

不确定通信拓扑下多智能体系统鲁棒一致性

陈阳舟, 黄小龙, 詹璟原[†]

(北京工业大学 人工智能与自动化学院, 北京 100124)

摘要: 本文研究一类具有通信不确定的多智能体系统鲁棒一致性问题. 本文提出基于标称通信拓扑有向生成树的线性变换方法, 将线性多智能体系统的状态一致性问题转化为相应线性系统的鲁棒部分变元渐近稳定性问题. 首先采用基于有向生成树关联矩阵的线性变换, 将多智能体系统网络的全局状态方程转化为一个降阶子系统; 其次, 将拉普拉斯矩阵的摄动部分进行分解, 利用降阶系统设计鲁棒二次镇定控制器, 推导出所有智能体状态达到渐近一致的充分条件. 在此基础上将控制协议的参数设计转化为求解线性矩阵不等式的可行解. 最后, 通过数值仿真验证了所提出的一致性协议分析与设计方法的可行性和有效性.

关键词: 多智能体系统; 通信不确定性; 状态一致性; 部分变元稳定性; 分布式一致性协议

引用格式: 陈阳舟, 黄小龙, 詹璟原. 不确定通信拓扑下多智能体系统鲁棒一致性. 控制理论与应用, 2020, 37(8): 1709 – 1716

DOI: 10.7641/CTA.2020.90927

Robust consensus of multi-agent systems with uncertain communication topology

CHEN Yang-zhou, HUANG Xiao-long, ZHAN Jing-yuan[†]

(College of Artificial Intelligence and Automation, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: Distributed robust consensus problem for a class of multi-agent systems (MASs) with uncertain communication topology is investigated. We propose a state linear transformation by constructing the incidence matrix of a directed spanning tree in the nominal communication topology, and transform the problem of state consensus of uncertain multi-agent systems into the problem of robust partial asymptotic stability of corresponding linear systems. Firstly, we use the linear transformation constructed from a directed spanning tree to transform the closed uncertain MAS into a reduced-order system. Secondly, by using decomposition of perturbation Laplacian matrix, we design a quadratic stabilization robust controller for the reduced-order system, and derive a sufficient condition guaranteeing all agents's states to achieve asymptotic consensus. Based on the condition, the design problem of protocol parameters is converted into finding the feasible solution of linear matrix inequalities. Finally, the effectiveness and feasibility of the proposed approach is verified by simulation examples.

Key words: multi-agent systems; communication uncertain; state consensus; partial stability; distributed consensus protocol

Citation: CHEN Yangzhou, HUANG Xiaolong, ZHAN Jingyuan. Robust consensus of multi-agent systems with uncertain communication topology. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(8): 1709 – 1716

1 引言

近年来, 多智能体系统一致性问题研究受到了国内外学者的广泛关注, 主要原因在于其广泛的应用前景, 譬如各类运动体的编队控制、群集运动、蜂拥控制以及分布式传感器网络融合的应用等^[1]. 解决一致性问题关键在于设计合适的控制协议, 使得各智能体通过网络通信获取邻居信息, 并依此来调整自身的状

态, 从而使各自状态渐近地或有限时间内达到一致. 尽管多智能体系统一致性理论研究取得了很大的进展, 但还存在一些不足. 例如针对系统中各种不确定性情况(包括模型不确定性和通信不确定性等)的鲁棒一致性问题研究还不充分. 本文重点考虑一般确定性线性多智能体系统在不确定通信权值下的鲁棒一致性问题.

收稿日期: 2019-11-07; 录用日期: 2020-04-08.

[†]通信作者. E-mail: jy-zhan@bjut.edu.cn; Tel.: +86 10-67396189.

本文责任编辑: 方浩.

国家自然科学基金项目(61573030, 61803007)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61573030, 61803007).

实际系统中,由于智能体之间的通信连接不可靠或受通讯范围限制,智能体之间的信息拓扑可能会动态变化.针对此类问题,一种方法是将通信拓扑考虑为马尔可夫切换过程.例如,文献[2]研究了线性多智能体系统基于马尔可夫切换通信拓扑的一致性条件.文献[3]研究了具有网络拓扑随机时延的二阶离散多智能体系统的一致性.文献[4]分别考虑了二阶多智能体系统在具有与不具有时延两种情况下的一致性条件.文献[5]利用Lyapunov方法,证明了在随机网络切换拓扑下,连续与离散多智能体系统实现均方一致的条件.

