第 37 卷第 10 期
2020 年 10 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 37 No. 10
Oct. 2020

非线性变参数系统的混合H_2/H_∞控制

朱平芳[1], 周燕茹[2], 曾建平[1†]

(1. 厦门大学 自动化系, 福建 厦门 361005; 2. 厦门理工学院 电气工程与自动化学院, 福建 厦门 361024)

摘要: 本文研究了一类非线性变参数系统的混合H_2/H_∞保性能控制问题. 基于Lyapunov稳定性理论, 建立了状态反馈混合H_2/H_∞保性能控制的可解性条件. 该条件是依赖于状态和参数的线性矩阵不等式, 显式地体现了系统的时变和非线性特性, 通过多项式平方和方法, 可以转化为优化问题. 特别地, 本文构造一种新颖的控制器和Lyapunov范数. 在此基础上, 研究了基于多项式平方技术的不确定非线性变参数系统混合H_2/H_∞保性能控制问题. 最后, 通过倾转旋翼飞行器实例和数值仿真均验证本文方法的可行性和有效性.

关键词: 混合H_2/H_∞保性能控制; 非线性变参数系统; 不确定性系统; 平方和

引用格式: 朱平芳, 周燕茹, 曾建平. 非线性变参数系统的混合H_2/H_∞控制. 控制理论与应用, 2020, 37(10): 2231 – 2241

DOI: 10.7641/CTA.2020.90808

Mixed H_2/H_∞ control for nonlinear parameter-varying systems

ZHU Ping-fang[1], ZHOU Yan-ru[2], ZENG Jian-ping[1†]

(1. Department of Automation, Xiamen University, Xiamen Fujian 361005, China;
2. School of Electrical Engineering and Automation, Xiamen University of Technology, Xiamen Fujian 361024, China)

Abstract: This paper investigates the mixed H_2/H_∞ guaranteed cost control problem for a class of nonlinear parameter-varying systems. Based on Lyapunov stability theory, the solvable conditions of the mixed H_2/H_∞ guaranteed cost control for state feedback are established, those conditions are given in terms of state-and-parameter-dependent linear matrix inequalities, without hiding the time-varying nature or ignoring the nonlinearities, the above conditions can be transformed into a convex problem based on the polynomial sum of squares method. Specifically, a novel structure of state feedback controller and a new Lyapunov function are employed in this paper. And on this basis, this paper also studies the mixed H_2/H_∞ guaranteed cost control problem for a class of uncertain nonlinear parameter-varying systems based on the polynomial sum of squares method. Finally, the simulation results of a tilt rotor aircraft control and numerical example demonstrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: mixed H_2/H_∞ guaranteed cost control; nonlinear parameter-varying systems; uncertainty systems; sum of squares

Citation: ZHU Pingfang, ZHOU Yanru, ZENG Jianping. Mixed H_2/H_∞ control for nonlinear parameter-varying systems, 2020, 37(10): 2231 – 2241

1 引言

在航空航天等领域, 时变和非线性是被控对象普遍存在的动力学特征[1–4]. 工程实践中, 多采用增益调度方案适应系统的非线性和时变参数变化. 该方法的不足之处是理论上存在较大保守性, 且当调度变量快速变化或难以捕捉对象的非线性特征时, 系统性能甚至稳定性都可能难以保证[5]. 为此, 借鉴于Prajna等人将多项式非线性系统视为状态依赖的类线性系统建模思想[6–7], 文献[8]提出了一种非线性变参数(nonlinear parameter-varying, NPV)模型, 研究了该类系统指数镇定及其在飞行器轨迹跟踪中的应用. 文献[9]定义了一种兼具有限时间稳定和Lyapunov稳定特征的混合稳定性概念, 研究了NPV系统的H_∞混合稳定控制问题. 文献[10]研究了NPV系统的吸引域及局部镇定问题. NPV系统包含了类线性系统[6]和线性变参数(linear parameter-varying, LPV)系统[1]为其特例, 能更

收稿日期: 2019−09−25; 录用日期: 2020−06−04.
†通信作者. E-mail: jpzeng@xmu.edu.cn.
本文责任编委: 俞立.
国家自然科学基金项目(U1713223), 厦门理工学院“科研攀登计划”项目(XPDKQ19013), 厦门理工学院高层次人才项目(YKJ16024R)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (U1713223), the “Scientific Research Climbing Plan” Project of Xiamen Institute of Technology of China (XPDKQ19013) and the High-Level Personnel Project of Xiamen University of Technology (YKJ16024R).

完整刻画被控对象的时变和非线性特性, 为复杂运动体的高能控制设计提供了新途径.

本文考虑NPV系统的混合H_2/H_∞保性能控制问题, 它使系统同时兼备H_2性能和H_∞性能. 对于时不变系统, 孙运全等人[11]研究了静止无功发生器的混合H_2/H_∞保性能控制问题, 给出了该问题相应的可解性条件. 混合H_2/H_∞保性能问题可以转化为线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)的可行性问题[12–13], 然而对于时变参数系统, 可解性LMI条件包含变参数, 是无限维的. 此情形下, 通常需要对变参数附加仿射型或者凸包型[14–16]等特殊结构约束条件, 将无限维LMI的约束转化成有限维LMI的可行性问题. 该处理方法忽略了系统的时变特性, 存在一定的保守性.

本文采用多项式平方和 (sum of squares, SOS) 方法, 直接求解NPV系统的混合H_2/H_∞保性能控制问题. 在此基础上, 结合S-procedure方法, 给出了闭环系统局部稳定的混合H_2/H_∞ 保性能控制器设计方法. 进一步, 考虑该系统存在不确定性的情形, 给出了相应鲁棒混合H_2/H_∞保性能控制问题的可解性条件. 本文直接求解状态和参数依赖的LMI, 避免了模型线性化和对时变参数附加仿射型或凸包型等特殊结构条件带来的保守性.

文中符号说明如下: $\mathbb{R}^n$表示n维实向量的集合, $\mathbb{R}^{n\times m}$表示$n\times m$维实矩阵的集合, $\mathbb{R}[x]$表示向量$x\in\mathbb{R}^n$的所有实系数多项式函数集合, I和0表示合适维数的单位矩阵和零矩阵, "$*$"表示对称矩阵中的对称块, $\mathrm{He}(A)=A^{\mathrm{T}}+A$, $\varPhi_{\mathrm{SOS}}$表示SOS多项式集合.

2 预备知识与问题描述

2.1 预备知识

定义 1(SOS[17]) 称关于x的多元多项式$h(x)$是SOS, 如果存在多项式 $h_1(x), h_2(x), \cdots, h_m(x)$ 使得$h(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}h_i^2(x)$.

若$h(x)$是SOS多项式, 则有$h(x)\geqslant 0$, 但反之未必成立. SOS条件是判断多项式非负的一个充分条件, 然而数值仿真表明由此带来的保守性非常小[6], 在某些情况下, 两者是等价的[18].

引理 1[6] 若多项式矩阵$P(x)=P^{\mathrm{T}}(x)$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)=-P(x)\frac{\partial P^{-1}}{\partial x_i}(x)P(x),\ i=1,\cdots,n.$$

引理 2(广义S-procedure[19]) 给定$\{g_i(x)\}_{i=1}^{m}\in\mathbb{R}[x]$, 如果存在$\{s_i(x)\}_{i=1}^{m}\in\varPhi_{\mathrm{SOS}}$使得

$$g_0(x)-\sum_{i=1}^{m}s_i(x)g_i(x)\in\varPhi_{\mathrm{SOS}},$$

有

$$\{x\in\mathbb{R}^n|g_1(x)\geqslant 0,\cdots,g_m(x)\geqslant 0\}\subset\varOmega_1,$$

其中$\varOmega_1=\{x\in\mathbb{R}^n|g_0(x)\geqslant 0\}$.

引理 3[20] 设矩阵E和F, 对任意满足不等式$\varDelta^{\mathrm{T}}(t)\varDelta(t)\leqslant I$的矩阵$\varDelta(t)$和任意的正常数$\varepsilon$, 如下不等式成立:

$$E\varDelta(t)F+F^{\mathrm{T}}\varDelta^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}\leqslant\varepsilon EE^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F.$$

2.2 问题描述

考虑一类多项式NPV系统

$$\begin{cases}\dot{x}=A(x,\theta(t))x+B_1(x,\theta(t))w+\\ \qquad B_2(x,\theta(t))u,\\ z_\infty=C_1(x,\theta(t))x+D_{11}(x,\theta(t))w+\\ \qquad D_{12}(x,\theta(t))u,\\ z_2=C_2(x,\theta(t))x+D_{22}(x,\theta(t))u,\end{cases}\tag{1}$$

其中: $x\in\mathbb{R}^{n_{\mathrm{p}}}$, $u\in\mathbb{R}^{n_{\mathrm{u}}}$和$w\in\mathbb{R}^{n_{\mathrm{w}}}$分别是系统状态、控制输入和外部扰动; $z_\infty\in\mathbb{R}^{n_{z\infty}}$和$z_2\in\mathbb{R}^{n_{z2}}$为系统的被控输出; $\theta(t)\in\mathbb{R}^{n_\theta}$为时变参数向量; $A(x,\theta(t))$, $B_i(x,\theta(t))$, $C_i(x,\theta(t))(i=1,2)$, $D_{1j}(x,\theta(t))(j=1,2)$和$D_{22}(x,\theta(t))$是关于状态$x$和$\theta(t)$的合适维数的多项式矩阵.

