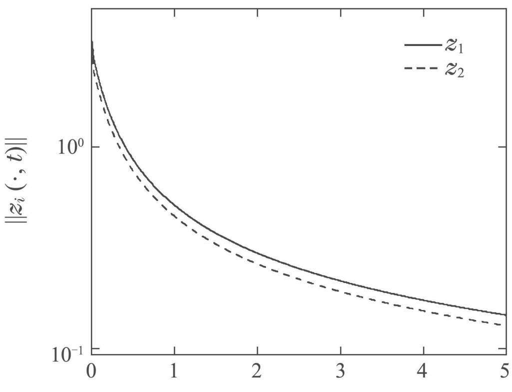
注 4　用式(37)–(38)计算$k(1,1)$和$k_x(1,1)$时, 为避免除数为零导致错误, 可分别用$k(1,1-10^{-15})$和$k_x(1,1-10^{-15})$代替. 从图2(a)可以看出两者在$y=1$处均是连续的.

4.2 仿真2: 非常系数耦合的情形

非常系数耦合的情形如图4–6所示.



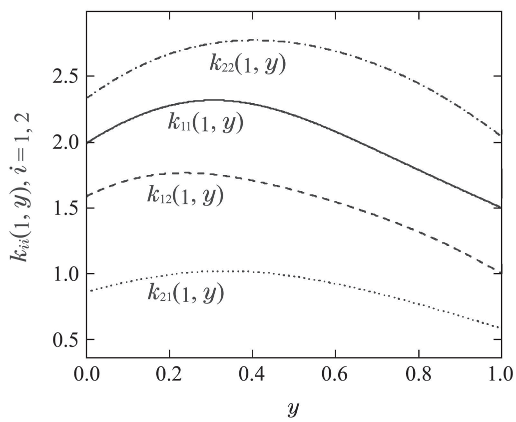
(a) 开环系统



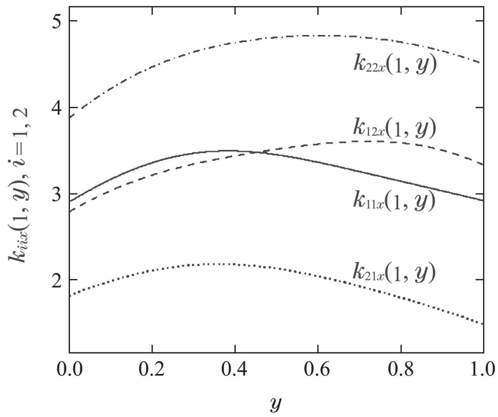
(b) 闭环系统

图 4 开环和闭环系统的状态L_2范数

Fig. 4 State L_2 norm of open-loop and close-loop systems



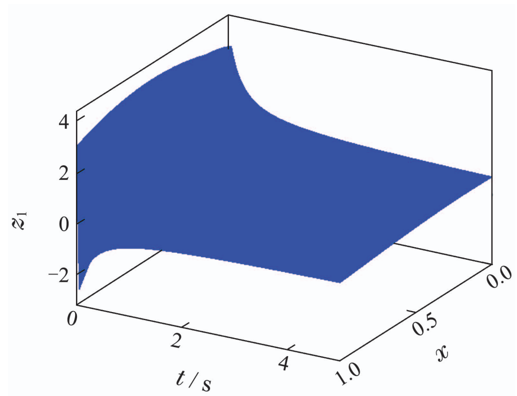
(a) $K(1,y)$



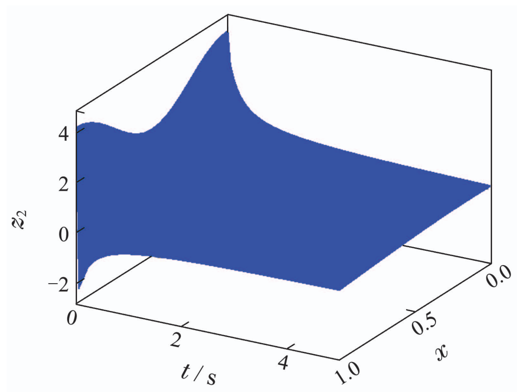
(b) $K_x(1,y)$

图 5 核函数

Fig. 5 Kernel functions



(a) 系统状态$z_1(x,t)$



(b) 系统状态$z_2(x,t)$

图 6 Robin边界控制作用下的系统状态

Fig. 6 System states with Robin boundary control

考虑由两个($n=2$)分数阶反应–扩散过程组成的耦合系统(1)–(2), 其中

$$\varPhi(x)=\begin{bmatrix}2+\sin(2\pi x) & 2+\cos(2\pi x)\\ 1+x(1-x) & 3+(x-\dfrac{1}{2})^2\end{bmatrix}.$$

系统初值为

$$z_1(x,0)=3+3x(1-x),\ z_2(x,0)=\pi+\cos(2\pi x).$$

该系统在开环条件下($u_1(t)=u_2(t)=0$)是不稳定的, 如图4(a)所示, 系统状态范数$\|z_1(\cdot,t)\|_2$, $\|z_2(\cdot,t)\|_2$都是发散的. 选取矩阵$C=I$(满足定理2条件). 利用文献[10]给出的方法, 求得核函数矩阵PDE(13)的数值解

$$K(1,y)=K(x,y)|_{x=1},\ K_x(1,y)=K_x(x,y)|_{x=1},$$

如图5所示. 图4(b)和图6给出了闭环系统的状态L_2范数和系统状态. 可见闭环系统的状态L_2范数收敛到0, 这说明基于反步法的Robin边界控制(8)使系统稳定到平衡点.

5 结论

本文针对具有空间依赖耦合反应项的耦合分数阶反应–扩散系统, 利用反步法设计了Robin边界状态反馈控制器, 使得在该控制器作用下的闭环系统Mittag-Leffler稳定, 解决了系统的边界反馈镇定问题. 同时, 借助分数阶Lyapunov方法证明了闭环系统的稳定性. 最后, 通过数值求解核函数矩阵PDE, 解决了具有非常系数反应项的FRDS数值仿真问题. 对于耦合FRDS仍有很多问题有待研究, 今后可考虑耦合FRDS的输出反馈控制和输出调节问题.

参考文献:

[1] METZLER R, KLAFTER J. The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 2000, 339(1): 1 – 77.