另一种针对具有不确定性通信拓扑的多智能体系统的研究方法是基于鲁棒控制理论.文献[6-7]采用矩阵不等式方法分析具有不确定性通信拓扑的单积分多智能体系统一致性问题,提出了实现平均一致性的充分条件.文献[8]研究具有不确定性通信拓扑的二阶线性多智能体系统鲁棒 H_∞ 一致性控制问题,提出了实现鲁棒 H_∞ 平均一致性控制的充分条件.文献[9]研究具有不确定性通信拓扑的一阶线性多智能体系统鲁棒 H_∞ 一致性控制问题,通过构造跟踪虚拟领导者,实现了当系统稳定时的鲁棒 H_∞ 一致性控制.文献[10]研究具有外界干扰的三阶线性多智能体系统鲁棒 H_∞ 一致性控制问题,设计控制协议满足在不确定拓扑和状态时滞的情况下,实现鲁棒 H_∞ 一致性控制.文献[11]研究了网络拓扑同时存在通信时延和结构不确定的多智能体系统一致性问题.采用图论方法将一致性问题转化为系统的渐近稳定性问题.文献[12]针对存在不确定性通信拓扑多智能体系统,采用线性分式变换方法,解决鲁棒一致性问题.文献[13]针对存在不确定性通信拓扑和外界干扰的二阶线性多智能体系统,采取鲁棒 H_∞ 控制,实现了鲁棒 H_∞ 旋转平均一致性.文献[14]针对多智能体不确定性和网络不确定性,根据第一个智能体状态变量与其他智能体状态变量之差,列出新的状态方程,设计控制协议,实现了多智能体系统鲁棒 H_∞ 一致性问题.文献[15]研究具有网络的不确定性二阶线性多智能体系统,将不确定拓扑参数重新定义为自变量,将多智能体系统构造为一个特殊的多项式系统,利用控制系统的稳定性理论将鲁棒一致性问题转化为误差模型的鲁棒稳定性分析.文献[16-17]针对存在外部干扰的离散时间多智能体系统,在无向不确定性拓扑情况下,推导出鲁棒 H_∞ 平均一致性控制的充分条件.

上述研究存在一些不足之处:一是考虑的模型可能为一阶或二阶的特殊情况;二是限定为平均一致性,即群体决策量为所有个体初始状态的平均值,这通常要求网络拓扑是无向图或者是平衡的有向图^[18].本文在现有研究基础上,针对一般高阶线性多智能体系统和一般有向通信拓扑,提出一种基于线性变换的鲁棒

部分变元渐近稳定性方法解决通信不确定性情况下的多智能体系统状态一致性问题.首先,选取标称通信拓扑图 $\mathcal{G}$ 的有向生成树的关联矩阵构造线性变换,采用该变换将多智能体系统状态一致性问题转化为相应线性系统的鲁棒部分变元渐近稳定性问题.其次,通过对拉普拉斯摄动矩阵 ΔL 进行分解,使其满足不确定性匹配条件,从而将一致性协议的增益矩阵求解转化为参数不确定系统的鲁棒二次镇定问题.最后,应用鲁棒二次稳定性与镇定控制方法给出一致性条件和协议增益矩阵设计过程.通过数值仿真例子验证本文提出方法的正确性和有效性.

本文采用 $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵; $|\cdot|$ 表示绝对值; $\|\cdot\|$ 表示欧式范数.

2 问题描述

考虑 N 个连续时间线性智能体组成的多智能体系统,其中第 i 个智能体的状态方程为

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

这里 $x_i \in \mathbb{R}^n$ 和 $u_i \in \mathbb{R}^p$ 分别表示第 i 个智能体的状态和控制(或称为协议).