注 1 NPV系统作为一类非线性时变系统, 当系统矩阵不依赖状态时, 它可以退化成LPV系统[1]. 当系统矩阵只依赖状态时, 它可以退化成类线性系统[6]. 因此, NPV系统可以看作是类线性系统和LPV系统的推广, 而后两者都可视为NPV系统的特例.

针对系统(1), 设计如下的状态反馈控制器:

$$u=K(x,\theta(t),\dot{\theta}(t))x,\tag{2}$$

其中$K(x,\theta(t),\dot{\theta}(t))$是待设计的控制器增益矩阵. 简便起见, 以下用$\theta$和$\dot{\theta}$分别表示$\theta(t)$和$\dot{\theta}(t)$.

结合式(1)–(2), 相应的闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=A_{\mathrm{cl}}(x,\theta)x+B_1(x,\theta)w,\\ z_\infty=C_{\infty\mathrm{cl}}(x,\theta)x+D_{11}(x,\theta)w,\\ z_2\ =C_{2\mathrm{cl}}(x,\theta)x,\end{cases}\tag{3}$$

其中:

$$A_{\mathrm{cl}}(x,\theta)=A(x,\theta)+B_2(x,\theta)K(x,\theta,\dot{\theta}),$$
$$C_{\infty\mathrm{cl}}(x,\theta)=C_1(x,\theta)+D_{12}(x,\theta)K(x,\theta,\dot{\theta}),$$
$$C_{2\mathrm{cl}}(x,\theta)=C_2(x,\theta)+D_{22}(x,\theta)K(x,\theta,\dot{\theta}).$$

假设 1 时变参数θ和其导数$\dot{\theta}$均实时可测.

本文讨论系统(1)的状态反馈混合H_2/H_∞保性能控制问题[12], 详情如下: 对于NPV系统(1), 设计一个状态反馈控制器(2), 使得闭环系统(3)满足以下条件: 1) 当外界扰动$w=0$时, 闭环系统在零平衡点全局一致渐近稳定; 2) 当外界扰动$w=0$时,

$$J_2:=\int_0^\infty z_2^{\mathrm{T}}(t)z_2(t)\mathrm{d}t\leqslant\gamma_2,$$

γ_2为系统的一个性能上界; 3) 当外界扰动$w\in L_2[0,$

∞), 初始状态$x(0)=0$时, 从w到z_∞的L_2-增益小于给定的正标量γ_∞.

3　混合$\mathrm{H_2/H_\infty}$保性能控制

令$A_i(x,\theta)$为$A(x,\theta)$的第i行, $J=\{i_1,\cdots,i_s\}$为$B_1(x,\theta)$和$B_2(x,\theta)$中全零行的行号集合, 并定义$\tilde{x}=[x_{i_1}\ \cdots\ x_{i_s}]^{\mathrm T}$.

定理 1　对于系统(1), 给定$\gamma_\infty>0$, 正多项式$\varepsilon_2(\tilde{x},\theta)>\varepsilon_1(\tilde{x},\theta)$, $\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})$. 若存在对称多项式矩阵$P(\tilde{x},\theta)$和多项式矩阵$L(x,\theta,\dot{\theta})$, 使得

$$P(\tilde{x},\theta)-\varepsilon_1(\tilde{x},\theta)I\in\varPhi_{\mathrm{SOS}},\tag{4}$$

$$\varepsilon_2(\tilde{x},\theta)I-P(\tilde{x},\theta)\in\varPhi_{\mathrm{SOS}},\tag{5}$$

$$-(\varXi_1+\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})I)\in\varPhi_{\mathrm{SOS}},\tag{6}$$

其中:

$$\varXi_1=\begin{bmatrix}\varPi_1 & * & * & *\\ B_1^{\mathrm T}(x,\theta) & -\gamma_\infty^2 I & * & *\\ \varPi_2 & D_{11}(x,\theta) & -I & *\\ \varPi_3 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix},$$

$$\varPi_1=\mathrm{He}(A(x,\theta)P(\tilde{x},\theta)+B_2(x,\theta)L(x,\theta,\dot{\theta}))-\sum_{i\in J}\frac{\partial P(\tilde{x},\theta)}{\partial x_i}A_i(x,\theta)x-\sum_{i=1}^{n_\theta}\frac{\partial P(\tilde{x},\theta)}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i,$$

$$\varPi_2=C_1(x,\theta)P(\tilde{x},\theta)+D_{12}(x,\theta)L(x,\theta,\dot{\theta}),$$

$$\varPi_3=C_2(x,\theta)P(\tilde{x},\theta)+D_{22}(x,\theta)L(x,\theta,\dot{\theta}),$$

则混合$\mathrm{H_2/H_\infty}$保性能控制问题可解, 且一个状态反馈增益矩阵为

$$K(x,\theta,\dot{\theta})=L(x,\theta,\dot{\theta})P^{-1}(\tilde{x},\theta).\tag{7}$$

证　定义如下形式的Lyapunov函数:

$$V(x,\theta)=x^{\mathrm T}P^{-1}(\tilde{x},\theta)x.\tag{8}$$

由式(4)–(5)可知

$$0<\varepsilon_2^{-1}(\tilde{x},\theta)I\leqslant P^{-1}(\tilde{x},\theta)\leqslant\varepsilon_1^{-1}(\tilde{x},\theta)I,$$

即

$$0<\varepsilon_2^{-1}(\tilde{x},\theta)\|x\|^2\leqslant V(x,\theta)\leqslant\varepsilon_1^{-1}(\tilde{x},\theta)\|x\|^2.$$

上式意味着$V(x,\theta)$是正定且有界的, 并且当$\|x\|\to\infty$时, $V(x,\theta)\to\infty$.

对于闭环系统(3), 可知

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,\theta)=&\,\dot{x}^{\mathrm T}P^{-1}(\tilde{x},\theta)x+x^{\mathrm T}\dot{P}^{-1}(\tilde{x},\theta)x+\\&x^{\mathrm T}P^{-1}(\tilde{x},\theta)\dot{x}=\\&x^{\mathrm T}\mathrm{He}(P^{-1}(\tilde{x},\theta)A_{\mathrm{cl}}(x,\theta))x+\\&x^{\mathrm T}(\sum_{i\in J}\frac{\partial P^{-1}(\tilde{x},\theta)}{\partial x_i}A_i(x,\theta)x)x+\\&\mathrm{He}(x^{\mathrm T}P^{-1}(\tilde{x},\theta)B_1(x,\theta)w)+\\&x^{\mathrm T}\sum_{i=1}^{n_\theta}\frac{\partial P^{-1}(\tilde{x},\theta)}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i x.\end{aligned}\tag{9}$$

由条件(6)可知

$$\varXi_1+\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})I\leqslant 0.$$

上式左右两边分别乘以$[P^{-1}(\tilde{x},\theta)\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$及其转置, 利用引理1, 再令$L(x,\theta,\dot{\theta})=K(x,\theta,\dot{\theta})P(\tilde{x},\theta)$, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{He}(P^{-1}(\tilde{x},\theta)A_{\mathrm{cl}}(x,\theta))+\\&\sum_{i\in J}\frac{\partial P^{-1}(\tilde{x},\theta)}{\partial x_i}A_i(x,\theta)x+\\&\sum_{i=1}^{n_\theta}\frac{\partial P^{-1}(\tilde{x},\theta)}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i+\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})P^{-2}(\tilde{x},\theta)\leqslant 0.\end{aligned}$$

由于$0<\varepsilon_2^{-1}(\tilde{x},\theta)I\leqslant P^{-1}(\tilde{x},\theta)$, 即

$$\begin{aligned}&\mathrm{He}(P^{-1}(\tilde{x},\theta)A_{\mathrm{cl}}(x,\theta))+\\&\sum_{i\in J}\frac{\partial P^{-1}(\tilde{x},\theta)}{\partial x_i}A_i(x,\theta)x+\\&\sum_{i=1}^{n_\theta}\frac{\partial P^{-1}(\tilde{x},\theta)}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i+\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})\varepsilon_2^{-2}(\tilde{x},\theta)\leqslant 0.\end{aligned}$$

当$w=0$时,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,\theta)=&\,x^{\mathrm T}\mathrm{He}(P^{-1}(\tilde{x},\theta)A_{\mathrm{cl}}(x,\theta))x+\\&x^{\mathrm T}\sum_{i\in J}\frac{\partial P^{-1}(\tilde{x},\theta)}{\partial x_i}A_i(x,\theta)x+\\&x^{\mathrm T}(\sum_{i=1}^{n_\theta}\frac{\partial P^{-1}(\tilde{x},\theta)}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i)x,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,\theta)\leqslant&-\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})\varepsilon_2^{-2}(\tilde{x},\theta)x^{\mathrm T}x=\\&-\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})\varepsilon_2^{-2}(\tilde{x},\theta)\,\|x\|_2^2.\end{aligned}$$

因此, 闭环系统(3)的零平衡点是全局一致渐近稳定的.

