第 36 卷第 11 期　控 制 理 论 与 应 用　Vol. 36 No. 11
2019 年 11 月　Control Theory & Applications　Nov. 2019

具有切换概率分布的概率布尔网络的依分布稳定和镇定

李雅璐, 李海涛†, 丁雪莹

(山东师范大学 数学与统计学院, 山东 济南 250014)

摘要: 布尔网络作为研究基因调控网络的一种重要模型, 近年来引起了国内外很多学者的广泛关注. 本文利用代数状态空间表示方法, 研究具有切换概率分布的概率布尔网络的依分布稳定和镇定问题. 首先, 回顾针对切换布尔网络稳定性分析的现有的研究结果. 其次, 给出具有切换概率分布的概率布尔网络依分布稳定的定义, 并利用矩阵的半张量积建立具有切换概率分布的概率布尔网络的代数表示. 再次, 基于该代数表示, 建立具有切换概率分布的概率布尔网络的依分布稳定的充分必要条件. 最后, 给出具有切换概率分布的概率布尔控制网络镇定问题可解的充要条件, 并给出相应的控制设计方法.

关键词: 概率布尔网络; 切换概率分布; 稳定; 镇定; 矩阵半张量积

引用格式: 李雅璐, 李海涛, 丁雪莹. 具有切换概率分布的概率布尔网络的依分布稳定和镇定. 控制理论与应用, 2019, 36(11): 1896 – 1904

DOI: 10.7641/CTA.2019.90506

Stability and stabilization in distribution of probabilistic boolean networks with switching probability distribution

LI Ya-lu, LI Hai-tao†, DING Xue-ying

(School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong 250014, China)

Abstract: As an important model for studying gene regulatory networks, Boolean networks have attracted extensive attention from many scholars in the past few decades. Using the algebraic state space representation method, this paper investigates the stability and stabilization in distribution of probabilistic Boolean networks (PBNs) with switching probability distribution (SPD). Firstly, the existing results on the stability of switched Boolean networks are briefly reviewed. Secondly, the definition of stability in distribution of PBNs with SPD is given, and based on the semi-tensor product of the matrices, PBNs with SPD can be converted into the algebraic representation. Thirdly, based on the algebraic representation, a necessary and sufficient condition is presented for the stability in distribution of PBNs with SPD. Finally, a necessary and sufficient condition is presented for the stabilization in distribution of PBNs with SPD, and the corresponding control design method is given.

Key words: probabilistic boolean network; switching probability distribution; stability; stabilization; semi-tensor product of matrices

Citation: LI Yalu, LI Haitao, DING Xueying. Stability and stabilization in distribution of probabilistic boolean networks with switching probability distribution. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(11): 1896 – 1904

1 引言

布尔网络 (Boolean network) 的研究始于 1969 年, Kauffman 用它来建模基因调控网络 (gene regulatory network)[1]. 在布尔网络中, 每个基因的表达只有两种状态: “1”或者“0”. 状态“1”表示一个基因转录表达, 形成基因产物; 状态“0”则代表一个基因未转录; 基因之间的相互作用关系由布尔表达式来表示. 布尔网络虽然是一个理想化的简化模型, 但在基因调控中有着重要的应用. 它提供了一个利用离散动力学过程来刻画基因网络的表达模式的概念框架, 较好地揭示了基因的演化过程. 因此, 布尔网络的数学理论引起了国内外学者的广泛研究兴趣, 包括拓扑结构[2–4]、动力学特征[5–6]、生物系统的布尔建模与分析[7–8]等.

收稿日期: 2019−07−01; 录用日期: 2019−08−30.

†通信作者. E-mail: haitaoli09@gmail.com; Tel.: +86 15253130216.

本文责任编委: 方海涛.

国家自然科学基金项目(61873150), 山东省自然科学杰出青年基金项目(JQ201613), 泰山学者青年专家项目资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61873150), the Natural Science Fund for Distinguished Young Scholars of Shandong Province (JQ201613) and the Young Experts of Taishan Scholar Project.

值得指出的是, 在实际的基因调控网络中, 网络的动力学模型通常由不同的切换模态决定[9]. 引起不同切换模态的原因一般有3种: 第一, 由系统自身所具有的属性引起. 例如, 真核细胞的生长和分裂, 通常是由被一系列离散事件触发所引起的4个模态决定. 第二, 由尝试重新设计给定网络的外部干预或控制输入产生. D. Laschov等在文献[10]中指出, 通过将控制输入编码成切换信号, 一个布尔控制网络可转化为切换布尔网络. 第三, 基因调控网络的异步动态也可以产生多模态切换[11]. 本文把由不同的切换模态决定的布尔网络模型称为切换布尔网络 (switched boolean network). 切换布尔网络同时具有逻辑动态系统和切换系统的特征, 研究起来更为复杂, 传统的切换系统理论[12–15]很难用来研究该类网络.

近年来, 程代展教授提出了一种新的矩阵乘积, 即矩阵半张量积(semi-tensor product of matrices)[16–17], 它将普通矩阵乘法推广到了前阵列数与后阵行数不等的情况. 它的主要特点是可以将一个逻辑变量转化为一个向量, 从而将一个逻辑函数转换成一个等价的代数形式. 因此, 布尔网络等逻辑动态系统可以转化为类线性离散系统的形式, 从而方便人们将现代控制理论推广到布尔网络等逻辑动态系统. 到目前为止, 利用矩阵半张量积方法, 布尔网络以及切换布尔网络中许多富有挑战性的问题被解决, 比如能控性和能观性[18–24]、稳定性和镇定控制[25–31], 以及最优控制[32–37]等问题. 文献[23]给出了切换布尔控制网络切换–输入–状态关联矩阵的概念, 运用切换–输入–状态关联矩阵研究了切换布尔控制网络的能达性和能控性; 文献[24]首次提出了切换布尔控制网络的模态–输入–状态矩阵, 基于该矩阵设计了相应的控制和切换法则并给出系统能控和能观的充要条件.

为了描述基因调控网络的随机性和建模不确定性, Shmulevich等将布尔网络的概念推广到概率布尔网络(probabilistic boolean network)中[38–39]. 作为布尔网络模型的推广, 概率布尔网络中每个基因对应一个或多个布尔函数, 并且在每一时刻根据给定的离散概率分布(discrete probability distribution)来选取其中一个布尔函数更新下一时刻的状态. 因此, 概率布尔网络是在布尔网络和马尔科夫过程的结合, 人们可以通过马尔科夫过程的特性来研究概率布尔网络[37]. 近年来, 关于概率布尔网络的分析和控制已经取得了较多优秀的研究成果[26,36,40–41], 并被广泛应用于生物学和工程学等领域[42–43].