假设智能体之间的通信关系由有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 表示,其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$ 表示智能体编号集合, $\mathcal{E} = \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}\}$ 表示智能体间的通信连接关系,即边 $(j, i) \in \mathcal{E}$ 表示智能体 j 可传递信息给智能体 i (此时称智能体 j 为智能体 i 的通信邻居).定义智能体 i 的通信邻居集合 $N_i = \{j : (j, i) \in \mathcal{E}, j \in \mathcal{V}, i \neq j\}$,由此智能体之间的通信关系可以用智能体通信邻居集合 $\{N_i : i = 1, \dots, N\}$ 表示.进一步,假设智能体间的通信连接强度具有不确定性,即有向图 $\mathcal{G}$ 的有向边 (j, i) 的权值表示为 $a_{ij} + \Delta a_{ij} \geq 0$,其中 $a_{ij} > 0$ 为标称连接权值, Δa_{ij} 为未知有界权值,表示通信连接的不确定性.假设存在标量 $\rho_{ij} \geq 0$ 使得 $|\Delta a_{ij}| \leq \rho_{ij}$.

本文目的是针对具有不确定性通信连接的多智能体系统(1),设计控制协议 u_i 使得其在该控制协议下达到状态一致.

假设基于智能体 i 与其邻居智能体 $j \in N_i$ 之间的局部状态信息,构造如下分布式控制协议:

$$u_i = K \sum_{j \in N_i} (a_{ij} + \Delta a_{ij})(x_i - x_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

其中 $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 为需要设计的反馈增益矩阵.

定义 1 对于智能体 i 任意的初始状态 $x_i(0)$ 和任意满足 $|\Delta a_{ij}| \leq \rho_{ij}$ 的有界不确定性通信连接,如果智能体(1)在协议(2)作用下满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N,$$

则称系统(1)达到通信连接鲁棒状态一致.

定义 2 一个有向图称为一棵树,如果除根节点

以外的其他所有节点都只有一个父节点; 一个有向图称为包含一棵有向生成树, 如果存在一棵包含该有向图所有节点的树^[19-20].

本文假定通信图在标称连接权值条件下存在有向生成树.

3 基于线性变换的一致性问题的转化

令 $x = [x_1^T \cdots x_N^T]^T$, 在协议(2)作用下, 系统(1)的闭环表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \Phi x(t), \\ \Phi &= I_N \otimes A + (L + \Delta L) \otimes BK, \end{aligned} \quad (3)$$

其中: L 为有向图 $\mathcal{G}$ 相应于权值 a_{ij} 的拉普拉斯矩阵, $\Delta L = [\Delta l_{ij}]_{N \times N}$ 表示为对应于不确定性 Δa_{ij} 的拉普拉斯矩阵, 其中

$$\Delta l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \in N_i} \Delta a_{ik}, & j = i, \\ -\Delta a_{ij}, & j \neq i. \end{cases}$$

注意这里容许摄动 Δa_{ij} 为负值, 且使得 $a_{ij} + \Delta a_{ij} \geq 0$.

与文献[9-10]不同, 本文假设每个有向边权值摄动互相独立, 这更符合实际情况. 下面对摄动矩阵 ΔL 进行分解, 使其满足如下匹配条件 $\Delta L = E \Sigma(t) F$, 其中: E 和 F 为具有适当维数的已知矩阵; $\Sigma(t)$ 为未知函数矩阵, 属于满足如下范数有界条件的集合:

$$\Omega = \{ \Sigma(t) | \Sigma^T(t) \Sigma(t) \leq I, \forall t \},$$

分解过程依赖于如下引理1:

引理 1^[8] 给定顶点数为 N 边数为 M 的有向图 $\mathcal{G}$, 定义矩阵 $E = [e_{ip}]_{N \times M}$ 和 $D = [d_{pj}]_{M \times N}$ 如下:

$$\begin{aligned} e_{ip} &= \begin{cases} 1, & \text{若 } i \text{ 为有向边 } p \text{ 的终端节点,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\ d_{pj} &= \begin{cases} 1, & \text{若 } j \text{ 为有向边 } p \text{ 的起始节点,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

让 $\Sigma(t) = \text{diag}\{q_1, \dots, q_M\}$, 其中 $q_p = \Delta a_p / \rho_p$ 表示第 p 条边的归一化摄动权值, 则有向图 $\mathcal{G}$ 的不确定拉普拉斯矩阵 ΔL 可以表示为

$$\Delta L = E \Sigma(t) F, \quad (4)$$

其中: $F = \rho_\delta (E^T - D)$, $\rho_\delta = \text{diag}\{\rho_{ij}\}$.

选取图 $\mathcal{G}$ 在标称连接权值条件下的有向生成树的关联矩阵来构造线性变换, 将具有不确定性通信拓扑的多智能体系统的一致性等问题等价地转换为相应线性系统的鲁棒部分变元渐近稳定性问题.