将式(9)改写为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,\theta)=&\,\dot{x}^{\mathrm T}P^{-1}(\tilde{x},\theta)x+x^{\mathrm T}\dot{P}^{-1}(\tilde{x},\theta)x+\\&x^{\mathrm T}P^{-1}(\tilde{x},\theta)\dot{x}+z_\infty^{\mathrm T}z_\infty-\gamma_\infty^2w^{\mathrm T}w+\\&z_2^{\mathrm T}z_2+\gamma_\infty^2w^{\mathrm T}w-(z_\infty^{\mathrm T}z_\infty+z_2^{\mathrm T}z_2)=\\&\begin{bmatrix}x\\w\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\varPi_4 & *\\ \varPi_5 & \varPi_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\w\end{bmatrix}+\\&\gamma_\infty^2w^{\mathrm T}w-(z_\infty^{\mathrm T}z_\infty+z_2^{\mathrm T}z_2),\end{aligned}\tag{10}$$

其中:

$$\begin{aligned}\varPi_4=&\\&\mathrm{He}(P^{-1}(\tilde{x},\theta)A_{\mathrm{cl}}(x,\theta))+\sum_{i=1}^{n_\theta}\frac{\partial P^{-1}(\tilde{x},\theta)}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i+\\&C_{2\mathrm{cl}}^{\mathrm T}(x,\theta)C_{2\mathrm{cl}}(x,\theta)+C_{\infty\mathrm{cl}}^{\mathrm T}(x,\theta)C_{\infty\mathrm{cl}}(x,\theta)+\\&\sum_{i\in J}\frac{\partial P^{-1}(\tilde{x},\theta)}{\partial x_i}A_i(x,\theta)x,\end{aligned}$$

$$\varPi_5=B_1^{\mathrm T}(x,\theta)P^{-1}(\tilde{x},\theta)+D_{11}^{\mathrm T}(x,\theta)C_{\infty\mathrm{cl}}(x,\theta),$$

$$\varPi_6=D_{11}^{\mathrm T}(x,\theta)D_{11}(x,\theta)-\gamma_\infty^2 I.$$

由条件(6)可知,

$$\varXi_1 < 0. \tag{11}$$

将式(11)两边分别乘以$\mathrm{diag}\{P^{-1}(\tilde{x},\theta), I, I, I\}$, 再令$L(x,\theta,\dot{\theta}) = K(x,\theta,\dot{\theta})P(\tilde{x},\theta)$, 根据Schur补引理和引理1可知,

$$\begin{bmatrix} \varPi_4 & * \\ \varPi_5 & \varPi_6 \end{bmatrix} < 0.$$

因此, 由式(10)可得

$$\dot{V}(x,\theta) \leqslant \gamma_\infty^2 w^{\mathrm{T}} w - (z_\infty^{\mathrm{T}} z_\infty + z_2^{\mathrm{T}} z_2). \tag{12}$$

由式(12)可得

$$\dot{V}(x,\theta) \leqslant -(z_\infty^{\mathrm{T}} z_\infty + z_2^{\mathrm{T}} z_2) \leqslant -z_2^{\mathrm{T}} z_2. \tag{13}$$

对式(13)左右两边关于时间从$t=0$到$t=\infty$积分, 可得

$$J_2 = \int_0^\infty z_2^{\mathrm{T}} z_2 \mathrm{d}t \leqslant V(x(0),\theta(0)) = \gamma_2.$$

当$w \in L_2[0,\infty)$时, $x(0)=0$, 由式(12)可知,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (z_\infty^{\mathrm{T}} z_\infty - \gamma_\infty^2 w^{\mathrm{T}} w + \dot{V}(x,\theta))\mathrm{d}t = \\
&\int_0^\infty (z_\infty^{\mathrm{T}} z_\infty - \gamma_\infty^2 w^{\mathrm{T}} w)\mathrm{d}t - V(x(0),\theta(0)) = \\
&\int_0^\infty (z_\infty^{\mathrm{T}} z_\infty - \gamma_\infty^2 w^{\mathrm{T}} w)\mathrm{d}t \leqslant \\
&-\int_0^\infty z_2^{\mathrm{T}} z_2 \mathrm{d}t < 0.
\end{aligned}$$

证毕.

注 2 定理1构造了形如$P(\tilde{x},\theta)$的Lyapunov函数矩阵, 相比仅含参数的$P(\theta)$, $P(\tilde{x},\theta)$能够提高搜索到可行解的成功率. 值得注意的是, 构造此形式的矩阵$P(\tilde{x},\theta)$增加了Lyapunov函数的阶, 提高了计算的复杂度, 但是已有研究成果表明越高阶的Lyapunov函数越有利于改善相应系统的性能. 该思想在文献[6,8–9,21]中已有应用.

当系统(1)中的状态和时变参数具有约束时, 可以建立相应的局部条件. 定义集合

$$\mathcal{A}_{\mathrm{x}} = \{x \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{p}}} : g_l(x) \geqslant 0,\ l = 1,2,\cdots,s\},$$

$$\mathcal{A}_\theta = \{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta} : f_i(\theta) \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,r_{\mathrm{f}}\},$$

$$\mathcal{A}_\upsilon = \{\dot{\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta} : \underline{\upsilon}_i \leqslant \dot{\theta}_i \leqslant \bar{\upsilon}_i,\ i = 1,\cdots,n_\theta\},$$

其中$g_l(x)$和$f_i(\theta)$分别是关于x和θ的多项式函数.

混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$保性能控制问题的条件$i$修订成当外界扰动$w=0$, 闭环系统(3)在零平衡点局部一致渐近稳定, 则称该问题为系统(1)的状态反馈局部混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$保性能控制问题.

定理 2 对于系统(1), 给定紧集$\mathcal{A}_{\mathrm{x}}$, $\mathcal{A}_\theta$, $\mathcal{A}_\upsilon$和常数$\gamma_\infty > 0$, 正多项式$\varepsilon_2(\tilde{x},\theta) > \varepsilon_1(\tilde{x},\theta)$, $\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})$. 若存在对称多项式矩阵$P(\tilde{x},\theta)$, 多项式矩阵$L(x,\theta,\dot{\theta})$, 使得

$$v_1^{\mathrm{T}}(P(\tilde{x},\theta) - \varepsilon_1(\tilde{x},\theta)I)v_1 - \varGamma_1 \in \varPhi_{\mathrm{SOS}}, \tag{14}$$

$$v_2^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2(\tilde{x},\theta)I - P(\tilde{x},\theta))v_2 - \varGamma_2 \in \varPhi_{\mathrm{SOS}}, \tag{15}$$

$$-v_3^{\mathrm{T}}(\varXi_1 + \varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})I)v_3 - \varGamma_3 \in \varPhi_{\mathrm{SOS}}, \tag{16}$$

其中:

$$\varGamma_1 = \sum_{l=1}^{s} \alpha_{1l}(v_1,x)g_l(x) - \sum_{i=1}^{r_{\mathrm{f}}} \beta_{1i}(v_1,\theta,\dot{\theta})f_i(\theta),$$

$$\varGamma_2 = \sum_{l=1}^{q} \alpha_{2l}(v_2,x)g_l(x) - \sum_{i=1}^{r_{\mathrm{f}}} \beta_{2i}(v_2,\theta,\dot{\theta})f_i(\theta),$$

$$\begin{aligned}\varGamma_3 = &\sum_{l=1}^{s} \alpha_{3l}(v_3,x)g_l(x) - \sum_{i=1}^{r_{\mathrm{f}}} \beta_{3i}(v_3,\theta,\dot{\theta})f_i(\theta) - \\ &\sum_{i=1}^{n_\theta} n_i(v_3,\theta)(\dot{\theta}_i - \underline{\upsilon}_i)(\bar{\upsilon}_i - \dot{\theta}_i),\end{aligned}$$

其中: v_1, v_2和v_3是适维列向量, α_{ji}, n_i, $g_l(x)$, $f_i(\theta)$和$\beta_{ji}(j=1,2,3)$是SOS多项式函数. 则局部混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$保性能控制问题可解, 且控制器增益形如式(7).

证 显然, 由引理2, 即广义S-procedure, 可解性条件(14)意味着对任意$(x,\theta,\dot{\theta}) \in \mathcal{A}_{\mathrm{x}} \times \mathcal{A}_\theta \times \mathcal{A}_\upsilon$都有给定的$P(\tilde{x},\theta) - \varepsilon_1(\tilde{x},\theta)I \in \varPhi_{\mathrm{SOS}}$. 同理可得, 对任意$(x,\theta,\dot{\theta}) \in \mathcal{A}_{\mathrm{x}} \times \mathcal{A}_\theta \times \mathcal{A}_\upsilon$, 条件(15)–(16)意味着定理1中对应条件(5)–(6)成立. 证毕.

