

French-DeGroot 社会网络模型的结构辨识与参数估计

董艳萍¹, 任晓涛¹, 赵文斌^{1,2†}

(1. 中国科学院 数学与系统科学研究院 系统控制重点实验室, 北京 100190;

2. 中国科学院大学 数学科学学院, 北京 100049)

摘要: 近年来社会网络的研究受到越来越多的关注. 本文研究基于 French-DeGroot 模型的社会网络参数和结构辨识问题, 通过网络中个体所持的观点来判断个体间是否存在影响关系, 进一步估计个体之间影响的大小. 具体而言: 假设网络存在固执个体(stubborn agents)和非固执个体(non-stubborn agents)两类, 当固执个体的观点为零均值独立同分布随机变量序列时, 利用最小二乘算法估计网络未知参数, 证明了估计的强一致性并给出收敛速度; 进一步, 构造结构辨识算法判断个体间是否存在影响关系, 证明了结构辨识算法的有限时间收敛性. 最后给出仿真例子验证算法的有效性.

关键词: 社会网络; 最小二乘算法; 参数估计; 结构辨识

引用格式: 董艳萍, 任晓涛, 赵文斌. French-DeGroot 社会网络模型的结构辨识与参数估计. 控制理论与应用, 2019, 36(11): 1905 – 1911

DOI: 10.7641/CTA.2019.90648

Structure inference and parameter identification for French-DeGroot type of social networks

DONG Yan-ping¹, REN Xiao-tao¹, ZHAO Wen-xiao^{1,2†}

(1. Key Laboratory of Systems and Control, Academy of Mathematics and Systems Science,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: In recent years, the research on social networks has attracted much attention. In this paper we consider the parameter and structure identification of social networks based on the French-DeGroot model. We assume that there are two types of agents in the network, i.e., stubborn agents and non-stubborn agents. Based on the assumption that the opinions of the stubborn agents are a sequence of independent and identically distributed random variables with zero expectation, the parameter matrix of the French-DeGroot model is recursively estimated by the least-square algorithm, and strong consistency of estimates as well as convergence rate are established. Then structure identification algorithm for the network is proposed and it is proved that with the estimates we can infer the structure of the network, i.e., whether mutual influence existing between agents can be exactly identified with finite number of observations. Finally, numerical examples are given to testify performance of the algorithms.

Key words: social network; least squares algorithm; parameter estimation; structure identification

Citation: DONG Yanping, REN Xiaotao, ZHAO Wenxiao. Structure inference and parameter identification for French-DeGroot type of social networks. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(11): 1905 – 1911

1 引言

社会网络是由很多个体及其之间的影响关系组成的复杂系统. 个体之间通过这些关系互相影响, 从而产生了复杂的社会现象. 社会网络广泛存在于日常生

活中, 比如手机社交网络, 个人与亲人、朋友、同事、陌生人等之间复杂的社会关系所组成的网络等. 通常社会网络的个体数量大, 个体间的关系比较复杂, 并且个体间的关系随着时间的变化也在不断更新, 通

收稿日期: 2019-08-03; 录用日期: 2019-11-29.

†通信作者. E-mail: wxzhao@amss.ac.cn.

本文责任编辑: 刘淑君.

国家重点研发计划资助项目“不确定性系统智能控制的基础数学理论与方法”(2018YFA0703800), 国家自然科学基金项目(61822312, 61573345)资助.

Supported by the National Key Research and Development Program of China (2018YFA0703800) and the National Natural Science Foundation of China(61822312, 61573345).

过研究社会网络,可以提前预测和调整群体的观点演化过程,社交软件的负责人通过预测网络中个体之间的关系能更好地运营社交软件、增加用户量和活跃度等,所以社会网络的研究有重要的科学意义和实用价值.近年来,社会网络的研究得到越来越多的关注,相关研究包括网络建模^[1-14]、个体观点的演化^[15-23]、网络的参数估计和结构辨识^[24-30]等.本文研究基于French-DeGroot模型的社会网络的参数和结构辨识.

文献[24]给出了存在固执个体情形下French-DeGroot社会网络的参数估计方法,先将社会网络模型参数估计的问题转化为一个稀疏矩阵的恢复问题,即 l_0 最小化问题,由于 l_0 优化是NP困难的,文中给出了当参数矩阵满足一定条件时,通过求解凸优化问题来完成参数估计.文献[25]考虑了Friedkin-Johnsen模型参数矩阵的辨识,即当参数矩阵满足稀疏、随机、对称、非周期、不可约等条件,且个体自身固有观点(或称偏见)对应的参数矩阵 A 是对角矩阵的条件下,当话题数量足够多时,只需收集个体对这些话题最终的观点和个体自身对话题的固有观点即可通过求解优化问题来得到参数矩阵的估计.文中证明了所需话题数量严格小于网络中个体的数量,但在某些情况下,比如网络中个体数量非常多时,所需数据的采集仍然非常困难.文献[26]针对Friedkin-Johnsen模型,提出了只需收集个体观点的局部信息来估计模型参数的算法,比如个体对某些话题初始时刻的观点和最终的观点.文中利用向量自回归过程估计的已有结果,从相互作用的个体局部观测入手,重构了网络拓扑,消除了文献中需要收集个体所有时刻观点的不足.文献[27]通过求解模型中参数矩阵的稀疏性和谱信息等满足一定条件时的优化问题从而得到网络参数矩阵的估计值.文献[28]基于STC假设(strong triadic closure,意指若个体 i 分别对个体 j 和个体 m 都有很强的影响关系,那么个体 j 和个体 m 之间也互相影响),根据已知的网络拓扑结构推断个体间影响关系及强度,将影响强度的估计转化为优化问题,并提出最优解的两种近似求解算法.文献[29]进一步完善了文献[28]的工作,通过求解一系列线性松弛问题来推断个体间的影响关系及强弱.