有向图 $\mathcal{G}$ 的有向生成树包含 N 个节点和 $N-1$ 条有向边. 设该有向生成树的 $N \times (N-1)$ 关联矩阵为 $\tilde{W}_0$, 其行对应生成树的节点, 列对应生成树的有向边, 第 i 行第 j 列的元素 w_{ij} 定义为

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \text{ 为有向边 } j \text{ 的起始节点,} \\ -1, & \text{若 } i \text{ 为有向边 } j \text{ 的终端节点,} \\ 0, & \text{若 } i \text{ 不与有向边 } j \text{ 关联.} \end{cases}$$

以关联矩阵 $\tilde{W}_0$ 的转置矩阵为行向量, 并在最后一行加上行向量 $\mathbf{1}_N^T$, 构建非奇异变换矩阵

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{N-1} \\ W_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{W}_0^T \\ \mathbf{1}_N^T \end{bmatrix} \otimes I_n, \quad (5)$$

其中: $\mathbf{1}_N$ 表示元素全为1的 N 维列向量, I_n 表示 $n \times n$ 维单位矩阵, $W_i \in \mathbb{R}^{n \times (Nn)}$, 相应的逆矩阵 W^{-1} 可以表示为

$$W^{-1} = [\bar{W}_1 \ \bar{W}_2 \ \cdots \ \bar{W}_{N-1} \ \bar{W}_N] = [\hat{W}_0 \ N^{-1} \mathbf{1}_N] \otimes I_n,$$

其中: $\bar{W}_i \in \mathbb{R}^{(Nn) \times n}$, $\hat{W}_0 \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$.

利用矩阵(5)构造系统(3)的线性变换

$$\bar{x} = Wx, \quad (6)$$

将其可转化为如下形式的不确定系统:

$$\dot{\bar{x}}(t) = W \Phi W^{-1} \bar{x}(t); \quad (7)$$

或如下结构分解的形式:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \bar{A}y + \bar{B}\eta, \\ \dot{\eta}(t) = \bar{C}y + \bar{D}\eta, \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= [y^T \ \eta^T]^T, \\ y &= [\bar{x}_1^T \ \cdots \ \bar{x}_{N-1}^T]^T \in \mathbb{R}^{(N-1)n}, \\ \eta &= \bar{x}_N \in \mathbb{R}^n, \\ \bar{A} &= (\tilde{W}_0^T \otimes I_n) \Phi (\hat{W}_0 \otimes I_n), \\ \bar{B} &= N^{-1} (\tilde{W}_0^T \otimes I_n) \Phi (\mathbf{1}_N \otimes I_n), \\ \bar{C} &= (\mathbf{1}_N^T \otimes I_n) \Phi (\hat{W}_0 \otimes I_n), \\ \bar{D} &= N^{-1} (\mathbf{1}_N^T \otimes I_n) \Phi (\mathbf{1}_N \otimes I_n). \end{aligned}$$

引理 2 不确定系统(7)具有下面的形式:

$$\dot{y}(t) = \bar{A}y, \quad (9a)$$

$$\dot{\eta}(t) = \bar{C}y + \bar{D}\eta, \quad (9b)$$

其中: $\bar{A} = I_{N-1} \otimes A + \tilde{W}_0^T (L + \Delta L) \hat{W}_0 \otimes BK$, $\bar{C} = \mathbf{1}_N^T (L + \Delta L) \hat{W}_0 \otimes BK$, $\bar{D} = A$.

证 根据线性变换矩阵 W 和拉普拉斯矩阵的性质, 可得如下3个条件:

$$\tilde{W}_0^T \mathbf{1}_N = 0, \ \mathbf{1}_N^T \hat{W}_0 = 0, \ L \mathbf{1}_N = 0.$$

另外 ΔL 的第 i 个对角元素等于所有以节点 i 为终

端节点的边的摄动权值之和, 所以 $\Delta L \mathbf{1}_N = 0$ 依然成立. 结合矩阵的Kronecker积的性质, 可得到不确定系统(8)的系数矩阵 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ 分别为

$$\begin{aligned}\bar{A} &= I_{N-1} \otimes A + \tilde{W}_0^T (L + \Delta L) \hat{W}_0 \otimes BK, \\ \bar{B} &= 0, \\ \bar{C} &= \mathbf{1}_N^T (L + \Delta L) \hat{W}_0 \otimes BK, \\ \bar{D} &= A.\end{aligned}$$

因此系统(7)具有系统(9)的形式. 证毕.