注 3 在条件(4)–(6)和条件(14)–(16)中, 给定含有$\tilde{x}$, x和θ的正多项式函数$\varepsilon_1(\tilde{x},\theta)$, $\varepsilon_2(\tilde{x},\theta)$和$\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})$, 此形式的多项式函数增加了用SOS技术搜索到可行解的灵活性. 另外, 定理3中将x, θ和$\dot{\theta}$限制在特定的区域内, 可以获得比通过定理2得到的全局控制器更好控制性能的局部控制器[2–3,9,21].

4 鲁棒混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$保性能控制

考虑一类不确定NPV系统, 即模型(1)变为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A(x,\theta) + \Delta A(x,\theta))x + B_1(x,\theta)w + \\ \quad\ (B_2(x,\theta) + \Delta B_2(x,\theta))u, \\ z_\infty = C_1(x,\theta)x + D_{11}(x,\theta)w + D_{12}(x,\theta)u, \\ z_2 = C_2(x,\theta)x + D_{22}(x,\theta)u, \end{cases} \tag{17}$$

其中$\Delta A(x,\theta)$和$\Delta B_2(x,\theta)$是不确定项.

假设 2 对于系统(17), 设其不确定性满足下列条件:

$$\Delta A(x,\theta) = E(x,\theta)\varDelta(t)F(x,\theta),$$

$$\Delta B_2(x,\theta) = E(x,\theta)\varDelta(t)F_1(x,\theta),$$

其中: $E(x,\theta)$, $F(x,\theta)$, $F_1(x,\theta)$为已知的多项式矩阵, 描述了不确定性进入系统的结构信息. $\varDelta(t)$是满足约束条件$\varDelta^{\mathrm{T}}(t)\varDelta(t) \leqslant I$的时变未知矩阵.

系统(17)的状态反馈鲁棒混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$保性能控制问题是指, 求解形如式(2)的控制器, 使得闭环系统对所有$\varDelta(t)$都满足混合$\mathrm{H}_2/\mathrm{H}_\infty$保性能控制问题的条件.

记$Q=\{i_1,\cdots,i_g\}$是状态和时变参数依赖矩阵$B_1(x,\theta)$, $B_2(x,\theta)$和$\Delta B_2(x,\theta)$中全零行的行号集合, 并定义$\hat{x}=[x_{i_1}\ \ \cdots\ \ x_{i_g}]^{\mathrm{T}}$.

定理 3　对于系统(17), 给定$\gamma_\infty>0$, 正多项式$\varepsilon_2(\hat{x},\theta)>\varepsilon_1(\hat{x},\theta)$, $\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})$, ε_4和ε_5. 若存在对称多项式矩阵$P(\hat{x},\theta)$、多项式矩阵$L(x,\theta,\dot{\theta})$, 使得

$$P(\hat{x},\theta)-\varepsilon_1(\hat{x},\theta)I\in\Phi_{\mathrm{SOS}},\tag{18}$$

$$\varepsilon_2(\hat{x},\theta)I-P(\hat{x},\theta)\in\Phi_{\mathrm{SOS}},\tag{19}$$

$$-(\Xi_2+\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})I)\in\Phi_{\mathrm{SOS}},\tag{20}$$

其中:

$$\Xi_2=\begin{bmatrix}\Theta_1 & \Theta_3^{\mathrm{T}}\\ \Theta_3 & \Theta_2\end{bmatrix},$$

$$\Theta_1=\begin{bmatrix}\Pi_7 & * & * & *\\ B_1^{\mathrm{T}}(x,\theta) & -\gamma_\infty^2 I & * & *\\ \Pi_8 & D_{11}(x,\theta) & -I & *\\ \Pi_9 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix},$$

$$\Theta_2=\begin{bmatrix}-\varepsilon_4 I & * & * & *\\ 0 & -\varepsilon_5 I & * & *\\ 0 & 0 & -\varepsilon_4 I & *\\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_5 I\end{bmatrix},$$

$$\Theta_3=\begin{bmatrix}F(x,\theta)P(\hat{x},\theta) & 0 & 0 & 0\\ F_1(x,\theta)L(x,\theta,\dot{\theta}) & 0 & 0 & 0\\ \varepsilon_4 E^{\mathrm{T}}(x,\theta) & 0 & 0 & 0\\ \varepsilon_5 E^{\mathrm{T}}(x,\theta) & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\Pi_7={}&\mathrm{He}(A(x,\theta)P(\hat{x},\theta)+B_2(x,\theta)L(x,\theta,\dot{\theta}))-\\&\sum_{i\in Q}\frac{\partial P(\hat{x},\theta)}{\partial x_i}A_i(x,\theta)x-\sum_{i=1}^{n_\theta}\frac{\partial P(\hat{x},\theta)}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i,\end{aligned}$$

$$\Pi_8=C_1(x,\theta)P(\hat{x},\theta)+D_{12}(x,\theta)L(x,\theta,\dot{\theta}),$$

$$\Pi_9=C_2(x,\theta)P(\hat{x},\theta)+D_{22}(x,\theta)L(x,\theta,\dot{\theta}),$$

则鲁棒混合H_2/H_∞保性能控制问题可解, 且一个状态反馈控制增益矩阵为

$$K(x,\theta,\dot{\theta})=L(x,\theta,\dot{\theta})P^{-1}(\hat{x},\theta).$$

证　定义如下形式的Lyapunov函数:

$$V_1(x,\theta)=x^{\mathrm{T}}P^{-1}(\hat{x},\theta)x.$$

由条件(18)–(19)可知

$$0<\varepsilon_2^{-1}(\hat{x},\theta)\|x\|^2\leqslant V_1(x,\theta)\leqslant\varepsilon_1^{-1}(\hat{x},\theta)\|x\|^2.$$

上式意味着$V_1(x,\theta)$是正定且有界的, 并且当$\|x\|\to\infty$时$V_1(x,\theta)\to\infty$.

系统(17)与状态反馈控制器(2)构成的闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=\bar{A}_{\mathrm{cl}}(x,\theta)x+B_1(x,\theta)w,\\ z_\infty=C_{\infty\mathrm{cl}}(x,\theta)x+D_{11}(x,\theta)w,\\ z_2=C_{2\mathrm{cl}}(x,\theta)x,\end{cases}\tag{21}$$

其中:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{\mathrm{cl}}(x,\theta)={}&A(x,\theta)+B_2(x,\theta)K(x,\theta,\dot{\theta})+\\&E(x,\theta)\Delta F_1(x,\theta)K(x,\theta,\dot{\theta})+\\&E(x,\theta)\Delta F(x,\theta),\end{aligned}$$

其余符号的定义同式(3).

对于闭环系统(21), 可知

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x,\theta)={}&\dot{x}^{\mathrm{T}}P^{-1}(\hat{x},\theta)x+x^{\mathrm{T}}\dot{P}^{-1}(\hat{x},\theta)x+\\&x^{\mathrm{T}}P^{-1}(\hat{x},\theta)\dot{x}=\\&x^{\mathrm{T}}\mathrm{He}(P^{-1}(\hat{x},\theta)\bar{A}_{\mathrm{cl}}(x,\theta))x+\\&x^{\mathrm{T}}(\sum_{i\in Q}\frac{\partial P^{-1}(\hat{x},\theta)}{\partial x_i}A_i(x,\theta)x)x+\\&\mathrm{He}(x^{\mathrm{T}}P^{-1}(\hat{x},\theta)B_1(x,\theta)w)+\\&x^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{n_\theta}\frac{\partial P^{-1}(\hat{x},\theta)}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i)x.\end{aligned}\tag{22}$$

对式(22)应用引理1和引理3, 存在正实数ε_4, ε_5和令$L(x,\theta,\dot{\theta})=K(x,\theta,\dot{\theta})P(\hat{x},\theta)$得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x,\theta)={}&\mathrm{He}(x^{\mathrm{T}}P^{-1}(\hat{x},\theta)B_1(x,\theta)w)+\\&x^{\mathrm{T}}P^{-1}\Pi_{10}P^{-1}x,\end{aligned}\tag{23}$$

其中

$$\begin{aligned}\Pi_{10}={}&\mathrm{He}(A(x,\theta)P(\hat{x},\theta)+B_2(x,\theta)L(x,\theta,\dot{\theta}))-\\&\sum_{i=1}^{n_\theta}\frac{\partial P(\hat{x},\theta)}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i-\sum_{i\in Q}\frac{\partial P(\hat{x},\theta)}{\partial x_i}A_i(x,\theta)x+\\&\varepsilon_4^{-1}(F(x,\theta)P(\hat{x},\theta))^{\mathrm{T}}F(x,\theta)P(\hat{x},\theta)+\\&\varepsilon_4E(x,\theta)E^{\mathrm{T}}(x,\theta)+\varepsilon_5E(x,\theta)E^{\mathrm{T}}(x,\theta)+\\&\varepsilon_5^{-1}(F_1(x,\theta)L(x,\theta,\dot{\theta}))^{\mathrm{T}}F_1(x,\theta)L(x,\theta,\dot{\theta}).\end{aligned}$$