[2] HENRY B I, WEARNE S L. Fractional reaction-diffusion. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2000, 276(3/4): 448 – 455.

[3] HENRY B I, LANGLANDS T A M, WEARNE S L. Anomalous diffusion with linear reaction dynamics: From continuous time random walks to fractional reaction-diffusion equations. *Physical Review E*, 2006, 74(3): 031116.

[4] GE F, CHEN Y, KOU C. Boundary feedback stabilisation for the time fractional-order anomalous diffusion system. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(11): 1250 – 1257.

[5] CHEN J, ZHUANG B, CHEN Y, et al. Backstepping–based boundary feedback control for a fractional reaction diffusion system with mixed or Robin boundary conditions. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(17): 2964 – 2976.

[6] CHEN J, CUI B, CHEN Y. Backstepping–based boundary control design for a fractional reaction diffusion system with a space-dependent diffusion coefficient. *ISA Transactions*, 2018, 80: 203 – 211.

[7] ZHOU H, GUO B. Boundary feedback stabilization for an unstable time fractional reaction diffusion equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2018, 56(1): 75 – 101.

[8] CHEN J, CUI B, CHEN Y. Observer-based output feedback control for a boundary controlled fractional reaction diffusion system with spatially-varying diffusivity. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(11): 1561 – 1572.

[9] GE F, CHEN Y. Event-triggered boundary feedback control for networked reaction-subdiffusion processes with input uncertainties. *Information Sciences*, 2019, 476: 239 – 255.