由此可知, $y = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_N$, 即多智能体系统(1)的渐近鲁棒一致等价于(9)的部分变元 y 鲁棒渐近稳定. 等价地, 多智能体系统(1)的渐近鲁棒一致当且仅当 $\dot{y} = \bar{A}y$ 鲁棒渐近稳定.

注1 本文通过线性变换(6)将多智能体一致性问题转化为部分变元 y 渐近稳定性问题, 然后通过线性变换后的系统稳定性条件求解控制协议参数, 使多智能体系统能够在所设计的控制协议下达到渐近稳定一致. 平均误差变量构建的变换矩阵方法要求网络拓扑是无向图或者是平衡的有向图, 而本文构建关联矩阵的线性变换方法对网络拓扑无上述特殊要求, 适用于包含有向生成树的有向图情形, 因此更具一般性. 本文方法优势还在于控制算法易于实现, 针对性能可分析的降阶子系统, 设计该系统的稳定化控制律, 实现 $(N-1)n$ 维变量 y 稳定, 就可以确定多智能体系统所有节点的状态最终趋于一致.

注2 线性变换(6)中的矩阵是基于标称通信拓扑图的有向生成树的关联矩阵构造的, 这个有向生成树可能由于连接权值摄动而被破坏, 即使连接权值摄动后的通信图不再具有该生成树, 但这并不影响笔者采用基于该生成树的变换矩阵. 事实上, 如文献[19-20]一样, 可以不考虑这个变换矩阵与通信拓扑图的权值摄动有关联性.

4 多智能体系统一致条件和协议设计

为便于分析不确定性系统(9a)的鲁棒渐近稳定性, 首先介绍如下两个引理.

引理3^[21] 对于适当维数的已知矩阵 $\Psi = \Psi^T$, E, F 和满足 $\Sigma^T(t)\Sigma(t) \leq I$ 的未知 $\Sigma(t)$, 不等式

$$\Psi + E\Sigma(t)F + F^T\Sigma(t)^TE^T < 0$$

成立的充分必要条件是: 存在标量 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\Psi + \varepsilon^{-1}EE^T + \varepsilon F^TF < 0.$$

引理4^[21] 将对称矩阵 S 分割为

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix},$$

其中: $S_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $S_{12} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, 则 $S < 0$ 当且仅当以下条件之一成立:

- 1) $S_{11} < 0$, $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- 2) $S_{22} < 0$, $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

定义3 对于具有参数不确定性的系统(9a), 如果存在一个正定矩阵 $I_{N-1} \otimes P$ (即 P 为正定矩阵) 和一个正的标量 α , 使得对任意的不确定性(4), Lyapunov函数 $V(y) = y^T(I_{N-1} \otimes P)y$ 沿着系统(9a)的状态轨迹关于时间的导数满足条件

$$\dot{V}(y) \leq -\alpha \|y\|^2,$$

则称系统(9a)是二次渐近稳定的.

下面通过不确定性系统(9a)的二次渐近稳定性分析给出本文的主要结果.

定理1 多智能体系统(1)在协议(2)作用下达到通信连接鲁棒状态一致的充分条件是: 存在标量 $\varepsilon > 0$, 矩阵 Y , 对称正定矩阵 $X > 0$, 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Xi & \tilde{W}_0^T E \otimes B & (F\hat{W}_0 \otimes Y)^T \\ (\tilde{W}_0^T E \otimes B)^T & -\varepsilon I & 0 \\ F\hat{W}_0 \otimes Y & 0 & -\varepsilon^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned}\Xi &= I_{N-1} \otimes AX + I_{N-1} \otimes XA^T + \\ &\quad \tilde{W}_0^T L \hat{W}_0 \otimes BY + (\tilde{W}_0^T L \hat{W}_0 \otimes BY)^T.\end{aligned}$$

若矩阵不等式(10)的可行解为 X 和 Y , 则协议(2)的反馈增益矩阵为 $K = YX^{-1}$.