众所周知, 现存的关于概率布尔网络的文献考虑的概率分布有且仅有一个. 然而, 由于在概率分布辨识中存在测量误差[44–45], 概率布尔网络的的概率分布可能会切换于不同的概率分布之间, 本文称这一类概率布尔网络为带有切换概率分布的概率布尔网络. 显然, 带有切换概率分布的概率布尔网络是一类混杂系统. 通过查找文献可知, 关于带有切换概率分布的概率布尔网络的研究目前仅有Kobayashi等利用整数线性规划方法研究了其最优控制问题[45], 关于带有切换概率分布的概率布尔网络的其他问题的研究目前还没有出现.

本文利用矩阵半张量积方法研究具有切换概率分布的概率布尔网络的依分布稳定和镇定问题. 相比确定性布尔网络, 具有切换概率分布的概率布尔网络同时引入了模态的切换和随机性, 用来处理基因调控网络建模中的不确定性, 增加了系统模型的可靠性和鲁棒性. 相比概率布尔网络, 具有切换概率分布的概率布尔网络是一种更加复杂的概率布尔网络, 其处理难度更大. 所以, 有必要提出新的方法来研究具有切换概率分布的概率布尔网络. 本文的主要贡献如下: i) 利用矩阵半张量积将具有切换概率分布的概率布尔网络转化为等价的代数形式, 便于系统的分析和控制; ii) 基于代数表示, 建立了具有切换概率分布的概率布尔网络的依分布稳定的充分必要条件; iii) 通过构造一组概率能达集, 给出了具有切换概率分布的概率布尔控制网络镇定问题可解的充要条件, 并给出相应的控制设计方法.

本文的剩余部分安排如下: 第2部分列出了一些关于矩阵半张量积的必要的预备知识; 第3部分简单回顾了切换布尔网络的现有研究结果; 第4部分研究了具有切换概率分布的概率布尔网络的依分布稳定和镇定问题, 并给出本文的主要结果; 作为应用, 第5部分将所得的理论结果用于WNT5A基因调控网络的依分布稳定性分析; 第6部分给出本文的结论.

下面列出本文中用到的符号: $\mathcal{D}:=\{0,1\}$, $\mathcal{D}^n:=\underbrace{\{\mathcal{D}\times\cdots\times\mathcal{D}\}}_{n}$. $\varDelta_k:=\{\delta_k^i|i=1,2,\cdots,k\}$, δ_k^i表示单位矩阵I_k的第i列; 一个$n\times t$维矩阵A称作逻辑矩阵, 如果$A=[\delta_n^{i_1}\ \ \delta_n^{i_2}\ \ \cdots\ \ \delta_n^{i_t}]$, 简记$A$为$A=\delta_n[i_1\ \ i_2\ \ \cdots\ \ i_t]$; 定义所有$n\times t$维逻辑矩阵的集合为$\mathcal{L}_{n\times t}$; 如果对任意的$v=[v_1\ \ \cdots\ \ v_k]\in\varUpsilon_k$都满足$\sum\limits_{i=1}^{k}v_i=1$, 则$\varUpsilon_k$表示$k$维概率向量的集合; $\varUpsilon_{m\times n}$表示$m\times n$维概率矩阵的集合, 如果$A\in\varUpsilon_{m\times n}$, $\mathrm{Col}_i(A)\in\varUpsilon_m$, $i=1,\cdots,n$; $\mathrm{Col}_i(A)$和$\mathrm{Row}_j(A)$分别表示矩阵A的第i列和第j行; 矩阵A的所有列组成的集合记为$\mathrm{Col}(A)$, 所有行组成的集合记为$\mathrm{Row}(A)$. 设$A,B\in\mathcal{L}_{n\times r}$, 则$A*B:=[\mathrm{Col}_1(A)\otimes\mathrm{Col}_1(B),\cdots,\mathrm{Col}_r(A)\otimes\mathrm{Col}_r(B)]$, 其中$\otimes$表示矩阵的Kronecker积.

2　预备知识

本文使用的主要数学工具为矩阵的半张量积, 定义如下:

定义 1 给定两个矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$和$B \in \mathbb{R}^{p\times q}$. 令$\alpha = \mathrm{lcm}(n,p)$为$n$和$p$的最小公倍数, 则矩阵$A$和$B$的半张量积定义为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{\frac{\alpha}{n}})(B \otimes I_{\frac{\alpha}{p}}). \tag{1}$$

注 1 矩阵的半张量积是普通矩阵乘积的推广, 因此一般省略符号“$\ltimes$”.

下面给出矩阵半张量积的基本性质:

引理 1 i) 设$X \in \mathbb{R}^{t\times 1}$是一个列向量, A为任意维数矩阵, 则$X \ltimes A = (I_t \otimes A) \ltimes X$; ii) 设$X \in \mathcal{L}_{k\times 1}$, 则$X^2 = M_{r,k} \ltimes X$, 其中$M_{r,k} = \mathrm{diag}\{\delta_k^1, \delta_k^2, \cdots, \delta_k^k\}$称为降阶矩阵.

为了将逻辑映射转化为代数形式, 本文将“1”和“0”分别表示成向量“δ_2^1”和“δ_2^2”. 则$\mathcal{D} \sim \Delta$, 其中“$\sim$”表示同一事物的两种不同表示形式.

引理 2 设$f: \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$. 则存在唯一的逻辑矩阵$M_f \in \mathcal{L}_{2\times 2^n}$使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = M_f \ltimes_{i=1}^{n} x_i, \tag{2}$$

这里M_f称作f的结构矩阵.

引理 3 设矩阵M_f是布尔函数$f: \mathcal{D}^s \to \mathcal{D}$的结构矩阵. 将结构矩阵$M_f$分为两等块, 即$M_f = [M_f^1\ \ M_f^2]$, 则

$$\begin{aligned} &f(x_1, \cdots, x_s) = \\ &(x_1 \wedge f^1(x_2, \cdots, x_s)) \vee (\neg x_1 \wedge f^2(x_2, \cdots, x_s)), \end{aligned} \tag{3}$$

其中M_f^i是$f^i (i = 1, 2)$的结构矩阵.