上述辨识方法尚待完善的地方包括:第一,上述文献中通常假设社会网络的参数矩阵是稀疏的并采用压缩感知理论与方法来估计参数和推断网络结构,但经典的压缩感知理论与方法不能保证估计结果是真实的参数矩阵.第二,需要通过观测网络中个体对很多个话题的观点并记录所有个体对不同话题的初始观点及最终观点等信息才能完成辨识,然而在现实条件下由于网络维数、观测手段等制约,这些信息的获取并不容易.本文研究基于French-DeGroot模型的社

会网络参数和结构辨识,基于模型的线性性,首先采用递推的最小二乘算法来估计参数,证明了估计的强一致性并给出收敛速度;在此基础上构造结构辨识算法,精确地判断个体间是否存在影响关系,证明了结构辨识算法的有限时间收敛性,进而建立网络的拓扑结构.

2 模型及问题描述

考虑 r 个个体组成的网络,广义French-DeGroot模型表述如下:

$$X(k+1) = ZX(k) + U(k+1), \quad k=0, 1, \dots, \quad (1)$$

其中非负矩阵 Z 表示网络节点之间的链接矩阵,所谓非负矩阵是指矩阵的每个分量均非负,

$$X(k) = (X^{(1)}(k) \ \dots \ X^{(r)}(k))^T \in \mathbb{R}^r, \quad k \geq 0 \quad (2)$$

表示社会网络中所有个体在 k 时刻的观点所组成的向量, $X^{(i)}(k) \in \mathbb{R}$ 表示个体 i 在 k 时刻所持观点,其中 $1 \leq i \leq r, k \geq 0$,

$$U(k) = (U^{(1)}(k) \ \dots \ U^{(r)}(k))^T, \quad k \geq 0$$

表示外界信息对网络各个节点观点的影响.

假设网络中的个体分为两类: m 个固执个体(stubborn agent,例如新闻门户网站等)和 n 个非固执个体(non-stubborn agent,例如个体网络用户等), $m+n=r$.所谓固执个体是指其自身观点不受网络其他个体观点的影响,非固执个体是指不持固有观点、但其观点受其他个体观点的影响.本文进一步假设,非固执个体不受外界信息(即 $U(k)$)的影响.在此假设下模型(1)改写如下:

$$\begin{pmatrix} X_s(k+1) \\ X_{ns}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_s(k) \\ X_{ns}(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_s(k+1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$k=0, 1, \dots$, 其中: $X_s(k) \in \mathbb{R}^m$ 表示网络中 m 个固执个体在时刻 k 所持观点, $U_s(k) \in \mathbb{R}^m$ 表示外界信息对固执个体观点的影响, $X_{ns}(k) \in \mathbb{R}^n$ 表示 n 个非固执个体在时刻 k 所持观点, 参数矩阵 $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示非固执个体之间的影响关系, 参数矩阵 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 表示固执个体对非固执个体的影响.由上式可得

$$X_{ns}(k+1) = DX_{ns}(k) + BX_s(k). \quad (4)$$

本文进一步假设 $A=0$,即固执个体观点仅受当前时刻外界信息的影响,从而模型(1)的辨识转化为对模型(4)中未知参数矩阵 B 和 D 的辨识,具体而言:
1) 估计 B 和 D 中的各个分量,从而得到网络个体之间相互影响的强度,为叙述方便,简称“参数估计”;
2) 推断 B 和 D 中的零元和非零元,从而重构网络拓扑结构,为叙述方便,简称“结构辨识”.

3 辨识算法及其收敛性

3.1 参数估计算法及强一致收敛性

记

$$\theta = \begin{pmatrix} D^T \\ B^T \end{pmatrix}, \varphi_k = (X_{ns}^T(k) \ X_s^T(k))^T.$$

模型(4)可化为

$$X_{ns}(k+1) = \theta^T \varphi_k. \quad (5)$$

注意到模型(5)的线性性, 许多线性系统的辨识算法可以用来估计未知参数 θ . 本文采用经典的递推最小二乘算法估计未知参数, 算法如下:

$$\theta_{t+1} = \theta_t + a_t P_t \varphi_t (X_{ns}(t+1) - \theta_t^T \varphi_t), \quad (6)$$

$$P_{t+1} = P_t - a_t P_t \varphi_t \varphi_t^T P_t, \quad (7)$$

$$a_t = (1 + \varphi_t^T P_t \varphi_t)^{-1}. \quad (8)$$

算法初值 θ_0 可为任意常数矩阵, $P_0 = \varepsilon I$, 其中 $\varepsilon > 0$ 为常数.