由条件(20)可得

$$\begin{bmatrix}\Pi_{10} & * & * & *\\ B_1^{\mathrm{T}}(x,\theta) & -\gamma_\infty^2 I & * & *\\ \Pi_8 & D_{11}(x,\theta) & -I & *\\ \Pi_9 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}+\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})I\leqslant 0.$$

在上式左右两边分别乘以$[x^{\mathrm{T}}P^{-1}\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$和其转置, 由于$0<\varepsilon_2^{-1}(\hat{x},\theta)I\leqslant P^{-1}(\hat{x},\theta)$, 可得

$$x^{\mathrm{T}}P^{-1}\Pi_{10}P^{-1}x\leqslant-\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})\varepsilon_2^{-2}(\hat{x},\theta)x^{\mathrm{T}}x.$$

当扰动$w=0$时,

$$\dot{V}_1(x,\theta)=x^{\mathrm{T}}P^{-1}\Pi_{10}P^{-1}x,$$

即

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x,\theta)\leqslant{}&-\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})\varepsilon_2^{-2}(\hat{x},\theta)x^{\mathrm{T}}x=\\&-\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})\varepsilon_2^{-2}(\hat{x},\theta)\|x\|_2^2.\end{aligned}$$

则满足假设2的闭环系统(22)的零平衡点是全局一致渐近稳定的.

余下证明同定理1.　　证毕.

注意到, 当系统(17)中系统矩阵不依赖状态时, 该系统退化成多项式不确定LPV系统

$$\begin{cases}\dot{x}=(A(\theta)+\Delta A(\theta))x+B_1(\theta)w+\\ \quad (B_2(\theta)+\Delta B_2(\theta))u,\\ z_\infty=C_1(\theta)x+D_{11}(\theta)w+D_{12}(\theta)u,\\ z_2=C_2(\theta)x+D_{22}(\theta)u,\end{cases}\tag{24}$$

则相应的不确定性满足

$$[\Delta A(\theta)\ \ \Delta B_2(\theta)]=E(\theta)\varDelta(t)[F(\theta)\ \ F_1(\theta)].$$

类似地, 当系统(17)中系统矩阵只依赖状态时, 其可退化成多项式不确定非线性时不变系统

$$\begin{cases}\dot{x}=(A(x)+\Delta A(x))x+B_1(x)w+\\ \quad (B_2(x)+\Delta B_2(x))u,\\ z_\infty=C_1(x)x+D_{11}(x)w+D_{12}(x)u,\\ z_2=C_2(x)x+D_{22}(x)u,\end{cases}\tag{25}$$

则相应的不确性满足

$$[\Delta A(x)\ \ \Delta B_2(x)]=E(x)\varDelta(t)[F(x)\ \ F_1(x)].$$

由定理3可得如下推论:

推论 1 对于多项式LPV系统(24), 给定$\gamma_\infty>0$, 正多项式$\varepsilon_2(\theta)>\varepsilon_1(\theta)$, $\varepsilon_3(\theta,\dot\theta)$, 正实数$\varepsilon_4$和$\varepsilon_5$. 若存在对称多项式矩阵$P(\theta)$, 多项式矩阵$L(\theta,\dot\theta)$, 使得

$$P(\theta)-\varepsilon_1(\theta)I\in\varPhi_{\rm SOS},\ \varepsilon_2(\theta)I-P(\theta)\in\varPhi_{\rm SOS},$$

$$-(\varXi_3+\varepsilon_3(\theta,\dot\theta)I)\in\varPhi_{\rm SOS},\ \varXi_3=\begin{bmatrix}\varTheta_4 & \varTheta_5^{\rm T}\\ \varTheta_5 & \varTheta_2\end{bmatrix},$$

$$\varTheta_4=\begin{bmatrix}\varPi_{11} & * & * & *\\ B_1^{\rm T}(\theta) & -\gamma_\infty^2 I & * & *\\ \varPi_{12} & D_{11}(\theta) & -I & *\\ \varPi_{13} & 0 & 0 & -I\end{bmatrix},$$

$$\varTheta_5=\begin{bmatrix}F(\theta)P(\theta) & 0 & 0 & 0\\ F_1(\theta)L(\theta,\dot\theta) & 0 & 0 & 0\\ \varepsilon_4E^{\rm T}(\theta) & 0 & 0 & 0\\ \varepsilon_5E^{\rm T}(\theta) & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\varPi_{11}={\rm He}(A(\theta)P(\theta)+B_2(\theta)L(\theta,\dot\theta))-\sum_{i=1}^{n_\theta}\frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta_i}\dot\theta_i,$$

$$\varPi_{12}=C_1(\theta)P(\theta)+D_{12}(\theta)L(\theta,\dot\theta),$$

$$\varPi_{13}=C_2(\theta)P(\theta)+D_{22}(\theta)L(\theta,\dot\theta),$$

则鲁棒混合H_2/H_∞保性能控制问题可解, 且一个状态反馈增益矩阵为$u=L(\theta,\dot\theta)P^{-1}(\theta)x$.

注 4 推论1提供了一种求解多项式LPV系统的鲁棒混合H_2/H_∞保性能控制问题的方法. 现有方法通常需要对变参数格外附加凸包型或仿射型[14–16]等条件. 推论1无需这些限制, 直接将问题转化为凸优化问题.

推论 2 对于多项式非线性时不变系统(25), 给定$\gamma_\infty>0$, 正多项式$\varepsilon_1(\bar x)$, $\varepsilon_2(x)$, 正实数ε_3和ε_4. 若存在对称多项式矩阵$P(\bar x)$, 多项式矩阵$L(x)$, 使得

$$P(\bar x)-\varepsilon_1(\bar x)I\in\varPhi_{\rm SOS},$$

$$-(\varXi_4+\varepsilon_2(x)I)\in\varPhi_{\rm SOS},\ \varXi_4=\begin{bmatrix}\varTheta_6 & \varTheta_8^{\rm T}\\ \varTheta_8 & \varTheta_7\end{bmatrix},$$

$$\varTheta_6=\begin{bmatrix}\varPi_{14} & * & * & *\\ B_1^{\rm T}(x) & -\gamma_\infty^2 I & * & *\\ \varPi_{15} & D_{11}(x) & -I & *\\ \varPi_{16} & 0 & 0 & -I\end{bmatrix},$$

$$\varTheta_7=\begin{bmatrix}-\varepsilon_3 I & * & * & *\\ 0 & -\varepsilon_4 I & * & *\\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & *\\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_4 I\end{bmatrix},$$

$$\varTheta_8=\begin{bmatrix}F(x)P(\bar x) & 0 & 0 & 0\\ F_1(x)L(x) & 0 & 0 & 0\\ \varepsilon_3E^{\rm T}(x) & 0 & 0 & 0\\ \varepsilon_4E^{\rm T}(x) & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\varPi_{14}={\rm He}(A(x)P(\bar x)+B_2(x)L(x))-\sum_{i\in H}\frac{\partial P(\bar x)}{\partial x_i}A_i(x)x,$$

$$\varPi_{15}=C_1(x)P(\bar x)+D_{12}(x)L(x),$$

$$\varPi_{16}=C_2(x)P(\bar x)+D_{22}(x)L(x),$$

其中: $B_1(x)$, $B_2(x)$和$\Delta B_2(x)$中全零行的行号集合为$H=\{i_1,\cdots,i_h\}$, 并定义$\bar x=[x_{i_1}\ \ \cdots\ \ x_{i_h}]^{\rm T}$, 则鲁棒混合$H_2/H_\infty$保性能控制问题可解, 且一个状态反馈增益矩阵为$u=L(x)P^{-1}(\bar x)x$.