3 切换布尔网络

切换布尔网络是一类特殊的非线性切换系统, 由于它的状态变量只能在“0”和“1”中进行取值, 系统动态方程中的运算为逻辑运算, 这就使得处理切换系统稳定性的传统方法并不适用于切换布尔网络. 文献[28–29]为切换布尔网络的稳定性建立了一种切换点能达的方法, 以下作简要介绍.

考虑如下的切换布尔网络:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1^{\sigma(t)}(X(t)), \\ x_2(t+1) = f_2^{\sigma(t)}(X(t)), \\ \quad \vdots \\ x_n(t+1) = f_n^{\sigma(t)}(X(t)), \end{cases} \tag{4}$$

其中: $X(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)) \in \mathcal{D}^n$表示系统(4)在$t$时刻的状态; $x_i \in \mathcal{D}, i = 1, \cdots, n$表示第$i$个状态变量; $\sigma(t): \mathbb{N} \to \Omega = \{1, 2, \cdots, \omega\}$表示切换信号; ω表示切换模态的个数; $f_i^j: \mathcal{D}^n \to \mathcal{D},\ i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, \omega$表示布尔函数. 系统在切换信号$\sigma(t)$作用下从初始状态$X(0)$出发的轨线表示为$X(t; X(0), \sigma)$.

定义 2 给定一个平衡点$X^* \in \mathcal{D}^n$. 系统(4)称为在任意切换下全局稳定到X^*, 如果对任意初始状态$X(0) \in \mathcal{D}^n$和任意的切换信号σ, 存在正整数T使得

$$X(t; X(0), \sigma) = X^*$$

对任意的$t \geqslant T$成立.

定义 3 给定初始点$X(0) \in \mathcal{D}^n$. 点$X \in \mathcal{D}^n$称为从$X(0)$切换能达的, 如果存在一个整数$T > 0$和一个切换信号σ, 使得在此切换信号下

$$X(T; X(0), \sigma) = X$$

成立.

令$x(t) = \ltimes_{i=1}^{n} x_i(t)$. 由引理2, 可以将系统(4)转化为如下的等价代数形式:

$$x(t+1) = L_{\sigma(t)} x(t), \tag{5}$$

其中$L_{\sigma(t)} \in \mathcal{L}_{2^n\times 2^n}$.

基于切换布尔网络的等价代数形式(5), 有如下判据来判定切换点能达.

引理 4 考虑系统(5).

i) $x = \delta_{2^n}^{\beta}$可由$x(0) = \delta_{2^n}^{\alpha}$经$k$步切换能达, 当且仅当

$$(M^k)_{\beta,\alpha} > 0, \tag{6}$$

其中$M = \sum_{i=1}^{\omega} L_i$.

ii) $x = \delta_{2^n}^{\beta}$可由$x(0) = \delta_{2^n}^{\alpha}$切换能达, 当且仅当

$$C_{\beta,\alpha} > 0, \tag{7}$$

其中$C = \sum_{i=1}^{2^n} M^i$.

基于引理4, 给出了系统任意切换下全局稳定的充要条件.

定理 1 系统(4)在任意切换下全局稳定到$x^* = \delta_{2^n}^{\theta}$, 当且仅当存在正整数$T \leqslant 2^n$使得

$$\mathrm{Row}_{\theta}(M^{\mathrm{T}}) = [\omega^{\mathrm{T}}\ \cdots\ \omega^{\mathrm{T}}] \tag{8}$$

成立.

切换布尔网络往往在任意切换下不稳定, 但是在某个固定切换下是稳定的. 这就引出了另一个重要问题: 设计切换信号使切换布尔网络稳定.

考虑系统(4). 定义系统逐点切换稳定和一致切换稳定如下:

定义 4 系统(4)称为逐点切换可稳到X^*, 如果对任意初始状态$X(0) \in \mathcal{D}^n$, 存在正整数T和切换信号$\{\sigma_{X_0}(t): t \in \mathbb{N}\}$使得

$$X(t; X(0), \sigma_{X_0}) = X^*$$

对任意的$t \geqslant T$成立.

定义 5　系统(4)称为一致切换可稳到X^*, 如果存在正整数T和切换信号$\{\sigma(t): t\in\mathbb{N}\}$使得

$$X(t;X(0),\sigma)=X^*$$

对任意的$t\geqslant T$和任意初始状态$X(0)\in\mathcal{D}^n$成立.

事实上, 如果系统(4)逐点切换稳定到X^*, 则X^*一定是某个子系统的不动点. 否则的话, 如果X^*不是任何子系统的不动点, 则从X^*出发的任何轨迹的下一个状态都不是X^*.

基于以上分析和系统(4)的等价代数形式(5), 有如下结论.

定理 2　假设x^*是系统(4)中某个子系统的不动点. 则系统(4)逐点切换稳定到$x^*=\delta_{2^n}^{\theta}$, 当且仅当

$$\mathrm{Row}_{\theta}(C)>0. \tag{9}$$

对于一致切换稳定这一情形, 令$\sigma(t)=i\sim\delta_{\omega}^{i}$, $i\in\varOmega$. 则系统(5)可以转化为如下形式:

$$x(t+1)=\tilde{L}\sigma(t)x(t), \tag{10}$$

其中$\tilde{L}=[L_1\cdots L_{\omega}]\in\mathcal{L}_{2^n\times\omega 2^n}$.

考虑状态反馈切换信号: $\sigma(t)=Gx(t)$, 其中$G\in\mathcal{L}_{\omega\times 2^n}$.

定理 3　假设x^*是系统(4)中某个子系统的不动点. 则系统(4)在状态反馈切换信号作用下一致切换稳定到$x^*=\delta_{2^n}^{\theta}$, 当且仅当$\mathrm{Row}_{\theta}(C)>0$.

4　主要结果

4.1　任意切换概率分布下的依分布稳定

考虑如下具有切换概率分布的概率布尔网络:

$$X(t+1)=f(X(t)), \tag{11}$$

其中$X(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))\in\mathcal{D}^n$表示系统(11)在$t$时刻的状态. 逻辑函数$f:\mathcal{D}^n\to\mathcal{D}^n$, 根据某一离散概率分布$\pi\in\{\pi_1,\cdots,\pi_{\omega}\}$在一有限集中进行选取, 即$f\in\{f^1,f^2,\cdots,f^l\}$. 在实际基因调控网络的建模中, 离散概率分布随时间t的变化而变化. 对于离散概率分布π_j, 令$p_i^j=\mathrm{P}\{f=f^i\}$, $i=1,\cdots,l$. 假设

$$\sum_{i=1}^{l}p_i^j=1,\ 0<p_i^j<1,\ j=1,\cdots,\omega.$$

时间t处的离散概率分布用$\sigma(t)$表示, 它在集合$\varOmega=\{1,\cdots,\omega\}$中选择. 因此, 系统(11)称为具有切换概率分布的概率布尔网络.