考虑到固执个体观点虽不受其他个体观点的影响, 但其本身随着时间的变化会有波动这一客观现实, 对网络系统(4)做如下假设:

A1) 每个非固执个体都受到至少一个固执个体的影响.

A2) 固执个体所持的观点 $\{U_s(k), k=0, 1, \dots\}$ 是零均值、独立同分布随机变量序列, 且矩阵

$$E(U_s(k)U_s(k)^T) \triangleq R > 0.$$

A3) 特征多项式 $A(z) \triangleq I - Dz$ 和 zB 左互质, 其中 z 为后移算子, 即 $z\varphi_k = \varphi_{k-1}$.

A4) (D, B) 行满秩.

A5) D 所对应的图强连通.

注 1 假设条件A2)意味着固执个体的观点虽不受其他个体观点影响, 但其自身观点可以随时间波动; 假设条件A3)和A4)蕴含着网络系统(1)所对应传递函数的唯一性.

引理 1 假设A1)和A5)成立, 则矩阵 D 稳定.

证 由A1)可知, 对每个节点 $i(1 \leq i \leq r)$, 都存在 $j(1 \leq j \leq r)$ 使得 j 行的行和小于1. 由A5)可知任意两个个体 i 与 j 之间都存在路径, 所以 D 的稳定性由附录引理A立得. 证毕.

在证明最小二乘算法收敛性之前, 需要如下两个引理, 其证明关键依赖于引理1所建立的矩阵 D 的稳定性. 由于篇幅所限, 其证明从略.

引理 2 假设A1)–A5)成立, 则

$$\lambda_{\min}(\sum_{i=0}^t \varphi_i \varphi_i^T) > ct \quad \text{a.s.}, \quad (9)$$

其中常数 $c > 0$ 可能依赖样本轨道.

引理 3 假设A1)–A5)成立, 则

$$\lambda_{\max}(\sum_{i=0}^t \varphi_i \varphi_i^T) = O(t) \quad \text{a.s.}$$

定理 1 如果A1)–A5)成立, 则算法(6)–(8)具有强一致收敛性, 且有如下收敛速度

$$\|\theta - \theta_{t+1}\| = O(\sqrt{\frac{\ln(t)}{t}}) \quad \text{a.s.}$$

证 由文献[32]定理4.1可知

$$\|\theta - \theta_{t+1}\|^2 = O(\frac{\ln(\lambda_{\max}(t))}{\lambda_{\min}(t)}),$$

其中 $\lambda_{\max}(t)$ 和 $\lambda_{\min}(t)$ 分别为矩阵 $\sum_{i=0}^t \varphi_i \varphi_i^T$ 的最大和最小特征值. 因此由引理2和引理3, 定理1的结论立得. 证毕.

注 2 定理1建立了网络节点之间相互影响强度的强一致估计, 即随着观测数据增多, 估计值渐近收敛到参数真实值. 实际中通常仅能获得有限的数据量, 且由于随机、不确定性等因素影响, 有限数据所得的估计值难以精确判断其极限是否为零, 即节点之间是否存在相互影响关系. 为此, 还需构造结构辨识算法, 精确判断节点之间是否存在相互影响, 从而重构网络拓扑.

3.2 结构辨识算法及有限步收敛性

由模型(5), 每个非固执个体观点的更新规则可表示如下:

$$X_{ns}^{(i)}(k+1) = (d_{i1} \ \cdots \ d_{in} \ b_{i1} \ \cdots \ b_{im}) \cdot (X_{ns}^T(k) X_s^T(k))^T, \quad (10)$$

其中: $X_{ns}^{(i)}(k)$ 是 $X_{ns}(k)$ 的第 i 个分量, d_{ij} 和 b_{ij} 表示矩阵 D 和 B 的 (i, j) 元素.

令

$$\theta_i = (d_{i1} \ \cdots \ d_{in} \ b_{i1} \ \cdots \ b_{im})^T,$$

则式(10)可表示为

$$X_{ns}^{(i)}(k+1) = \theta_i^T \varphi_k. \quad (11)$$

由式(11)可见, 分别对每个个体 i 辨识参数向量 θ_i 中的零元和非零元, 进而可以推断整个网络个体之间是否存在相互影响关系.

假设 θ_i 中有 d 个非零元, 不失一般性, 设 $\theta_i(1) \neq 0, \dots, \theta_i(d) \neq 0, \theta_i(d+1) = \dots = \theta_i(r) = 0$.