5 仿真例子

例 1 考虑如下倾转旋翼飞行器纵向模型[8,21]:

$$\begin{bmatrix}\dot x\\ z_\infty\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B_1 & B_2\\ C_1 & D_{11} & D_{12}\\ C_2 & 0 & D_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ w\\ u\end{bmatrix},$$

其中:

$$A=\begin{bmatrix}0 & -0.5A_{12} & 0 & 0 & 0\\ A_{21} & A_{22} & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \Delta\vartheta-\Delta\alpha & -A_{52} & A_{52} & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0.5 & B_{12} & 0\\ B_{21} & B_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 19.45\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ C_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\7\end{bmatrix}^{\rm T},$$

$C_2=[1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$, $D_{11}=0$, $D_{12}=D_{22}=[0\ \ 0\ \ 1]$, $x=[\Delta V\ \ \Delta\alpha\ \ \Delta\vartheta\ \ \Delta q\ \ \Delta H]^{\rm T}$分别是速度的误差、

攻角的误差、俯仰角的误差、俯仰角速率的误差和高度的误差; $V^*, \alpha^*, \vartheta^*, q^*, H^*$是相应状态的理想值; $u = [\Delta F_{\rm xt}\ \ \Delta F_{\rm yt}\ \ \Delta M_{\rm z}]^{\rm T}$分别是沿机体$x$和$y$轴的力的分量误差以及俯仰力矩误差; $F^*_{\rm xt}, F^*_{\rm yt}, M^*_{\rm z}$是相应输入的理想值. 其中:

$$\begin{aligned}
A_{12} &= -(1.873\theta^2 + 0.122\theta + 1.468)\dot{\theta},\\
A_{21} &= (0.0018\theta^2 + 1.226\times10^{-4}\theta + 0.0015)\dot{\theta} - \\
&\quad (4.411\times10^{-4}\theta^2 - 0.0112\theta - 0.0594)\times \\
&\quad (0.0014\theta^2 + 0.0148\theta + 11.52)(-0.1643\times \\
&\quad \Delta V + 9.19\times10^{-4}\theta^2 - 0.0098\theta - 7.6041),\\
A_{22} &= (4.411\times10^{-4}\theta^2 - 0.0112\theta - 0.0594)\times \\
&\quad (0.0596\Delta V - 3.569\times10^{-5}\theta^2 - \\
&\quad 0.0018\theta - 0.0702),\\
A_{52} &= -0.0027\theta^2 - 0.0297\theta + 23.04,\\
B_{12} &= 0.0016\theta^3 - 0.0053\theta^2 + 4.0745\times10^{-4}\theta - \\
&\quad 0.5\Delta\alpha - 0.0199,\\
B_{21} &= (0.0016\theta^3 - 0.0053\theta^2 + 4.0745\times10^{-4}\theta - \\
&\quad 0.5\Delta\alpha - 0.0199)(-0.0596\Delta V + 3.569\times \\
&\quad 10^{-5}\theta^2 + 0.0018\theta + 0.0702),\\
B_{22} &= 0.0095\Delta V + 3.569\times10^{-5}\theta^2 + \\
&\quad 0.0041\theta + 0.0702.
\end{aligned}$$

为了验证本文方法的可行性和有效性, 针对下列2种情形进行仿真.

1) H_∞控制和混合H_2/H_∞保性能控制.

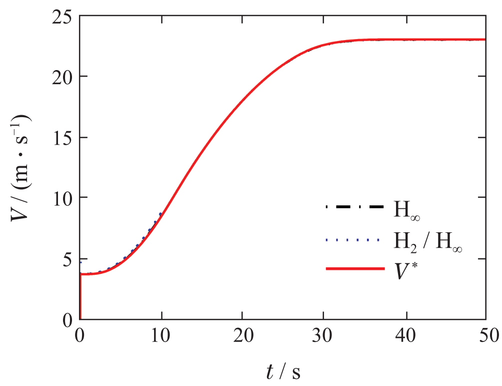
仿真中:

$$\varepsilon_1(\tilde{x},\theta) = 1\times10^{-8},\ \varepsilon_2(\tilde{x},\theta) = 1.1257,$$
$$\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta}) = 1\times10^{-5},\ \gamma_\infty = 0.9.$$

根据定理2, 通过MATLAB求解相应的可解性条件. 作为对比, 在定理2中令$C_2 = D_{22} = 0$, 在同等仿真环境下, 求解NPV系统的H_∞控制问题. 系统的初始状态$x_0 = [1\ \ 0.01\ \ 0.01\ \ 0.01\ \ 0.1]^{\rm T}$, 取

$$w = \begin{cases} 5t,\ 0 < t \leqslant 10,\\ 0,\quad t > 10. \end{cases}$$

从图1–4可以看出, H_∞控制和混合H_2/H_∞保性能控制方法都能保证系统的状态收敛到平衡点.



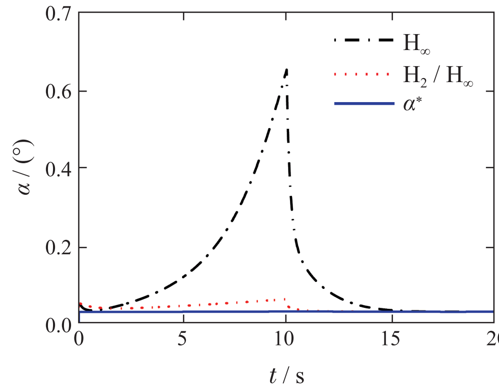
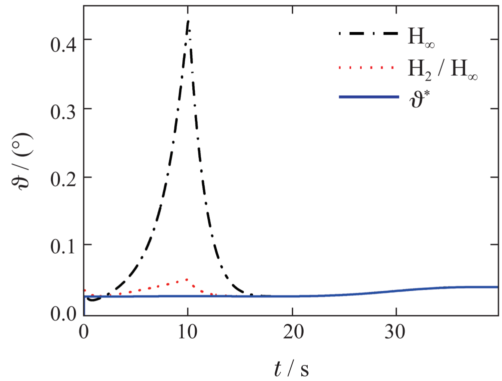


图 1　速度和攻角跟踪轨迹

Fig. 1　Trajectories of the velocity and the angle of attack



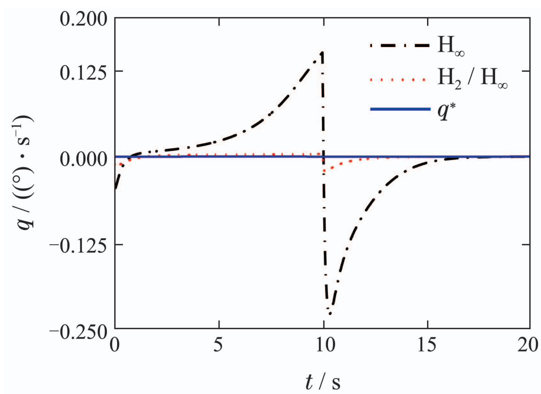
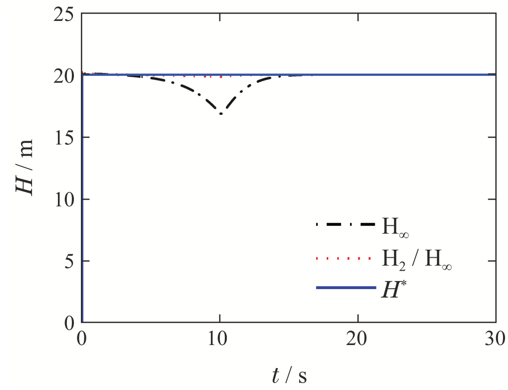


图 2　俯仰角和俯仰角速率跟踪轨迹

Fig. 2　Trajectories of the pitch angle and the pitch rate

然而, 相比H_∞控制, 混合H_2/H_∞控制超调相对更小, 有较好地跟踪效果, 具有更好的暂态性能.



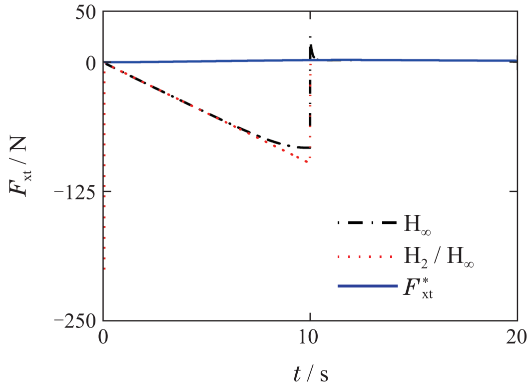


图 3 高度和F_{xt}跟踪轨迹

Fig. 3 Trajectories of the altitude and F_{xt}

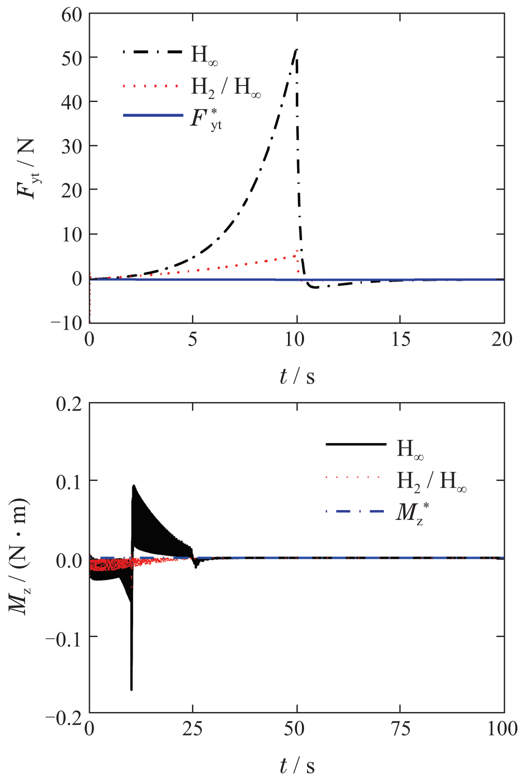


图 4 F_{yt}和M_z跟踪轨迹

Fig. 4 Trajectories of F_{yt} and M_z

2) LPV和NPV系统的混合H_2/H_∞保性能控制.