首先给出系统(11)在任意切换概率分布下能够依分布稳定的定义.

定义 6　给定一个平衡点$X^*\in\mathcal{D}^n$. 系统(11)称为在任意切换概率分布下依分布稳定到X^*, 如果

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{X(t)=X^*\mid X(0),\sigma\}=1$$

对任意初始状态$X(0)\in\mathcal{D}^n$和任意的切换离散概率分布序列$\{\sigma(t): t\in\mathbb{N}\}$成立.

对于系统(11), 令$x(t)=\ltimes_{i=1}^{n}x_i(t)$. 由引理2, 可知系统(11)的等价代数形式如下:

$$x(t+1)=Lx(t), \tag{12}$$

其中$L\in\mathcal{L}_{2^n\times 2^n}$从集合$\{L_1,L_2,\cdots,L_l\}$中选取, 且$L_i$是函数$f^i$的结构矩阵. 显然, 对离散概率分布$\pi_j$, $j=1,\cdots,\omega$, 有$\mathrm{P}\{L=L_i\}=p_i^j$, $i=1,\cdots,l$.

对任意的离散概率分布π_j, 定义其转移概率矩阵如下:

$$M_j=\sum_{i=1}^{l}p_i^jL_i\in\varUpsilon_{2^n\times 2^n}. \tag{13}$$

将每个$j\in\varOmega$转换为向量形式$\delta_{\omega}^{j}\in\varDelta_{\omega}$. 令$Q=[M_1\ M_2\ \cdots\ M_{\omega}]\in\varUpsilon_{2^n\times\omega 2^n}$. 则具有切换概率分布的概率布尔网络可以转化为以下代数形式:

$$x(t+1)=Q\sigma(t)x(t), \tag{14}$$

其中$\sigma(t)\in\varDelta_{\omega}$.

为了研究系统(11)是否在任意切换概率分布下的依分布稳定到$x^*\in\varDelta_{2^n}$, 首先回顾系统在某一固定概率分布π_j, $j\in\varOmega$下的依分布稳定到x^*的充要条件, 即系统

$$x(t+1)=M_jx(t) \tag{15}$$

依分布稳定到x^*的充要条件. 下述引理来自于文献[26].

引理 5　系统(15)依分布稳定到$x^*=\delta_{2^n}^{\theta}$, 当且仅当以下两式成立:

$$(M_j)_{\theta,\theta}=1, \tag{16}$$

$$\mathrm{Row}_{\theta}(M_j^{2^n-1})>0. \tag{17}$$

现在证明, 式(16)–(17)成立可以导出系统(15)依分布稳定与概率分布无关.

定理 4　系统(15)依分布稳定与概率分布π_j, $j\in\varOmega$无关, 即若系统(15)在某一概率分布下依分布稳定, 则在任意概率分布下系统(15)均依分布稳定.

证　假设系统(15)在概率分布π_j下依分布稳定到$x^*=\delta_{2^n}^{\theta}$, 由引理5可知, 式(16)–(17)成立. 由式(16)和矩阵M_j的构造可知

$$(M_j)_{\theta,\theta}=\sum_{i=1}^{l}p_i^j(L_i)_{\theta,\theta}=1.$$

又因为

$$\sum_{i=1}^{l}p_i^j=1,\ 0<p_i^j<1,\ j=1,\cdots,\omega,$$

所以, 式(16)对任意的j成立, 即式(16)成立与概率分布无关.

又因为$p_i^j > 0$, 所以式(17)与

$$\mathrm{Row}_\theta((\sum_{i=1}^{l} L_i)^{2^n-1}) > 0$$

等价, 即式(17)成立与概率分布无关. 证毕.

由定理4, 可以得到以下结果.

定理 5 系统(11)在任意切换概率分布下依分布稳定到x^*, 当且仅当系统(11)在某一概率分布下依分布稳定到x^*, 即存在$j \in \Omega$, 使得式(16)–(17)成立.

4.2 依分布镇定

考虑如下具有切换概率分布的概率布尔控制网络:

$$X(t+1) = \hat{f}(U(t), X(t)), \tag{18}$$

其中: $X(t)=(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \in \mathcal{D}^n$, $U(t)=(u_1(t), \cdots, u_m(t)) \in \mathcal{D}^m$分别表示系统(18)在$t$时刻的状态和控制输入. $\hat{f}: \mathcal{D}^{n+m} \to \mathcal{D}^n$是根据某一离散概率分布$\pi \in \{\pi_1, \cdots, \pi_\omega\}$在一有限集中进行选取的逻辑函数, 即$\hat{f} \in \{\hat{f}^1, \hat{f}^2, \cdots, \hat{f}^l\}$. 对于离散概率分布$\pi_j$, 令$\hat{p}_i^j = \mathrm{P}\{\hat{f} = \hat{f}^i\}$, $i = 1, \cdots, l$. 假设

$$\sum_{i=1}^{l} \hat{p}_i^j = 1,\ 0 < \hat{p}_i^j < 1,\ j = 1, \cdots, \omega.$$

首先分别给出系统(18)在固定切换概率分布和任意切换概率分布下能够依分布镇定的定义.

定义 7 给定一个平衡点$X^* \in \mathcal{D}^n$. 系统(18)称为在固定切换概率分布π_j下依分布镇定到X^*, 如果存在如下形式的控制:

$$U(t) = g(X(t)), \tag{19}$$

其中$g: \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}^m$是逻辑函数, 使得

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{X(t) = X^* \mid X(0), U(t)\} = 1$$

对任意初始状态$X(0) \in \mathcal{D}^n$成立.

定义 8 给定一个平衡点$X^* \in \mathcal{D}^n$. 系统(18)称为在任意切换概率分布下依分布镇定到X^*, 如果存在如式(19)形式的状态反馈控制, 使得

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{X(t) = X^* \mid X(0), U(t), \sigma\} = 1$$

对任意初始状态$X(0) \in \mathcal{D}^n$和任意的切换离散概率分布序列$\{\sigma(t) : t \in \mathbb{N}\}$成立.