[10] SMYSHLYAEV A, KRSTIC M. Closed-form boundary state feedbacks for a class of 1–D partial integro-differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(12): 2185 – 2202.

[11] KRSTIC B M, SMYSHLYAEV A. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Design*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[12] BACCOLI A, PISANO A, ORLOV Y. Boundary control of coupled reaction-diffusion processes with constant parameters. *Automatica*, 2015, 54: 80 – 90.

[13] LIU B N, BOUTAT D, LIU D Y. Backstepping observer-based output feedback control for a class of coupled parabolic PDEs with different diffusions. *Systems & Control Letters*, 2016, 97: 61 – 69.

[14] ORLOV Y, PISANO A, PILLONI A, et al. Output feedback stabilization of coupled reaction-diffusion processes with constant parameters. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2017, 55(6): 4112 – 4155.

[15] VAZQUEZ R, KRSTIC M. Boundary control of coupled reaction-advection-diffusion systems with spatially-varying coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(4): 2026 – 2033.

[16] DEUTSCHER J, KERSCHBAUM S. Backstepping control of coupled linear parabolic PIDEs with spatially-varying coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(12): 4218 – 4233.

[17] GE F, MEURER T, CHEN Y. Mittag-Leffler convergent backstepping observers for coupled semilinear subdiffusion systems with spatially varying parameters. *Systems & Control Letters*, 2018, 122: 86 – 92.

[18] LI Y, CHEN Y, PODLUBNY I. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 2009, 45(8): 1965 – 1969.

[19] LI Y, CHEN Y, PODLUBNY I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, 59(5): 1810 – 1821.

[20] PODLUBNY I. Fractional-order systems and $\mathrm{PI}^{\lambda}\mathrm{D}^{\mu}$-controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208 – 214.

[21] LI C, WANG J, LU J, et al. Observer-based stabilisation of a class of fractional order non-linear systems for $0<\alpha<2$ case. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(13): 1238 – 1246.

[22] AGUILA-CAMACHO N, DUARTE-MERMOUD M A, GALLEGOS J A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2014, 19(9): 2951 – 2957.

[23] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. New York: Academic Press, 1999.

[24] LIU W. Boundary feedback stabilization of an unstable heat equation. *SIAM Journal on Control & Optimization*, 2003, 42(3): 1033 – 1043.

[25] LI H, CAO J, LI C. High-order approximation to Caputo derivatives and Caputo-type advection-diffusion equations (III). *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2016, 299: 159 – 175.

[26] MEURER T, KUGI A. Tracking control for boundary controlled parabolic PDEs with varying parameters: Combining backstepping and differential flatness. *Automatica*, 2009, 45(5): 1182 – 1194.

附录:

为证明引理1, 首先引入以下引理:

引理 A[26] 对于$n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 0$, 满足

1) 当$0\leqslant\eta\leqslant\xi$, 有

$$2\int_0^{\eta}\int_0^{\tau}(s\tau)^n\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau+\int_{\eta}^{\xi}\int_0^{\eta}(s\tau)^n\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau=\frac{(\xi\eta)^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

2) 当$\eta \geqslant 0$, 有

$$\int_0^\eta \int_0^\tau (s+\tau)s^n\tau^n \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau = \frac{\eta^{2n+3}}{(n+1)(n+2)}.$$

3) 当$\eta \geqslant 0$, 有

$$\int_\xi^\eta \int_0^\eta (s+\tau)s^n\tau^n \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau = \frac{\xi^{n+1}\eta^{n+1}(\xi+\eta)-2\eta^{2n+3}}{(n+1)(n+2)}.$$

证　证明分3步:

第1步　利用变量替换将核函数矩阵PDE转换为积分方程并求解. 引入变量替换$\xi = x+y, \eta = x-y$, 并定义

$$G(\xi,\eta) = K(x,y) = K(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}),$$