仿真中

$$\varepsilon_1(\tilde{x},\theta)=1\times10^{-7},\ \varepsilon_2(\tilde{x},\theta)=0.82466,$$
$$\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})=1\times10^{-5},\ \gamma_\infty=0.9.$$

通过定理2, 求解相应的可解性条件. 作为对比, 将倾转旋翼飞行器纵向误差系统在平衡点处线性化, 得到LPV模型, 在同等的仿真环境下, 求解LPV系统的混合H_2/H_∞保性能控制问题.

$$x_0=[1\ \ 0.01\ \ 0.01\ \ 0.01\ \ 0.1]^{\mathrm{T}}$$

为系统的初始状态, 取

$$w=\begin{cases}5\sin t, & 0<t\leqslant10,\\ 0, & t>10.\end{cases}$$

对于LPV模型, 在同等的仿真环境和参数下, 基于SOS技术得到的feasratio值为负数, 无法得到一个可行的控制器.

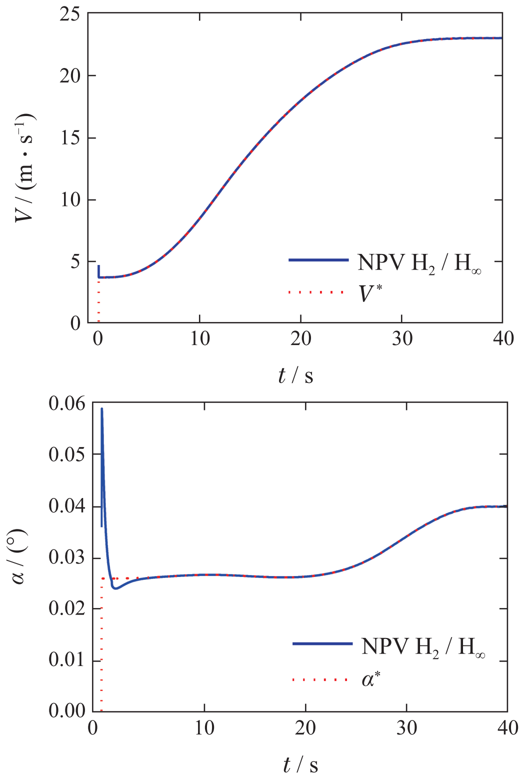


图 5 速度和攻角跟踪轨迹

Fig. 5 Trajectories of the velocity and the angle of attack

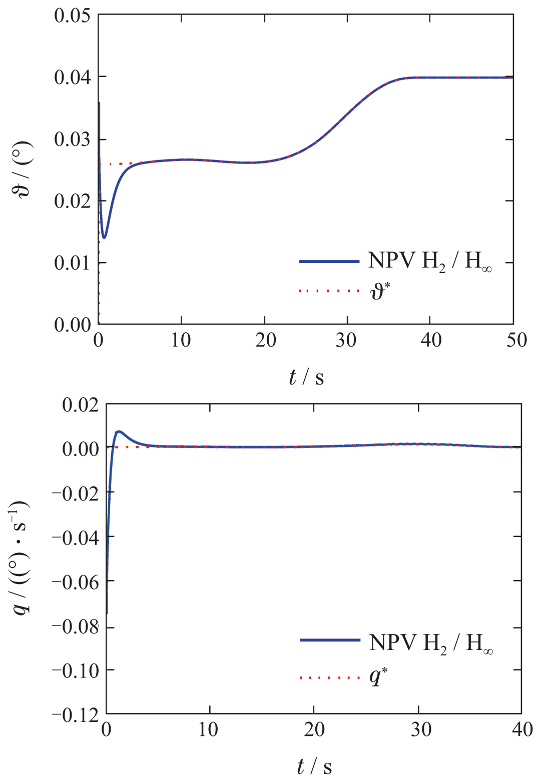


图 6 俯仰角和俯仰角速率跟踪轨迹

Fig. 6 Trajectories of the pitch angle and the pitch rate

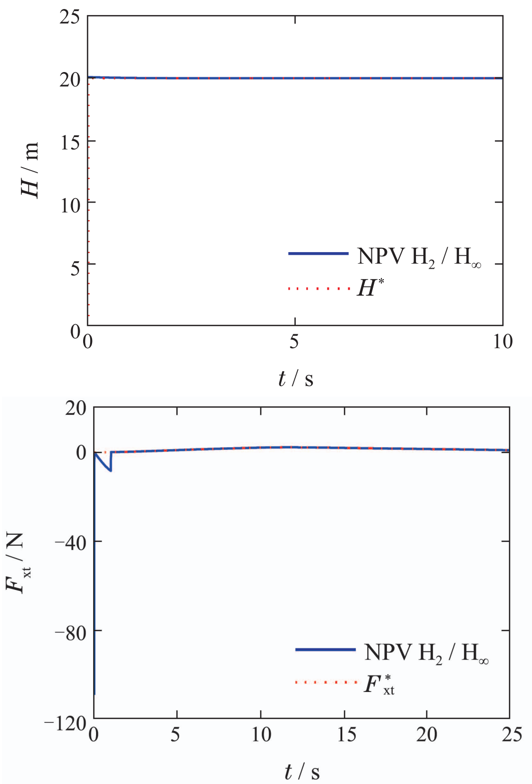


图 7　高度和$F_{\rm xt}$跟踪轨迹

Fig. 7　Trajectories of the altitude and $F_{\rm xt}$

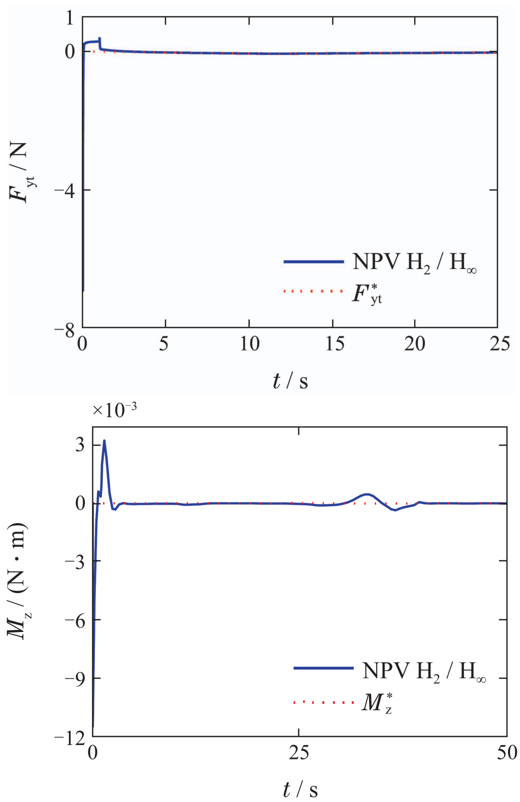


图 8　$F_{\rm yt}$和$M_{\rm z}$跟踪轨迹

Fig. 8　Trajectories of $F_{\rm yt}$ and $M_{\rm z}$

从上图5–8可以看出, 本文提出的混合H_2/H_∞保性能控制器法能够保证系统的状态收敛到平衡点, 且具有较好地跟踪效果.

例 2　在文献[9]NPV系统的基础上, 考虑其不确定性模型:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ z_\infty\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+E\Delta F & B_1 & B_2+E\Delta F_1\\ C_1 & 0 & 1\\ C_2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ w\\ u\end{bmatrix},$$

其中:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}{\rm e}^t & 1\\ \dfrac{t^2}{2}x_1 & 1+t+\dfrac{t^2}{2}\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},\ F_1^{\rm T}=C_1=[0\ \ 0.1],\ C_2=[0\ \ 0.01].$$

仿真中, 参数$\varepsilon_1(\hat{x},\theta)$, $\varepsilon_2(\hat{x},\theta)$和$\varepsilon_3(x,\theta,\dot{\theta})$作为SOS自由变量, $\varepsilon_4=1\times10^{-5}$, $\varepsilon_5=1\times10^{-6}$, $\gamma_\infty=0.9$. 为了验证本文方法的鲁棒性和干扰抑制能力, 针对下列2种情形进行仿真.

1) NPV系统的鲁棒H_∞控制和鲁棒混合H_2/H_∞保性能控制.