证 构造如下的Lyapunov函数:

$$V(y) = y^T(I_{N-1} \otimes P)y,$$

其中矩阵 P 是正定的, 可知Lyapunov函数 $V(y)$ 是正定的. 沿着闭环系统(9a)的任意状态轨迹, $V(y)$ 关于时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \\ &\dot{y}^T(I_{N-1} \otimes P)y + y^T(I_{N-1} \otimes P)\dot{y} = \\ &y^T[I_{N-1} \otimes PA + I_{N-1} \otimes A^TP + \\ &\tilde{W}_0^T L \hat{W}_0 \otimes PBK + (\tilde{W}_0^T L \hat{W}_0 \otimes PBK)^T + \\ &\tilde{W}_0^T \Delta L \hat{W}_0 \otimes PBK + (\tilde{W}_0^T \Delta L \hat{W}_0 \otimes PBK)^T]y.\end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned}Q &= I_{N-1} \otimes PA + I_{N-1} \otimes A^TP + \\ &\tilde{W}_0^T L \hat{W}_0 \otimes PBK + (\tilde{W}_0^T L \hat{W}_0 \otimes PBK)^T + \\ &\tilde{W}_0^T \Delta L \hat{W}_0 \otimes PBK + (\tilde{W}_0^T \Delta L \hat{W}_0 \otimes PBK)^T.\end{aligned} \quad (11)$$

根据二次稳定的定义, 对所有允许的不确定性, 若

$$\dot{V}(y) = y^T Q y < 0,$$

即 $Q < 0$ 时, 则具有参数不确定性的系统(9a)是鲁棒二次稳定的.

下面讨论式(11)经过不等式放大后 $\dot{V}(y) < 0$ 的条件, 并提出求解增益矩阵 K 的方法.

定义

$$\begin{aligned} \Gamma = & I_{N-1} \otimes PA + I_{N-1} \otimes A^T P + \\ & \tilde{W}_0^T L \hat{W}_0 \otimes PBK + (\tilde{W}_0^T L \hat{W}_0 \otimes PBK)^T, \end{aligned}$$

则矩阵不等式(11)可以写成

$$\begin{aligned} \Gamma + \tilde{W}_0^T E \Sigma F \hat{W}_0 \otimes PBK + \\ (\tilde{W}_0^T E \Sigma F \hat{W}_0 \otimes PBK)^T < 0. \end{aligned} \quad (12)$$

根据引理1的 ΔL 分解, 式(12)可以等价地写成

$$\begin{aligned} \Gamma + \tilde{W}_0^T E \Sigma F \hat{W}_0 \otimes PBK + \\ (\tilde{W}_0^T E \Sigma F \hat{W}_0 \otimes PBK)^T = \\ \Gamma + (\tilde{W}_0^T E \otimes PB)(\Sigma \otimes I_n)(F \hat{W}_0 \otimes K) + \\ (F \hat{W}_0 \otimes K)^T (\Sigma \otimes I_n)^T (\tilde{W}_0^T E \otimes PB)^T < 0, \end{aligned} \quad (13)$$

由引理3, 式(13)等价于存在正数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \Gamma + \varepsilon^{-1}(\tilde{W}_0^T E \otimes PB)(\tilde{W}_0^T E \otimes PB)^T + \\ \varepsilon(F \hat{W}_0 \otimes K)^T (F \hat{W}_0 \otimes K). \end{aligned} \quad (14)$$

应用引理4, 式(14)进一步转化为

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \tilde{W}_0^T E \otimes PB & (F \hat{W}_0 \otimes K)^T \\ (\tilde{W}_0^T E \otimes PB)^T & -\varepsilon I & 0 \\ F \hat{W}_0 \otimes K & 0 & -\varepsilon^{-1} I \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

表达式(15)中包含有非线性项, 因而MATLAB中线性矩阵不等式工具箱无法对其直接求解, 针对此情况, 需要进行如下等价变化. 令

$$J = \text{diag}\{I_{N-1} \otimes P^{-1}, I, I\},$$

对式(14)分别左乘 J , 右乘 J^T , 并定义变量

$$Y = KP^{-1}, \quad X = P^{-1},$$

则可得到式(10). 由 $KX = Y$ 可以得到反馈增益矩阵 $K = YX^{-1}$. 证毕.