令 $x(t) = \ltimes_{i=1}^{n} x_i(t)$, $u(t) = \ltimes_{j=1}^{m} u_j(t)$. 类似于前面的分析, 系统(18)和控制(19)可分别转化为以下代数形式:

$$x(t+1) = \hat{M}\sigma(t)u(t)x(t), \tag{20}$$

$$u(t) = Gx(t), \tag{21}$$

其中: $G \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^m}$是反馈增益矩阵, $\hat{M} = [\hat{M}_1\ \hat{M}_2\ \cdots\ \hat{M}_\omega] \in \Upsilon_{2^n \times \omega 2^{n+m}}$, $\hat{M}_j = \sum_{i=1}^{l} \hat{p}_i^j \hat{L}_i \in \Upsilon_{2^n \times 2^{n+m}}$为转移概率矩阵, $\hat{L}_i$是函数$\hat{f}^i$的结构矩阵, 且满足$\mathrm{P}\{\hat{L} = \hat{L}_i\} = \hat{p}_i^j$, $i = 1, \cdots, l$, $j = 1, \cdots, \omega$.

下面将给出式(18)在某一固定概率分布$\pi_j, j \in \Omega$下依分布镇定到x^*的充要条件, 即系统

$$x(t+1) = \hat{M}_j u(t)x(t) \tag{22}$$

依分布稳定到x^*的充要条件.

对于给定的状态x^*, 定义其$t \in \mathbb{Z}_+$步能达集$\varPhi_t(x^*)$如下:

$$\begin{aligned}\varPhi_1(x^*) = \{\, & \delta_{2^n}^\alpha \in \varDelta_{2^n} : \exists\, v \in \{1, 2, \cdots, 2^m\}, \\ & \ni \mathrm{P}\{x(k+1) = x^* \mid x(k) = \delta_{2^n}^\alpha, \\ & u(k) = \delta_{2^m}^v\} = 1\};\end{aligned} \tag{23}$$

对于$t \geqslant 2$, 定义

$$\begin{aligned}\varPhi_t(x^*) = \{\, & \delta_{2^n}^\alpha \in \varDelta_{2^n} : \exists\, v \in \{1, 2, \cdots, 2^m\} \\ & \ni \mathrm{P}\{x(k+1) \in \varPhi_{t-1}(x^*) \mid \\ & x(k) = \delta_{2^n}^\alpha, u(k) = \delta_{2^m}^v\} > 0\}.\end{aligned} \tag{24}$$

当$t = 1$时, $\varPhi_1(x^*)$表示由能够以概率1一步到达x^*的那些状态组成的集合; 当$t \geqslant 2$时, $\varPhi_t(x^*)$表示由能够以正概率一步到达$\varPhi_{t-1}(x^*)$的状态构成的集合.

通过如上集合的构造, 可得下述定理.

定理 6 给定概率分布$\pi_j, j \in \Omega$. 系统(22)依分布镇定到x^*, 当且仅当存在一个正整数$T \leqslant 2^n$使得

$$\begin{cases} x^* \in \varPhi_1(x^*), \\ \varPhi_T(x^*) = \varDelta_{2^n}. \end{cases} \tag{25}$$

证 必要性. 给定概率分布$\pi_j, j \in \Omega$. 假设系统(22)依分布镇定到x^*. 由定义7可知, 存在一状态反馈控制(21)使得系统(22)依分布镇定到x^*, 等价于由式(21)–(22)构成的闭环系统

$$\begin{aligned} x(t+1) = \hat{M}_j u(t)x(t) = \\ \hat{M}_j G M_{r,2^n} x(t) := \\ Q x(t) \end{aligned} \tag{26}$$

依分布稳定到x^*, 其中$Q = \hat{M}_j G M_{r,2^n} \in \Upsilon_{2^n \times 2^n}$.

由引理5可知,

$$Q_{\theta,\theta} = 1, \tag{27}$$

$$\mathrm{Row}_\theta(Q^{2^n-1}) > 0. \tag{28}$$

一方面, 当式(27)成立时, 存在一状态反馈控制(21)使得

$$\mathrm{P}\{x(t+1) = x^* \mid x(t) = x^*, u(t) = Gx(t)\} = 1$$

成立. 由式(23)可知$x^* \in \varPhi_1(x^*)$.

另一方面, 当式(28)成立时, 存在一状态反馈控制(21)使得

$$\mathrm{P}\{x(2^n-1) = x^* \mid x(0), u(t) = Gx(t)\} > 0$$

对任意的初始状态$x(0) \in \varDelta_{2^n}$成立.

又由

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\{x(2^n-1)=x^*\mid x(0),u(t)=Gx(t)\}=\\&\sum_{\delta_{2^n}^{\alpha_1},\delta_{2^n}^{\alpha_2},\cdots,\delta_{2^n}^{\alpha_{2^n-2}}\in\Delta_{2^n}}\mathrm{P}\{x(2^n-1)=x^*\mid\\&x(2^n-2)=\delta_{2^n}^{\alpha_{2^n-2}},u(2^n-2)=Gx(2^n-2)\}\\&\times\cdots\times\mathrm{P}\{x(1)=\delta_{2^n}^{\alpha_1}\mid x(0),u(0)=Gx(0)\}=\\&\sum_{\delta_{2^n}^{\alpha_{2^n-2}}\in\Delta_{2^n}}\mathrm{P}\{x(2^n-1)=x^*\mid x(2^n-2)=\\&\delta_{2^n}^{\alpha_{2^n-2}},u(2^n-2)=Gx(2^n-2)\}\times\\&\{\sum_{\delta_{2^n}^{\alpha_1},\cdots,\delta_{2^n}^{\alpha_{2^n-3}}\in\Delta_{2^n}}\mathrm{P}\{x(2^n-2)=\delta_{2^n}^{\alpha_{2^n-2}}\mid\\&x(2^n-3)=\delta_{2^n}^{\alpha_{2^n-3}},u(2^n-2)=Gx(2^n-2)\}\\&\times\cdots\times\mathrm{P}\{x(1)=\delta_{2^n}^{\alpha_1}\mid x(0),u(0)=Gx(0)\}\}>0,\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}&\sum_{\delta_{2^n}^{\alpha_{2^n-2}}\in\Delta_{2^n}}\mathrm{P}\{x(2^n-1)=x^*\in\Phi_1(x^*)\mid\\&x(2^n-2)=\delta_{2^n}^{\alpha_{2^n-2}},u(2^n-2)=Gx(2^n-2)\}>0.\end{aligned}$$

由式(24)可得$\delta_{2^n}^{\alpha_{2^n-2}}\in\Phi_2(x^*)$.