核函数矩阵PDE(13)可转换为$G(\xi,\eta)$的积分方程

$$G_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \frac{1}{4a}(G(\xi,\eta)\varPhi(\frac{\xi-\eta}{2}) + CG(\xi,\eta)), \tag{A1}$$

$$G_\xi(\xi,\xi) - G_\eta(\xi,\xi) = bG(\xi,\xi), \tag{A2}$$

$$G_\xi(\xi,0) = \frac{1}{4a}(\varPhi(\frac{\xi}{2}) + C). \tag{A3}$$

注意到$G(0,0) = K(0,0) = (b^{\mathrm{s}} - b)I_{n\times n}$, 由式(A1)对变量$\eta$从0到$\xi$积分可得

$$\begin{aligned}G_\xi(\xi,\xi) =& \frac{1}{4a}(\varPhi(\frac{\xi}{2}) + C) + \int_0^\xi \big(\frac{1}{4a}G(\xi,s)\times \\ &\varPhi(\frac{\xi-s}{2}) + \frac{1}{4a}CG(\xi,s)\big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{A4}$$

根据式(A2), 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}G(\xi,\xi) = 2G_\xi(\xi,\xi) - G(\xi,\xi)b. \tag{A5}$$

利用式(A4), 将式(A5)改写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}G(\xi,\xi) =& \frac{1}{2a}(\varPhi(\frac{\xi}{2}) + C) - G(\xi,\xi)b + \\ &\frac{1}{2a}\int_0^\xi \big(G(\xi,s)\varPhi(\frac{\xi-s}{2}) + CG(\xi,s)\big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{A6}$$

对式(A6)积分并利用式(A3)可得

$$\begin{aligned}G(\xi,\xi) =& (b^{\mathrm{s}} - b)\mathrm{e}^{-b\xi}I + \frac{1}{2a}\big(\int_0^\xi \mathrm{e}^{-b(\xi-\tau)}\times \\ &(\varPhi(\frac{\tau}{2}) + C)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^\xi \mathrm{e}^{-b(\xi-\tau)}\int_0^\tau (G(\tau,s)\times \\ &\varPhi(\frac{\tau-s}{2}) + CG(\tau,s))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\big).\end{aligned}$$

同理可得$G(\eta,\eta)$如下:

$$\begin{aligned}G(\eta,\eta) =& (b^{\mathrm{s}} - b)\mathrm{e}^{-b\eta}I + \frac{1}{2a}\big(\int_0^\eta \mathrm{e}^{-b(\eta-\tau)}\times \\ &(\varPhi(\frac{\tau}{2}) + C)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^\eta \mathrm{e}^{-b(\eta-\tau)}\int_0^\tau (G(\tau,s)\times \\ &\varPhi(\frac{\tau-s}{2}) + CG(\tau,s))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\big).\end{aligned} \tag{A7}$$

对式(A1)中变量η从0到η积分并代入式(A3), 有

$$\begin{aligned}G_\xi(\xi,\eta) =& \frac{1}{4a}(\varPhi(\frac{\xi}{2}) + C) + \int_0^\eta \big(\frac{1}{4a}G(\xi,s)\varPhi(\frac{\xi-s}{2}) + \\ &\frac{1}{4a}CG(\xi,s)\big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{A8}$$

再对式(A8)中的变量ξ从η到ξ积分并代入式(A7), 可得

$$\begin{aligned}G(\xi,\eta) =& (b^{\mathrm{s}} - b)\mathrm{e}^{-b\eta}I + \frac{1}{2a}\int_0^\eta \mathrm{e}^{-b(\eta-\tau)}(\varPhi(\frac{\tau}{2}) + C)\,\mathrm{d}\tau + \\ &\frac{1}{2a}\int_0^\eta \mathrm{e}^{-b(\eta-\tau)}\int_0^\tau \big(G(\tau,s)\varPhi(\frac{\tau-s}{2}) + \\ &CG(\tau,s)\big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau + \int_\eta^\xi \frac{1}{4a}(\varPhi(\frac{\tau}{2}) + C)\,\mathrm{d}\tau + \\ &\int_\eta^\xi \int_0^\eta \big(\frac{1}{4a}G(\tau,s)\varPhi(\frac{\tau-s}{2}) + CG(\tau,s)\big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{A9}$$

显然, 满足方程(A1)–(A3)的解$G(\xi,\eta)$同时满足式(A9).