根据定理1, 可以得到增益矩阵 K 的设计过程:

步骤1 判断有向图 $\mathcal{G}$ 在标称权值条件下是否存在一棵有向生成树. 如条件不成立, 则算法终止;

步骤2 根据已知的通信拓扑图, 求出Laplacian矩阵 L , 根据引理1对 ΔL 进行分解;

步骤3 求出关联矩阵, 根据式(5)可得线性变换矩阵 W , 并求出逆矩阵 W^{-1} ;

步骤4 利用定理1, 根据线性矩阵不等式(10)以及约束条件 $X > 0$, 求出增益矩阵 K .

注3 定理1的结果针对一般线性多智能体系统模

型和一般有向通信拓扑, 结果更一般. 此外, 文献[17]给出Riccati方程或文献[8, 10]给出的不等式条件中, 需要预先调整更多参数. 有时即使问题本身是有解的, 也不易找到满足条件的解. 本文给出的条件不需要预先调整参数便可直接求得满足一致性条件要求的解.

5 仿真实例

例1 考虑一个含6个智能体的二阶多智能体系统, 每个系统的状态空间方程(1)的参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

多智能体的有向拓扑图 $\mathcal{G}_1$ 和该图的一棵有向扩展树如图1所示.

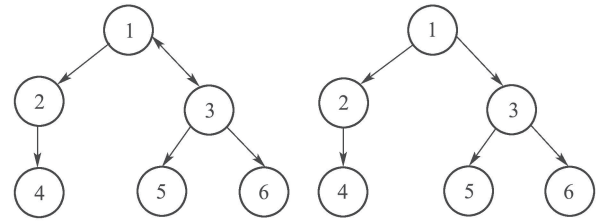


图1 通信拓扑图和有向生成树

Fig. 1 Communication topology and a directed spanning tree

假设邻居节点之间的权值系数 $a_{ij} = 1$, 即对应于图 $\mathcal{G}_1$ 的Laplacian矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

网络通信造成的多智能体互联系统的不确定性 $\Delta L = E\Sigma(t)F$, 其中矩阵 E 和 F 的参数如下:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & -0.05 & 0 & 0 & 0 \\ -0.05 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.05 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & -0.05 & 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

基于该扩展树的关联矩阵 $\tilde{W}_0$ 构建的非奇异变换矩阵为

$$W = \begin{bmatrix} \tilde{W}_0^T \\ \mathbf{1}_N^T \end{bmatrix} \otimes I_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes I_n.$$

由定理1, 当 $\varepsilon = 10.4346$ 时, 可得控制协议(2)的反馈增益矩阵

$$K = YX^{-1} = [-1.0628 \quad -3.3339].$$

设对角矩阵 $\Sigma(t) = \text{diag}\{q_1, \dots, q_6\}$, 其中 q_p 为不确定参数, 假定满足 $-1 \leq q_p \leq 1$.

为了验证控制算法的可行性, 仿真中取

$$q_1 = q_2 = q_3 = \sin t, \quad q_4 = q_5 = q_6 = \cos t.$$

假定系统的初始时刻为 $t_0 = 0$, 多智能体系统的初始状态值如下:

$$x_1(t_0) = [0.3965 \quad 3.0923]^T,$$

$$x_2(t_0) = [1.7360 \quad -1.8153]^T,$$

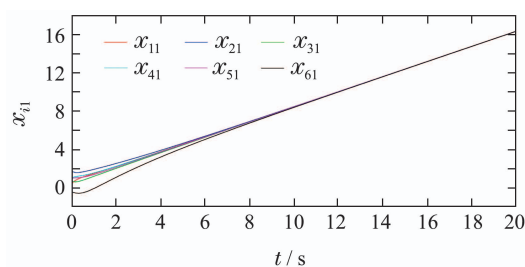
$$x_3(t_0) = [0.7149 \quad -1.6115]^T,$$

$$x_4(t_0) = [1.0310 \quad 1.2938]^T,$$

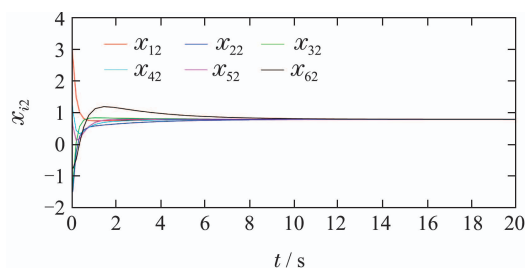
$$x_5(t_0) = [0.9725 \quad 0.7793]^T,$$

$$x_6(t_0) = [-0.4311 \quad -0.7316]^T.$$

线性多智能体系统(1)在信息拓扑图 $\mathcal{G}_1$ 下的状态轨迹如图2所示. 从图中可以看出, 在参数摄动的情况下, 6个智能体位置和速度都各自渐近地趋于一致.