对每个节点 i , 分别构造如下凸优化辨识算法:

$$J_{t+1,i}(\beta_i) \triangleq \sum_{k=1}^t (X_{ns}^{(i)}(k+1) - \beta_i^T \varphi_k)^2 + \gamma_t \sum_{j=1}^r \frac{1}{|\bar{\theta}_{t,i}(j)|} |\beta_i(j)|, \quad (12)$$

$$\beta_{t+1,i} \triangleq \operatorname{argmin}_{\beta_i \in \mathbb{R}^i} J_{t+1,i}(\beta_i). \quad (13)$$

其中: $\beta_i = (\beta_i(1) \cdots \beta_i(r))^T$ 为待优化变量, γ_t 为 L_1 惩罚项的加权系数, $\bar{\theta}_{t,i}(j)$ 定义如下:

$$\bar{\theta}_{t,i}(j) \triangleq \theta_{t,i}(j) + \varepsilon_t \text{sgn}(\theta_{t,i}(j)), \quad (14)$$

其中 $\varepsilon_t = \sqrt{\ln t/t}$, $\theta_{t,i}(j)$, $j = 1, \dots, r$ 是由递推最小二乘算法(6)–(8)所得 θ_i 各个分量的估计值.

注3 注意式(12)所定义的 $J_{t+1,i}(\beta)$ 为凸函数, 优化 $J_{t+1,i}(\beta)$ 所得 $\beta_{t+1,i}$ 作为网络参数向量 θ_i 的估计, 基于 $\beta_{t+1,i}$ 中的零元可以推断网络相应节点之间不存在相互影响, 而非零元可以推断网络相应节点之间相互影响的强度. 注意 $\bar{\theta}_{t,i}(j)$ 出现在式(12)分母, 式(14)对最小二乘算法所得估计值做修正, 使式(12)分母非零、从而算法有意义. 不妨假设 $\theta_i(j) = 0$, 由最小二乘算法的收敛性可知, $\bar{\theta}_{t,i}(j) \rightarrow 0$ 并且 $\frac{1}{|\bar{\theta}_{t,i}(j)|} \rightarrow \infty$, 为使目标函数(12)达极小, 相应的极小值

点应满足 $\beta_{t+1,i}(j) = 0$. 因而凸优化算法(12)得到的估计值具有稀疏性, 能够精确判断节点之间是否存在相互影响, 进而重构网络拓扑.

在证明结构辨识算法的收敛性之前, 引入如下假设条件:

A2') $\{U_s(k), k = 0, 1, \dots\}$ 是零均值、独立同分布随机变量序列, 且满足 $E(U_s(k)U_s^T(k)) \triangleq R > 0$, 其密度函数在集合 $U \in \mathcal{B}^r$ 是正的且连续的, 满足 $\mu_r(U) > 0$, 其中 $\mu_r(\cdot)$ 是 $(\mathbb{R}^r, \mathcal{B}^r)$ 上的 Lebesgue 测度, 且存在 $\varepsilon > 0$, $U_s(k)$ 的 $4 + 2\varepsilon$ 阶矩是有限的.

A6) γ_t 满足 $\gamma_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, $\frac{\gamma_t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, $\frac{\gamma_t}{t\varepsilon_t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$.

A7) (D, B) 能控.

引理4 假设 A1) A2') A3)–A7) 成立, 则 $\{X_{ns}(k)\}_{k \geq 1}$ 是 α 混合的, 且混合系数满足 $\alpha(k) \leq c\rho^k$, $c > 0$, $\rho \in (0, 1)$.

证 混合相依性意味着 $X_{ns}(k)$ 与 $X_{ns}(k+h)$ 随着时间间隔的增大渐近独立. 注意矩阵 D 稳定且 (D, B) 能控, 利用假设条件 A2') 以及文献 [33] 定理 1.4.4 可得. 证毕.

由于篇幅所限, 详细证明从略.

利用 $\{X_{ns}(k)\}_{k \geq 1}$ 的 α 混合相依性, 可证得如下结论:

引理5 假设 A1) A2') A3)–A7) 成立, 记

$$W_t \triangleq \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \varphi_k \varphi_k^T,$$

则 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$W_t \rightarrow W \quad \text{a.s.}, \quad (15)$$

其中 W 是正定的常数矩阵.

定理2 假设 A1) A2') A3)–A7) 成立, 则存在一个 ω -集合 Ω_0 , 满足 $P\{\Omega_0\} = 1$, 对任意的 $\omega \in \Omega_0$, 存在一个正整数 $t_0(\omega)$, 使得式 (13) 得到的估计值

$\{\beta_{t+1,i}, 1 \leq i \leq r\}_{t \geq 1}$ 有如下结论成立:

$$\begin{aligned} \beta_{t+1,i}(d+1) &= \cdots = \beta_{t+1,i}(r) = 0, \quad t \geq t_0(\omega), \\ (\beta_{t+1,i}(1), \dots, \beta_{t+1,i}(d)) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} (\theta_i(1), \dots, \theta_i(d)). \end{aligned}$$

证 定义以 μ_i 为变元的目标函数

$$\begin{aligned} \bar{J}_{t+1,i}(\mu_i) &\triangleq J_{t+1,i}(\theta_i + \mu_i) - J_{t+1,i}(\theta_i) = \\ &\sum_{k=1}^t (X_{ns}^{(i)}(k+1) - (\theta_i + \mu_i)^T \varphi_k)^2 + \\ &\gamma_t \sum_{j=1}^r \frac{1}{|\bar{\theta}_{t,i}(j)|} |\theta_i(j) + \mu_i(j)| - \\ &\sum_{k=1}^t (X_{ns}^{(i)}(k+1) - \theta_i^T \varphi_k)^2 - \\ &\gamma_t \sum_{j=1}^r \frac{1}{|\bar{\theta}_{t,i}(j)|} |\theta_i(j)|. \end{aligned} \quad (16)$$