第2步　利用逐次逼近和数学归纳法证明解(A9)的有界性. 令

$$G_0(\xi,\eta) = 0, \tag{A10}$$

$$\begin{aligned}&G_{n+1}(\xi,\eta) = \\ &(b^{\mathrm{s}} - b)\mathrm{e}^{-b\eta}I + \frac{1}{2a}\int_0^\eta \mathrm{e}^{-b(\eta-\tau)}\times \\ &(\varPhi(\frac{\tau}{2}) + C)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2a}\int_0^\eta \mathrm{e}^{-b(\eta-\tau)}\int_0^\tau \big(G_n(\tau,s)\times \\ &\varPhi(\frac{\tau-s}{2}) + CG_n(\tau,s)\big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau + \int_\eta^\xi \frac{1}{4a}(\varPhi(\frac{\tau}{2}) + C)\,\mathrm{d}\tau + \\ &\frac{1}{4a}\int_\eta^\xi \int_0^\eta \big(G_n(\tau,s)\varPhi(\frac{\tau-s}{2}) + CG_n(\tau,s)\big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{A11}$$

若级数$G_n(\xi,\eta)$收敛, 则有

$$G(\xi,\eta) = \lim_{n\to\infty} G_n(\xi,\eta). \tag{A12}$$

定义级数中相邻两项之差为

$$\Delta G_n(\xi,\eta) = G_{n+1}(\xi,\eta) - G_n(\xi,\eta). \tag{A13}$$

于是式(A12)–(A13)可改写为

$$G(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta G_n(\xi,\eta), \tag{A14}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta G_n(\xi,\eta) =& \frac{1}{2a}\int_0^\eta \mathrm{e}^{-b(\eta-\tau)}\int_0^\tau \big(\Delta G_{n-1}(\tau,s)\times \\ &\varPhi(\frac{\tau-s}{2}) + C\Delta G_{n-1}(\tau,s)\big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau + \\ &\frac{1}{4a}\int_\eta^\xi \int_0^\eta \big(\Delta G_{n-1}(\tau,s)\varPhi(\frac{\tau-s}{2}) + \\ &C\Delta G_{n-1}(\tau,s)\big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{A15}$$

根据式(A13), 有

$$\begin{aligned}\Delta G_0(\xi,\eta) =& (b^{\mathrm{s}} - b)\mathrm{e}^{-b\eta}I_{n\times n} + \frac{1}{2a}\int_0^\eta \mathrm{e}^{-b(\eta-\tau)}\times \\ &(\varPhi(\frac{\tau}{2}) + C)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4a}\int_\eta^\xi (\varPhi(\frac{\tau}{2}) + C)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{A16}$$

记

$$M := \max\|\varPhi(x)\|,\ L := |b^{\mathrm{s}} - b|,$$
$$Q := M + \|C\| \geqslant \|\varPhi(x)\| + \|C\| \geqslant \|\varPhi(x) + C\|,$$

得估计

$$\|\Delta G_0(\xi,\eta)\| \leqslant L+\frac{Q}{4a}(\xi+\eta). \tag{A17}$$

假设

$$\|\Delta G_n(\xi,\eta)\| \leqslant L(\frac{Q}{4a}\xi\eta)^n\frac{1}{(n!)^2}+(\frac{Q}{4a})^{n+1}\frac{(\xi+\eta)(\xi\eta)^n}{(n+1)!n!}. \tag{A18}$$