以此类推, $x(0)\in\Phi_{2^n}(x^*)$. 由 $x(0)$ 的任意性可得$\Phi_{2^n}(x^*)=\Delta_{2^n}$.

充分性. 假设式(25)成立. 由能达集的构造可得, $\Phi_1(x^*)\subseteq\Phi_2(x^*)\subseteq\cdots\subseteq\Phi_T(x^*)$. 定义

$$\hat{\Phi}_i(x^*)=\Phi_i(x^*)\setminus\Phi_{i-1}(x^*),\Phi_0(x^*)=\varnothing,\\ i=1,\cdots,T.$$

显然, $\hat{\Phi}_i(x^*)\cap\hat{\Phi}_j(x^*)=\varnothing$ 对任意的 $i\neq j$ 成立, 且 $\hat{\Phi}_1(x^*)\cup\hat{\Phi}_2(x^*)\cup\cdots\cup\hat{\Phi}_T(x^*)=\Delta_{2^n}$.

对任意的状态$\delta_{2^n}^{\gamma},\gamma\in\{1,2,\cdots,2^n\}$, 都存在唯一的正整数$k_\gamma$使得$\delta_{2^n}^{\gamma}\in\hat{\Phi}_{k_\gamma}(x^*)$. 如果$k_\gamma=1$, 那么由式(23)可知, 存在一个整数$v_\gamma\in\{1,\cdots,2^m\}$使得

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{x(k+1)=x^*\mid x(k)=\delta_{2^n}^{\gamma},\\u(k)=\delta_{2^m}^{v_\gamma}\}=1.\end{aligned}\tag{29}$$

如果$1<k_\gamma\leqslant T$, 那么由式(24)可知, 存在一个整数$v_\gamma\in\{1,\cdots,2^m\}$使得

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{x(k+1)\in\hat{\Phi}_{k_\gamma-1}(x^*)\mid x(k)=\delta_{2^n}^{\gamma},\\u(k)=\delta_{2^m}^{v_\gamma}\}>0.\end{aligned}\tag{30}$$

令

$$G=\delta_{2^m}[v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_{2^n}].$$

现在证明在状态反馈控制$u(t)=Gx(t)$作用下, 系统(22)能够依分布镇定到x^*, 即证明由构造的状态反馈控制$u(t)=Gx(t)$和系统(22)组成的闭环系统(26)能够依分布稳定到x^*.

因为$x^*\in\Phi_1(x^*)=\hat{\Phi}_1(x^*)$, 由式(29)可知

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\{x(k+1)=x^*\mid x(k)=x^*,u(k)=Gx^*\}=\\&\mathrm{P}\{x(k+1)=x^*\mid x(k)=x^*\}=\\&Q_{\theta,\theta}=1.\end{aligned}$$

又因为$\Phi_T(x^*)=\Delta_{2^n}$, 由式(24)和式(30)可知, 在状态反馈控制$u(t)=Gx(t)$作用下, 对任意$x(0)\in\Delta_{2^n}$, 都有

$$\mathrm{P}\{x(T)=x^*\mid x(0),u(k)=Gx(k)\}>0$$

成立, 即$\mathrm{Row}_\theta(Q^{\mathrm{T}})>0$.

综上所述, 由引理5可得系统(26)能够依分布稳定到x^*. 因此, 在状态反馈控制$u(t)=Gx(t)$作用下, 系统(22)能够依分布镇定到x^*.　　证毕.

注 2　式(25)中条件$\Phi_T(x^*)=\Delta_{2^n}$的验证步骤如下:

Step 1　利用式(23)计算得到$\Phi_1(x^*)$.

Step 2　对于 t 从 2 到 2^n, 利用式 (24) 计算得到 $\Phi_t(x^*)$. 如果$\Phi_t(x^*)=\Delta_{2^n}$, 则令$T=t$, 式(25)中条件$\Phi_T(x^*)=\Delta_{2^n}$成立. 否则不成立.

由定理4和定理6, 可以得到以下结果.

定理 7　系统(18)在任意切换概率分布下依分布镇定到x^*, 当且仅当系统(18)在某一概率分布下依分布镇定到x^*, 即存在$j\in\Omega$使得式(25)成立.

5　例子

例 1　考虑系统(12), 其中: $L\in\{L_1,L_2,L_3\}$, $L_1=\delta_8[1\,4\,4\,5\,7\,1\,6\,3]$, $L_2=\delta_8[1\,3\,2\,5\,7\,8\,6\,1]$, $L_3=\delta_8[1\,3\,4\,2\,5\,1\,8\,2]$, 且对概率分布 π_1, 假设 $p_1^1=0.2$, $p_1^2=0.4$, $p_1^3=0.4$; 对概率分布 π_2, 假设 $p_2^1=0.6$, $p_2^2=0.2$, $p_2^3=0.2$.

研究上述系统是否在任意切换概率分布下依分布稳定到$x^*=\delta_8^1$.

通过计算, 得到在系统概率分布π_1和π_2下的概率转移矩阵, 分别记为M_1和M_2. 从而可以得到上述系统等价的代数形式:

$$x(t+1)=M\sigma(t)x(t),\tag{31}$$

其中: $\sigma(t)\in\Delta_2$, $M=[M_1\ \ M_2]$,

$$M_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0.6&0&0.4\\0&0&0.4&0.4&0&0&0&0.4\\0&0.8&0&0&0&0&0&0.2\\0&0.2&0.6&0&0&0&0&0\\0&0&0&0.6&0.4&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0.6&0\\0&0&0&0&0.6&0&0&0\\0&0&0&0&0&0.4&0.4&0\end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

在固定概率分布π_1下, 通过计算得到

$$(M_1)_{1,1} = 1,$$

且

$$\mathrm{Row}_1(M_1^7) > 0.$$

所以, 在固定概率分布π_1下, 系统依分布稳定到x^*. 因此, 由定理4和定理5可得, 系统在任意切换概率分布下依分布稳定到x^*.

例 2 考虑由WNT5A网络[44]建模而成的概率布尔网络如下:

$$A(t+1) = f(A(t)),$$

其中:

$$\begin{aligned} & f \in \{f^1, f^2\}, \\ & f^1 = (\neg a_6, (\neg a_2 \wedge a_4 \wedge a_6) \vee (\neg a_2 \wedge (a_4 \vee a_6)), \\ & \qquad \neg a_7, a_4, a_2 \vee \neg a_7, a_3 \vee a_4, \neg a_2 \vee a_7)^\top, \\ & f^2 = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^\top. \end{aligned}$$

对概率分布π_1, 假设$p_1^1 = 0.8$, $p_1^2 = 0.2$; 对概率分布π_2, 假设$p_2^1 = 0.1$, $p_2^2 = 0.9$. 本文的目的是验证系统是否能在任意切换概率分布下依分布稳定到$a^* = \delta_{128}^{63}$.