$\bar{J}_{t+1,i}(\mu)$ 的极小值点记作 $\mu_{t+1,i} = (\mu_{t+1,i}(1) \cdots \mu_{t+1,i}(d) \cdots \mu_{t+1,i}(r))^T$. 直接验证可知, 其与 $J_{t+1,i}(\beta)$ 的极小值点 $\beta_{t+1,i}$ 满足下述关系:

$$\beta_{t+1,i} = \theta_i + \mu_{t+1,i}. \quad (17)$$

注意 $\theta_i(j) = 0, j = d+1, \dots, r$, 由式(16)和(11), 以及 $\beta_{t+1,i}$ 的定义可得

$$\begin{aligned} \bar{J}_{t+1,i}(\mu_{t+1,i}) &= \\ \mu_{t+1,i}^T \sum_{k=1}^t \varphi_k \varphi_k^T \mu_{t+1,i} + \\ \gamma_t \sum_{j=1}^d \frac{1}{|\bar{\theta}_{t,i}(j)|} (|\theta_i(j) + \mu_{t+1,i}(j)| - |\theta_i(j)|) + \\ \gamma_t \sum_{j=d+1}^r \frac{1}{|\bar{\theta}_{t,i}(j)|} |\mu_{t+1,i}(j)| &< 0. \end{aligned} \quad (18)$$

另一方面, 由引理2可得

$$\mu_{t+1,i}^T \sum_{k=1}^t \varphi_k \varphi_k^T \mu_{t+1,i} \geq ct \|\mu_{t+1,i}\|^2. \quad (19)$$

由三角不等式和定理1, 注意到 $\theta_i(j) \neq 0, j = 1, \dots, d$, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^d \frac{1}{|\bar{\theta}_{t,i}(j)|} (|\theta_i(j) + \mu_{t+1,i}(j)| - |\theta_i(j)|) \right| &\leq \\ c \sum_{j=1}^d |\mu_{t+1,i}(j)| &\leq c \|\mu_{t+1,i}\|. \end{aligned} \quad (20)$$

将式(19)和(20)代入式(18)中, 可得

$$\begin{aligned} 0 &> \bar{J}_{t+1,i}(\mu_{t+1,i}) > \\ ct \|\mu_{t+1,i}\|^2 - c\gamma_t \|\mu_{t+1,i}\| &= \\ \|\mu_{t+1,i}\| (ct \|\mu_{t+1,i}\| - c\gamma_t). \end{aligned} \quad (21)$$

由式(21)和假设 A6), 可得

$$\|\mu_{t+1,i}\| \leq \frac{\gamma_t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \quad (22)$$

因此

$$\beta_{t+1,i} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \theta_i. \quad (23)$$

下面证明存在正常数 t_i , 使得对任意的 $t > t_i$ 都有 $\mu_{t+1,i}(j) = 0, j = d+1, \dots, r$.

假设不然, $\{\mu_{t+1,i}(j), j = d+1, \dots, r\}$ 中至少存在一个非零元素, 记其中一个非零元素为 $\mu_{t+1,i}(l), l \in \{d+1, \dots, r\}$. 不妨设 $\mu_{t+1,i}(l) > 0$.

式(16)对 $\mu_{t+1,i}(l)$ 求导, 有

$$0 = \frac{\partial \bar{J}_{t+1,i}(\mu_i)}{\partial \mu_i(l)} \Big|_{\mu_i(l)=\mu_{t+1,i}(l)} = 2 \sum_{s=1}^r \left(\sum_{k=1}^t \varphi_k \varphi_k^T(l, s) \cdot \mu_{t+1,i}(s) + \gamma_t \frac{1}{|\bar{\theta}_{t,i}(l)|} \right). \quad (24)$$

注意到 $W_t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \varphi_k \varphi_k^T$, 式(24)可写为

$$\sum_{s=1}^r W(l, s) \cdot \mu_{t+1,i}(s) + \sum_{s=1}^r (W_t - W)(l, s) \cdot \mu_{t+1,i}(s) = -\frac{\gamma_t}{2t} \frac{1}{|\bar{\theta}_{t,i}(l)|}.$$

由式(14)和定理1, 有

$$\varepsilon_t \leq |\bar{\theta}_{t,i}(l)| \leq c\varepsilon_t, \quad (25)$$

其中 $c > 1$. 由式(22)和引理5可得

$$\sum_{s=1, s \neq l}^r W(l, s) \cdot \mu_{t+1,i}(s) = o(1), \quad (26)$$

$$\sum_{s=1}^r (W_t - W)(l, s) \cdot \mu_{t+1,i}(s) = o\left(\frac{\gamma_t}{t}\right). \quad (27)$$