考虑到对任意的$\tau \leqslant \eta, b>0$都有$\mathrm{e}^{-b(\eta-\tau)} \leqslant 1$, 应用引理A得到估计

$$\begin{aligned}&\|\Delta G_{n+1}(\xi,\eta)\| = \\ &\|G_{n+2}(\xi,\eta)-G_{n+1}(\xi,\eta)\| \leqslant \\ &L(\frac{Q}{4a}\xi\eta)^{n+1}(\frac{1}{(n+1)!})^2+(\frac{Q}{4a})^{n+2}\frac{(\xi+\eta)(\xi\eta)^{n+1}}{(n+2)!(n+1)!}.\end{aligned} \tag{A19}$$

于是, 利用归纳法可知式(A18)得证. 由估计式(A17)–(A19)可知, 级数(A14)在$0 \leqslant \eta \leqslant \xi \leqslant 2$上一致收敛, 而且$G(\xi,\eta)$是式(A9)二次连续可微的解.

根据式(A14)(A18), 可将$G(\xi,\eta)$的界改写为

$$\begin{aligned}\|G(\xi,\eta)\| \leqslant & L\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{Q^n}{a^n n!}+ \\ & \frac{Q}{4a}(\xi+\eta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{Q^n}{a^n n!}.\end{aligned} \tag{A20}$$

因为数列$\frac{1}{n!}$和$\frac{1}{(n+1)!}$都是收敛的, 故也是有界的, 即存在正常数E和F使得对所有$n \geqslant 0$有$\frac{1}{n!} \leqslant E$和$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant F$. 于是, 可以得到

$$\|G(\xi,\eta)\| \leqslant LE\mathrm{e}^{\frac{Q}{a}}+\frac{Q}{4a}(\xi+\eta)F\mathrm{e}^{\frac{Q}{a}}. \tag{A21}$$

第3步 证明解的唯一性. 假设式(A9)有两个解, 分别记作$G^1(\xi,\eta)$和$G^2(\xi,\eta)$, 则有

$$\|G^1(\xi,\eta)-G^2(\xi,\eta)\| \leqslant 2LE\mathrm{e}^{\frac{Q}{a}}+\frac{Q}{2}(\xi+\eta)F\mathrm{e}^{\frac{Q}{a}}. \tag{A22}$$

记$\Delta G'(\xi,\eta)=\|G^1(\xi,\eta)-G^2(\xi,\eta)\|$. 利用不等式(A22)替换式(A18)中的式(A13), 然后采用证明$\Delta G(\xi,\eta)$有界性同样的步骤, 可以得到以下估计:

$$\begin{aligned}&\Delta G'(\xi,\eta) \leqslant \\ &2LE\mathrm{e}^{\frac{Q}{a}}(\frac{Q}{4a}\xi\eta)^n\frac{1}{(n!)^2}+ \\ &2F\mathrm{e}^{\frac{Q}{a}}(\frac{Q}{4a})^{n+1}\frac{(\xi+\eta)(\xi\eta)^n}{n!(n+1)!} \longrightarrow \\ &0,\ \forall n \in \mathbb{R},\ 当n \to \infty.\end{aligned} \tag{A23}$$

于是, $G^1(\xi,\eta)-G^2(\xi,\eta) \equiv 0$, 故可知方程(A9)具有唯一解.

综上可知, 方程(A9)或方程(A1)–(A3)的解是唯一且有界的, 这意味着核函数矩阵方程(13)的解也是唯一且有界的.

证毕.

作者简介:

庄　波 博士研究生, 目前研究方向为分布参数系统控制, E-mail: bozhuang@jiangnan.edu.cn;

崔宝同 博士, 教授, 目前研究方向为复杂系统控制理论与应用, E-mail: btcui@jiangnan.edu.cn;

陈　娟 博士, 目前研究方向为分数阶分布参数系统的控制, E-mail: karenchenjuan.student@sina.com.