计算可得

$L_1 =$
δ_{128}[113 98 49 34 113 98 49 34 121 106 57
42 121 106 57 42 113 98 49 34 113 98
⋮
65 21 1 93 73 61 41 93 73 61 41 85 65 21
1 85 65 21 1 95 75 63 43 95 75 63 43],

$L_2 =$
δ_{128}[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
⋮
109 110 111 112 113 114 115 116 117 118
119 120 121 122 123 124 125 126 127 128].

由式 (13) 可得 $M_i = p_i^1 * L_1 + p_i^2 * L_2,\ i = 1, 2$. 在固定概率分布$\pi_1$下, 通过计算得到

$$(M_1)_{63,63} = 1,$$

且

$$\mathrm{Row}_{63}(M_1^7) \ngtr 0.$$

从而在固定概率分布π_1下, 系统不能依分布稳定到a^*. 因此, 由定理4和定理5可得, 系统在任意切换概率分布下不能依分布稳定到a^*.

例 3 考虑如下具有3个状态节点、1个控制节点的布尔网络:

$$X(t+1) = \hat{f}(U(t), X(t)), \tag{32}$$

其中:

$$\begin{aligned} & \hat{f} \in \{\hat{f}^1, \hat{f}^2\}, \\ & \hat{f}^1 = (\neg x_1 \vee x_3, x_1 \vee x_3 \vee u, (x_2 \wedge x_3) \vee u)^\top, \\ & \hat{f}^2 = (\neg x_1 \vee x_3, x_2 \vee \neg x_3, (x_2 \wedge x_3) \vee u)^\top. \end{aligned}$$

对概率分布 π_1, 假设 $\hat{p}_1^1 = 0.4$, $\hat{p}_1^2 = 0.6$; 对概率分布π_2, 假设$\hat{p}_2^1 = 0.3$, $\hat{p}_2^2 = 0.7$. 本文的目的是设计控制使得系统(32)在任意切换概率分布下依分布镇定到$X^* = (1, 1, 1)$.

令$x(t) = \ltimes_{i=1}^{3} x_i(t)$. 系统(32)可转化为以下代数形式:

$$x(t+1) = \hat{L} u(t) x(t), \tag{33}$$

其中:

$$\begin{aligned} & \hat{L} \in \{\hat{L}_1, \hat{L}_2\}, \\ & \hat{L}_1 = \delta_8[1\ 1\ 5\ 6\ 1\ 2\ 5\ 6\ 1\ 1\ 1\ 4\ 1\ 2\ 1\ 4], \\ & \hat{L}_2 = \delta_8[1\ 1\ 5\ 6\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2]. \end{aligned}$$

对于固定的概率分布$\pi_j,\ j = 1, 2$, 系统可转化为如下形式:

$$x(t+1) = \hat{M}_j u(t) x(t), \tag{34}$$

其中$\hat{M}_j = p_j^1 * \hat{L}_1 + p_j^2 * \hat{L}_2$.

经计算可知$\varPhi_1(x^*) = \{\delta_8^1, \delta_8^2, \delta_8^3, \delta_8^7\}$, $\varPhi_2(x^*) = \varDelta_8$. 由定理6可知, 系统(32)在概率分布$\pi_j$下依分布镇定到$x^* = \delta_8^1$, 且构造的状态反馈增益矩阵如下:

$$G = \delta_2[v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6\ v_7\ v_8], \tag{35}$$

其中:

$$\begin{aligned} & v_i \in \{1, 2\},\ i = 1, 2, 5, \\ & v_i = 2,\ i = 3, 4, 6, 7, 8. \end{aligned}$$

由定理7可知, 系统(32)在任意切换概率分布下依分布镇定到$x^* = \delta_8^1$.

6 结论

本文研究了具有切换概率分布的概率布尔网络的依分布稳定和镇定问题. 基于代数状态空间方法, 给出了具有切换概率分布的概率布尔网络的代数表示. 基于该代数表示, 给出了具有切换概率分布的概率布尔控制网络依分布稳定和镇定问题可解的充分必要

条件, 并给出相应的控制设计方法. 基于以上研究结果, 笔者未来的研究主要集中在如何设计事件触发控制和采样控制来使得具有切换概率分布的概率布尔控制网络依分布镇定.

参考文献:

[1] KAUFFMAN S. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *Journal of Theoretical Biology*, 1969, 22(3): 437 – 467.

[2] MENG M, FENG J E. Topological structure and the disturbance decoupling problem of singular Boolean networks. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(13): 1247 – 1255.

[3] FARROW C, HEIDEL J, MALONEY H, et al. Scalar equations for synchronous Boolean networks with biological applications. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, 15(2): 348 – 354.

[4] SONG Jinli, LI Zhiqiang. Topological structure of block Boolean networks. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(2): 142 – 149.
(宋金利, 李志强. 块序列布尔网络的拓扑结构. 控制理论与应用, 2015, 32(2): 142 – 149.)

[5] ALBERT R, BARABASI A. Dynamics of complex systems: scaling laws or the period of Boolean networks. *Physical Review Letters*, 2000, 84(24): 5660 – 5663.

[6] AKUTSU T, MIYANO S, KUHARA S. Inferring qualitative relations in genetic networks and metabolic pathways. *Bioinformatics*, 2000, 16(8): 727 – 734.

[7] HUANG S, INGBER D E. Shape-dependent control of cell growth, differentiation, and apoptosis: switching between attractors in cell regulatory networks. *Experimental Cell Research*, 2000, 261(1): 91 – 103.

[8] DATA A, CHOUDHARY A, BITTNER M, et al. External control in Markovian genetic regulatory networks: the imperfect information case. *Bioinformatics*, 2004, 20(6): 924 – 930.

[9] LEWIN B. *Genes VII*. Cambridge, UK: Oxford University Press, 2000.

[10] LASCHOV D, MARGALIOT M. Controllability of Boolean control networks via the Perron-Frobenius theory. *Automatica*, 2012, 48(6): 1218 – 1223.

[11] KOBAYASHI K, HIRAISHI K. Optimal control of asynchronous Boolean networks modeled by petri nets. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences*, 2013, E96A(2): 532 – 539.