根据式(25)–(27)及假设A6), 存在充分小的 $\sigma_i > 0$ 和正整数 t_i , 使得

$$\begin{aligned} W(l, l) \mu_{t+1,i}(l) &= -\frac{\gamma_t}{2t} \frac{1}{|\bar{\theta}_{t,i}(l)|} - \sum_{s=1}^r (W_t - W)(l, s) \cdot \mu_{t+1,i}(s) - \\ &\sum_{s=1, s \neq l}^r W(l, s) \cdot \mu_{t+1,i}(s) < \\ &-\frac{\gamma_t}{2ct\varepsilon_t} + \sigma_i \frac{\gamma_t}{t} + \sigma_i < 0. \end{aligned}$$

这与假设 $\mu_{t+1,i}(l) > 0$ 矛盾. 同理也可证明假设 $\mu_{t+1,i}(l) < 0$ 不成立, 因此 $\mu_{t+1,i}(l) = 0$, 即 $\mu_{t+1,i}(j) = 0, j = d+1, \dots, r$. 利用类似的分析, 可得对任意 i , 都存在正常数 t_i , 使得对任意的 $t > t_i$, 都有

$\mu_{t+1,i}(j) = 0, j = d+1, \dots, r$. 取 $t_0 = \max t_i, i = 1, \dots, r$, 根据式(23)即可证明结论. 证毕.

注 4 对每个节点都执行上述凸优化算法, 从而可推断网络参数矩阵 (D, B) 的零元和非零元, 进而得到网络的拓扑结构. 注意网络参数矩阵的零元对应的估计值精确为零, 且到当数据充分多以后都成立, 称之为结构辨识算法的有限步收敛性.

4 仿真

例 1 考虑网络中存在 3 个非固执个体和 1 个固执个体, 且固执个体的观点是相互独立、在 $(-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ 上均匀分布随机变量序列. 给定网络参数矩阵

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

在递推的最小二乘算法中, 初值 $P_0 = I$; 在结构辨识

算法中, 取 $\varepsilon_t = \sqrt{\frac{\ln 200 t}{5 t}}, \gamma_t = t^{3/4}$. 分别画出由递推最小二乘算法做参数估计时得到的归一化均方误差 NMSE (normalized mean square error) 随仿真步数增加的变化曲线图和由结构辨识算法得到的估计值随仿真步数增加的变化曲线图(图1和图2), 其中归一化均方误差定义如下:

$$\text{NMSE} = \|\theta_t - \theta\|^2 / \|\theta\|^2,$$

θ_t 表示算法得到的参数估计值.

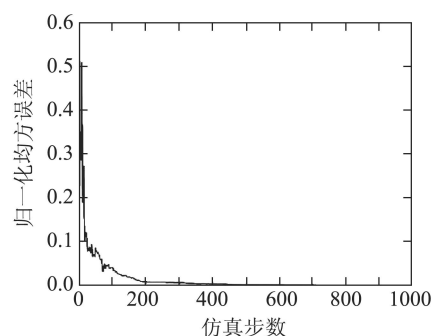
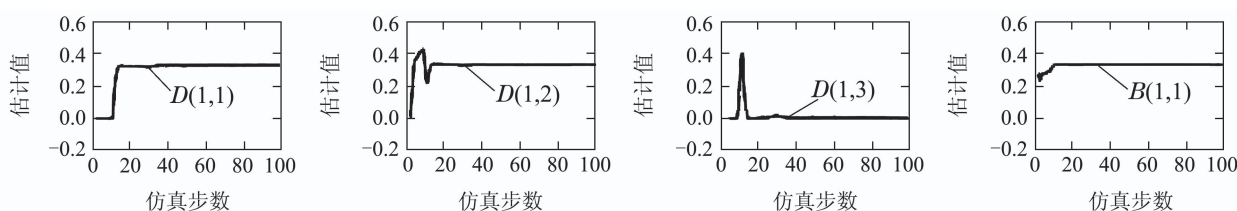