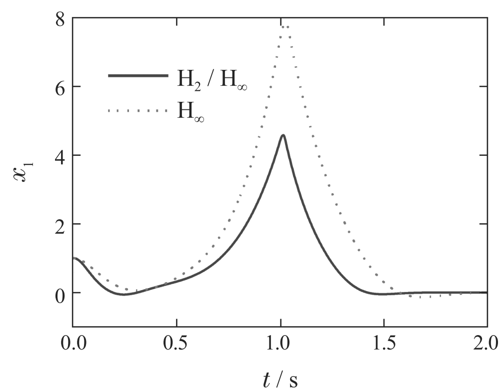
根据定理3, 通过MATLAB中的SOSTOOLS工具箱求解相应的可解性条件. 作为对比, 在定理3中令$C_2=D_{22}=0$, 在同等的仿真环境下, 求解NPV系统的H_∞控制的SOS凸约束问题. $x_0=[1\ \ -1]^{\rm T}$为系统的初始状态, 取$w=\begin{cases}5t+5{\rm e}^{6t}, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1.\end{cases}$

从图9可以看出, 两种方法都能保证系统的状态收敛到平衡点. 然而, 相比H_∞控制, 鲁棒混合H_2/H_∞保性能控制超调相对更小, 具有更好的暂态性能.

2) LPV系统和NPV系统的鲁棒混合H_2/H_∞保性能控制.

将仿真系统在平衡点处线性化, 得到LPV模型, 在同等的仿真环境下, 应用推论1求解对应的SOS凸约束问题. 初始状态$x_0=[1\ \ -1]^{\rm T}$, 取

$$w=\begin{cases}0.5\sin t+{\rm e}^{-2t}, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1.\end{cases}$$



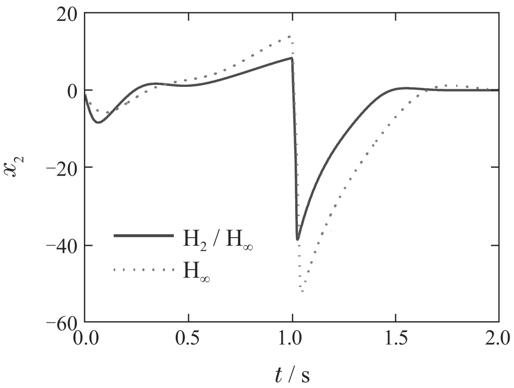


图 9 H_∞和混合H_2/H_∞控制轨迹

Fig. 9 Trajectories of H_∞ and mixed H_2/H_∞ control

从图10可知, 随着时间的增长, 不确定性和干扰对系统的影响逐渐消失, 相应闭环系统的状态都能收敛到平衡点. 然而, 相比LPV系统的混合H_2/H_∞保性能控制, NPV系统的鲁棒混合H_2/H_∞保性能控制收敛速度更快, 超调也更小, 具有更好的暂态性能.

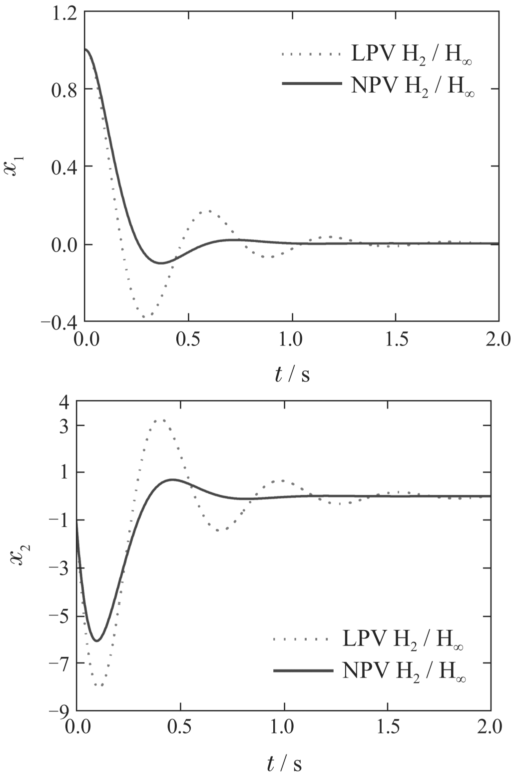


图 10 LPV系统和NPV系统的混合H_2/H_∞控制轨迹

Fig. 10 Trajectories of the mixed H_2/H_∞ control for LPV and NPV systems

6 结论

本文研究了一类多项式NPV系统的全局和局部混合H_2/H_∞保性能控制问题. 结合Lyapunov稳定性理论, 给出了该类系统的混合H_2/H_∞保性能控制问题在多项式平方框架下的可解性条件, 另外, 进一步考虑了该类系统存在不确定性情形, 给出了相应鲁棒控制器的求解方法. 本文的主要优势在于将LPV系统和类线性系统框架下的一些重要思想推广到NPV系统中, 通过SOS方法直接求解状态和参数依赖的线性矩阵不等式可解性条件, 较好地克服线性时变系统和类非线性系统控制理论中普遍存在的计算困难问题.

参考文献:

[1] WU F, PRAJNA S. SOS-based solution approach to polynomial LPV system analysis and synthesis problems. *International Journal of Control*, 2005, 78(8): 600 – 611.

[2] HUANG Wenchao, SUN Hongfei, ZENG Jianping. Robust H_∞ control for a class of polynomial nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(12): 1587 – 1593.
(黄文超, 孙洪飞, 曾建平. 一类多项式非线性系统鲁棒H_∞控制. 控制理论与应用, 2012, 29(12): 1587 – 1593.)

[3] BAI H H, ZHOU Y R, SUN H F, et al. Observer-based nonlinear H_∞ attitude control for a flexible satellite. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(15): 2403 – 2411.

[4] MIN H, XU S, ZHANG B, et al. Output-feedback control for stochastic nonlinear systems subject to input saturation and time-varying delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(1): 359 – 364.

[5] SHAMMA J S, ATHANS M. Gain scheduling: Potential hazards and possible remedies. *IEEE Control Systems*, 1992, 12(3): 101 – 107.

[6] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, WU F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach. *Proceeding of the 5th Asian Control Conference*. Melbourne, Australia: IEEE, 2004: 157 – 165.

[7] PRAJNA S, PARRILO P A, RANTZER A. Nonlinear control synthesis by convex optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(2): 310 – 314.

[8] FU R, SUN H F, ZENG J P. Exponential stabilisation of nonlinear parameter-varying systems with applications to conversion flight control of a tilt rotor aircraft. *International Journal of Control*, 2019, 92(11): 2473 – 2483.

[9] FU R, ZENG J P, DUAN Z S. H_∞ mixed stabilization of nonlinear parameter-varying systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(4): 522 – 5246.

[10] LU L H, FU R, ZENG J P, et al. On the domain of attraction and local stabilization of nonlinear parameter-varying systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(8): 17 – 32.

[11] SUN Yunquan, SUN Yukun, LIU Xianxing, et al. H_2/H_∞ cost-guaranteed control for the static synchronous compensator. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(6): 641 – 646.
(孙运全, 孙玉坤, 刘贤兴, 等. H_2/H_∞保性能控制理论在静止无功发生器控制中的应用. 控制理论与应用, 2009, 26(6): 641 – 646.)

[12] KARIMI H R. Observer-based mixed H_2/H_∞ control design for linear systems with time-varying delays: An LMI approach. *International Journal of Control, Automation, and System*, 2008, 6(1): 1 – 14.

[13] MAO W H, DENG F Q, WAN A H. Robust mixed H_2/H_∞ guaranteed cost control of uncertain stochastic neutral systems. *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 2012, 30(5): 699 – 717.

[14] DELIBASI A, KUCUKDEMIRAL I B, CANSEVER G. H_2/H_∞ guaranteed-cost control of LPV systems with saturating actuators. *Proceeding of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Ajaccio, France: IEEE, 2008: 152 – 157.

[15] GAO H J, LAM J, WANG C H. Mixed H_2/H_∞ filtering for continuous-time polytopic systems: A parameter-dependent approach. *Circuits Systems Signal Processing*, 2005, 24(6): 689 – 702.

[16] ZHAO Y Y, YANG J Y, LEI Z D. H_∞ guaranteed cost control for LPV systems subject to the gain constraint. *Asian Journal of Control*, 2014, 16(2): 609 – 616.

[17] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, SEILER P, et al. *SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB*. Pasadena, California: California Institute of Technology, 2004. http://www.cds.caltech.edu/sostool/.

[18] REZNICK B. Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem. *Contemporary Mathematics*. Providence: American Mathematical Society, 2000: 251 – 272.

[19] JARVIS-WLOSZEK Z W. *Lyapunov based analysis and controller synthesis for polynomial systems using sum-of-squares optimization*. Berkeley, CA: University of California, 2003.

[20] XU S Y, LU J W, ZHOU S S, et al. Design of observers for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with time delay. *Journal of the Franklin Institute*, 2004, 341(3): 295 – 308.

[21] ZHU P F, WANG J Y, ZENG J P. The guaranteed cost controller for nonlinear systems with time-varying parameters and input saturation. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2020, 42(3): 565 – 575.

作者简介:

朱平芳　博士研究生, 目前研究方向为鲁棒控制、非线性控制、时变系统控制, E-mail: yiyizpf@126.com;

周燕茹　讲师, 目前研究方向为非线性控制、姿态控制, E-mail: zhouyr1986@126.com;

曾建平　教授, 目前研究方向为鲁棒控制、非线性控制、复杂系统控制, E-mail: jpzeng@xmu.edu.cn.