[12] EL-FARRA N, GANI A, CHEISTOFIDES P. A switched systems approach for the analysis and control of mode transitions in biological networks. *Proceedings of the American Control Conference*. Portland: IEEE, 2005.

[13] LIBERZON D, MORSE A. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control System Magazine*, 1999, 19(5): 59 – 70.

[14] SUN Z D. Combined stabilizing strategies for switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(4): 666 – 674.

[15] TROFINO A, ASSMANN D, SCHARLAN C, et al. Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(9): 2215 – 2222.

[16] QI H S, CHENG D Z. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach*. London: Springer, 2011.

[17] CHENG D Z, QI H S, ZHAO Y. *An Introduction to Semi-tensor Product of Matrices and Its Applications*. Singapore: World Scientific, 2012.

[18] CHENG D Z, QI H S. Controllability and observability of Boolean control networks. *Automatica*, 2009, 45(7): 1659 – 1667.

[19] CHENG D Z, QI H S, LIU T, et al. A note on observability of Boolean control networks. *System & Control Letters*, 2016, 87: 76 – 82.

[20] CHEN H, SUN J T. Output controllability and optimal output control of state-dependent switched Boolean control networks. *Automatica*, 2014, 50(7): 1929 – 1934.

[21] FORNASINI E, VALCHER M. Observability, reconstructibility and state observers of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(6): 1390 – 1401.

[22] LUO C, WANG X Y, LIU H. Controllability of time-delayed Boolean multiplex control networks under asynchronous stochastic update. *Scientific Reports*, 2014, DOI: 10.1038/srep07522.

[23] LI H T, WANG Y Z. On reachability and controllability of switched Boolean control networks. *Automatica*, 2012, 48(11): 2917 – 2922.

[24] ZHANG L, FENG J, YAO J. Controllability and observability of switched Boolean control networks. *IET Control Theory & Application*, 2012, 6(16): 2477 – 2484.

[25] LI Zhiqiang, XIAO Huimin. Output stability and stabilization of Boolean control networks. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(9): 1201 – 1207.
(李志强, 肖会敏. 布尔控制网络的输出稳定与镇定. 控制理论与应用, 2017, 34(9): 1201 – 1207.)

[26] GUO Y Q, ZHOU R P, WU Y H, et al. Stability and set stability in distribution of probabilistic Boolean networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(2): 736 – 742.

[27] LI R, YANG M, CHU T G. State feedback stabilization for Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1853 – 1857.

[28] LI H T, WANG Y Z, LIU Z B. Stability analysis for switched Boolean networks under arbitrary switching signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(7): 1978 – 1982.

[29] LI H T, WANG Y Z. Consistent stabilizability of switched Boolean networks. *Neural Networks*, 2013, 46: 183 – 189.

[30] LI Haitao, WANG Yuzhen. Stability analysis for switched singular Boolean networks. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 908 – 914.
(李海涛, 王玉振. 切换奇异布尔网络的稳定性分析. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 908 – 914.)

[31] LI F F, TANG Y. Set stabilization for switched Boolean control networks. *Automatica*, 2017, 78: 223 – 230.

[32] LU J Q, LI H T, LIU Y, et al. Survey on semi-tensor product method with its applications in logical networks and other finite-valued systems. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(13): 2040 – 2047.

[33] ZHU Q X, LIU Y, LU J Q, et al. On the optimal control of Boolean control networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2018, 56(2): 1321 – 1341.

[34] FORNASINI E, VALCHER M. Optimal control of Boolean control networks. *IEEE Transcations on Automatic Control*, 2014, 59(5): 1258 – 1270.

[35] CHENG D Z, ZHAO Y, XU T T. Receding horizon based feedback optimization for mix-valued logical networks. *IEEE Transcations on Automatic Control*, 2015, 60(12): 3362 – 3366.

[36] WU Y H, SHEN T L. An algebraic expression of finite horizon optimal control algorithm for stachastic logical dynamical systems. *Systems & Control Letters*, 2015, 82: 108 – 114.

[37] WANG Yuanhua, LIU Xiyu. Dynamics and optimization of control networked evolutionary games with local information. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(2): 279 – 285.
(王元华, 刘希玉. 局部信息约束下网络演化博弈的动力学与优化. 控制理论与应用, 2019, 36(2): 279 – 285.)

[38] SHMULEVICH I, DOUGHERTY E, KIM S, et al. Probabilistic Boolean networks: a rule-based uncertainty model for gene regulatory networks. *Bioinformatics*, 2002, 18(2): 261 – 274.

[39] SHMULEVICH I, DOUGHERTY E, ZHANG W. From Boolean to probabilistic Boolean networks as models of genetic regulatory networks. *Proceedings of the IEEE*, 2002, 90(1): 1778 – 1792.

[40] LIU Y, CHEN H W, LU J Q, et al. Controllability of probabilistic Boolean control networks based on transition probability matrices. *Automatica*, 2015, 52: 340 – 345.

[41] DING Xueying, LI Haitao. Set stabilization of probabilistic cascading Boolean networks and its applications. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(2): 271 – 278.
(丁雪莹, 李海涛. 概率级联布尔网络的集镇定及其应用. 控制理论与应用, 2019, 36(2): 271 – 278.)

[42] WU Y H, KUMAR M, SHEN T L. A stochastic logical system approach to model and optimal control of cyclic variation of residual gas fraction in combustion engines. *Applied Thermal Engineering*, 2016, 93(8): 251 – 259.

[43] ZHAO Y, KRISHNAN J. Probabilistic Boolean network modelling and analysis framework for mRNA translation. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology & Bioinformatics*, 2016, 13(4): 754 – 766.

[44] LAYEK R, DATTA R, PAL R, et al. Adaptive intervention in probabistic Boolean networks. *Bioinformatics*, 2009, 25(16): 2042 – 2048.

[45] KOBAYASHI K, HIRAISHI K. Optimal control of gene regulatory networks with effectiveness of multiple drugs: a Boolean network approach. *BioMed Research International*, 2013, DOI: 10.1155/2013/246761.

作者简介:

李雅璐 博士研究生, 目前研究方向为逻辑动态系统理论, E-mail: 18366138129@163.com;

李海涛 教授, 博士生导师, 第18届“关肇直奖”(2012年)获奖论文作者, 目前研究方向为有限值系统分析与控制, E-mail: haitaoli09@gmail.com;

丁雪莹 硕士研究生, 目前研究方向为随机演化博弈理论, E-mail: 18366137906@163.com.