图 1 估计归一化均方误差

Fig. 1 Normalized mean square error of estimates



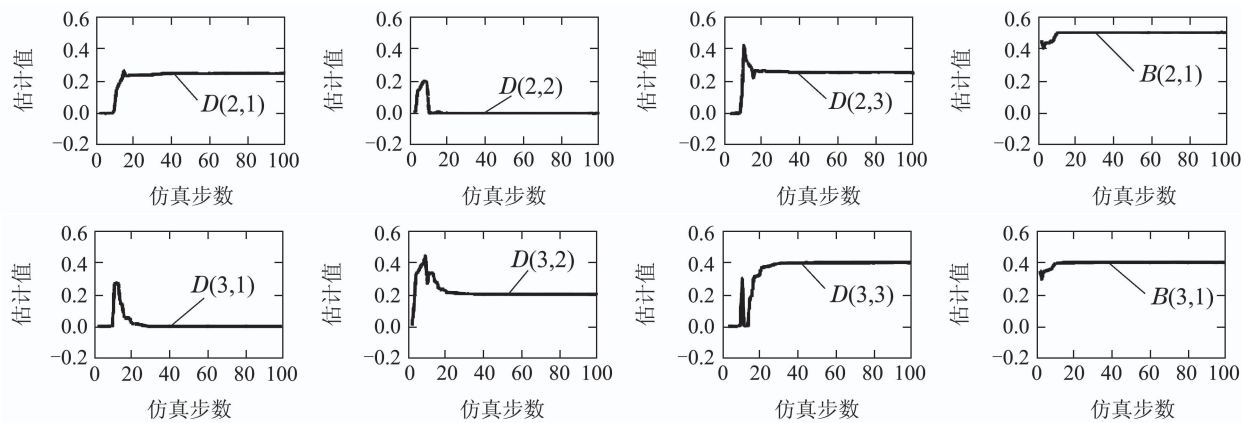


图 2 结构辨识算法所得估计值

Fig. 2 Estimates from structure identification algorithm

例 2 从Facebook社交网络数据集(<https://snap.stanford.edu/data/egonets-Facebook.html>)中的 SNAP Datasets中, 选择 ego-Facebook 网络来验证算法有效性, 网络节点数 $|\mathcal{V}| = 234$, 对应的图是无向图, 选取固执个体和非固执个体, 进而验证辨识算法, 具体构造过程如下:

首先, 从图中选择度最大的点作为固执个体1, 再从去掉这个点的网络中找度最大的点做固执个体2, 重复上述操作, 依次找出固执个体, 直至整个网络中其他个体都受到至少一个固执个体的影响. 共找到82个固执个体, 152个非固执个体.

第二, 将234个网络节点通过横纵坐标随机定位, 进而得到网站数据所表示的社会网络图.

第三, 对网络链接矩阵赋值, 具体而言, 如果个体 i 和个体 j 存在链接, 取 $W_{i,j} = \frac{1}{d_i}$, 其中 d_i 表示点 i 的度, 否则取 $W_{i,j} = 0$.

为了展示辨识算法效果, 计算真正例率(the true positive rate)、假正例率(the false positive rate)、假反例率(the false negative rate)和真反例率(the true negative rate), 见表1. 其中真正例率表示真实参数矩阵中元素为零, 估计值也为零的的比率; 假正例率表示真实参数矩阵中元素非零, 估计值为零的比率; 假反例率表示真实参数矩阵中元素为零, 估计值为非零的比率; 真反例率表示真实参数矩阵中元素非零, 估计值也为非零的比率. 通过仿真, 进一步验证了算法的有效性.

表 1 估计效果表

Table 1 Performance of Algorithm			
真正例率	假正例率	假反例率	真反例率
93%	13%	7%	87%

5 总结

本文研究了基于French-DeGroot模型的社会网络

参数估计与结构辨识, 证明了参数估计算法的强一致收敛性并给出收敛速度, 证明了结构辨识算法的有限步收敛性, 进而可以重构网络拓扑. 本文假设固执个体的观点为独立同分布随机序列, 这是较为苛刻的条件, 如何放宽是值得深入研究的课题.

参考文献:

[1] ANDERSON B D O, YE M. Recent advances in the modelling and analysis of opinion dynamics on influence networks. *International Journal of Automation and Computing*, 2019, 16(2): 129 – 149.

[2] BULLO F, FRIEDKIN N E. Perspectives on network systems and mathematical sociology. *Uncertainty in Complex Networked Systems*. Cham: Springer International Publishing, 2018: 399 – 417.

[3] EASLEY D, KLEINBERG J. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.

[4] FRENCH J R J. A formal theory of social power. *Social Networks*, 1977, 63(3): 35 – 48.

[5] ABELSON R P. Mathematical models of the distribution of attitudes under controversy. FREDERIKSEN N, GULLIKSEN H. *Contributions to Mathematical Psychology*. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1964: 142 – 160.

[6] TAYLOR M. Towards a mathematical theory of influence and attitude change. *Human Relations*, 1968, 21(2): 121 – 139.

[7] PROSKURNIKOV A V, TEMPO R. A tutorial on modeling and analysis of dynamic social networks, Part 1. *Annual Reviews in Control*, 2017, 43: 65 – 79.

[8] DEGROOT M H. Reaching a consensus. *Journal of the American Statistical Association*, 1974, 69(345): 118 – 121.

[9] HARARY F. *A criterion for unanimity in French's theory of social power*. Ann Arbor: University of Michigan, 1959: 168 – 182.

[10] KRAUSE U. A discrete nonlinear and non-autonomous model of consensus formation. *Communications in Difference Equations, Proceedings of the Fourth International Conference on Difference Equations*. Poznan, Poland: Elsevier, 2000: 227 – 236.

[11] FRANXESCO B. *Lectures on Network Systems*. Charleston: Create Space, 2018.

[12] FRIEDKIN N E, JOHNSEN E C. Influence networks and opinion change. *Advances in Group Processes*, 1999, 16(1): 1 – 29.

[13] FRIEDKIN N E. *A Structural Theory of Social Influence*. New York: Cambridge University Press, 1998.

- [14] FRIEDKIN N E, JOHNSEN E C. Social influence and opinions. *Journal of Mathematical Sociology*, 1990, 15(3/4): 193 – 205.
- [15] ACEMOGLU D, OZDAGLAR A, PARANDEHGHEIBI A. Spread of (mis) information in social networks. *Games and Economic Behavior*, 2010, 70(2): 194 – 227.
- [16] GALE D, KARIV S. Bayesian learning in social networks. *Games and Economic Behavior*, 2003, 45(2): 329 – 346.
- [17] GOLUB B, JACKSON M O. Naive learning in social networks and the wisdom of crowds. *American Economic Journal: Microeconomics*, 2010, 2(1): 112 – 149.
- [18] GOSLING S D, AUGUSTINE A A, VAZIRE S, et al. Manifestations of personality in online social networks: Self-reported Facebook-related behaviors and observable profile information. *Cyberpsychology, Behavior, and Social Networking*, 2011, 14(9): 483 – 488.
- [19] FRIEDKIN N E. The problem of social control and coordination of complex systems in sociology: A look at the community cleavage problem. *IEEE Control Systems Magazine*, 2015, 35(3): 40 – 51.
- [20] KURAHASHI-NAKAMURA T, MÄS M, LORENZ J. Robust clustering in generalized bounded confidence models. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 2016, 19(4): 7.
- [21] XIA W G, CAO M. Clustering in diffusively coupled networks. *Automatica*, 2011, 47(11): 2395 – 2405.
- [22] ABELSON R P. *Mathematical Models in Social Psychology*. New York: Elsevier, 1967: 1 – 54.
- [23] AEYELS D, DE S F. Cluster formation in a time-varying multi-agent system. *Automatica*, 2011, 47(11): 2481 – 2487.
- [24] WAI H T, SCAGLIONE A, LESHEM A. Active sensing of social networks. *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, 2016, 2(3): 406 – 419.
- [25] RAVAZZI C, TEMPO R, DABBENE F. Learning influence structure in sparse social networks. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2018, 5(4): 1976 – 1986.
- [26] RAVAZZI C, HOJJATINIA S, LAGO A C M, et al. Randomized opinion dynamics over networks: influence estimation from partial observations. *Proceedings of IEEE 57th Annual Conference on Decision and Control*. Miami Beach, FL, USA: IEEE, 2018: 17 – 19.
- [27] SEGARRA S, SCHAUB M T, JADBABAIE A. Network inference from consensus dynamics. *Proceedings of IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control*. Melbourne, Australia: IEEE, 2017: 3212 – 3217.
- [28] SINTOS S, TSAPARAS P. Using strong triadic closure to characterize ties in social networks. *Proceedings of the 20th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. New York: ACM Press, 2014: 1466 – 1475.
- [29] ADRIAENS F, DE B T, GIONIS A, et al. From acquaintance to best friend forever: robust and fine-grained inference of social tie strengths. arXiv preprint arXiv:1802.03549, 2018.
- [30] ROZENSHTAIN P, TATTI N, GIONIS A. Inferring the strength of social ties: a community-driven approach. *Proceedings of the 23rd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. Halifax, Canada: ACM Press, 2017: 1017 – 1025.
- [31] FRASCA P, RAVAZZI C, TEMPO R, et al. Gossips and prejudices: ergodic randomized dynamics in social networks. *IFAC Proceedings Volumes*, 2013, 46(27): 212 – 219.
- [32] CHEN H F, GUO L. *Identification and Stochastic Adaptive Control*. Boston, MA: Birkhauser, 1991.
- [33] CHEN H F, ZHAO W X. *Recursive Identification and Parameter Estimation*. Boca Raton: CRC Press, 2014.
- [34] ZHAO W X, CHEN H F, BAI E W, et al. Local variable selection of nonlinear nonparametric systems by first order expansion. *Systems and Control Letters*, 2018, 111(1): 1 – 8.

附录:

引理 A^[31] 对于次行随机矩阵 $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果对每个 i , $1 \leq i \leq n$, 都存在一个整数 j , $1 \leq j \leq n$, 使得第 j 行的行和小于 1 以及一个两两不同的整数序列 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 其中: $k_1 = i, k_m = j, 1 \leq m \leq n$, 使得

$$d_{k_1 k_2} d_{k_2 k_3} \cdots d_{k_{m-1} k_m} > 0$$

成立, 则 $\rho(D) < 1$, 即矩阵 D 的谱半径小于 1.

作者简介:

董艳萍 2015年毕业于西安电子科技大学应用数学专业, 获学士学位, 2019年毕业于中国科学院大学, 获硕士学位, 研究方向为社会网络的建模与估计, E-mail: dongyanping15@mailsucas.ac.cn;

任晓涛 2016年毕业于华北电力大学, 获学士学位, 同年进入中国科学院大学, 目前在中国科学院数学与系统科学研究院攻读博士学位, 研究方向为随机系统的建模与辨识, E-mail: renxiaotao16@mailsucas.ac.cn;

赵文斌 副研究员, 第19届“关肇直奖”(2013年)获奖论文作者, 毕业于山东大学, 在中国科学院数学与系统科学研究院获得博士学位, 目前担任《系统科学与数学》编委、IEEE Control Systems Letters编委, IEEE CSS Conference Editorial Board 编委以及IEEE CSS北京分会秘书长等学术兼职. 研究方向主要集中在随机系统的建模与估计, 包括变量选择与稀疏参数辨识、随机系统的递推估计与适应控制、分布式估计与优化等. E-mail: wxzhao@amss.ac.cn.