(a) 状态分量 $x_{i1} (i = 1, \dots, 6)$ 的轨迹



(b) 状态分量 $x_{i2} (i = 1, \dots, 6)$ 的轨迹

图2 通信不确定多智能体系统的状态轨迹
Fig. 2 State trajectories of MASs with uncertain communication topology

例2 考虑一个三阶多智能体系统, 它包含4个智能体且每个系统的状态方程(1)的参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

多智能体的有向拓扑图 $\mathcal{G}_2$ 和该图的一棵有向扩展树如图3所示.

邻居节点之间的权值系数如图3所示, 即对应于图 $\mathcal{G}_2$ 的Laplacian矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 & -0.9 \\ -0.35 & 1.05 & -0.5 & -0.2 \\ -0.5 & 0 & 1.1 & -0.6 \\ -0.9 & 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

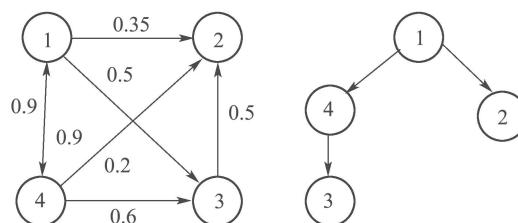


图3 通信拓扑图和有向生成树

Fig. 3 Communication topology and a directed spanning tree

网络通信造成的多智能体互联系统的不确定性 $\Delta L = E\Sigma(t)F$, 其中矩阵 E 和 F 的参数如下:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} -0.03 & 0 & 0 & 0.03 \\ 0.03 & 0 & 0 & -0.03 \\ 0 & 0.03 & 0 & -0.03 \\ 0 & 0 & 0.03 & -0.03 \\ -0.01 & 0 & 0.01 & 0 \\ -0.01 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & -0.04 & 0 \end{bmatrix}.$$

基于该扩展树的关联矩阵 $\tilde{W}_0$ 构建的非奇异变换矩阵为

$$W = \begin{bmatrix} \tilde{W}_0^T \\ \mathbf{1}_N^T \end{bmatrix} \otimes I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes I_n.$$

由定理1, 当 $\varepsilon = 10.4346$ 时, 可得控制协议(2)的反馈增益矩阵

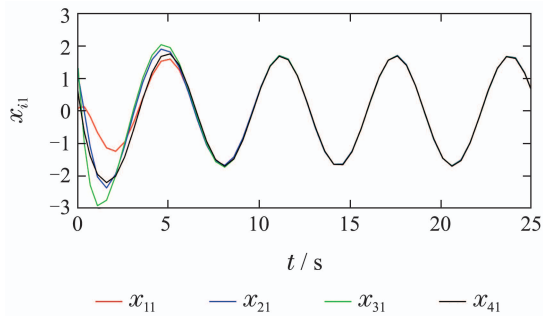
$$K = YX^{-1} = [-1.9948 \quad -1.2990 \quad -1.0462].$$

$$\text{取 } q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \sin t, \quad q_5 = q_6 = q_7 =$$

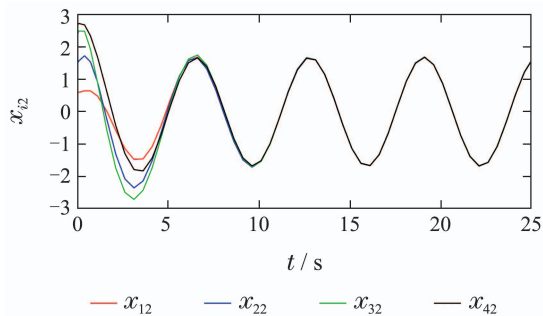
$\cos t$, 多智能体系统的初始状态值如下:

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= [0 \ 0.6 \ 0.6]^T, \\ x_2(t_0) &= [1.2 \ 1.5 \ 1.8]^T, \\ x_3(t_0) &= [1.8 \ 2.4 \ 2.1]^T, \\ x_4(t_0) &= [0.8 \ 2.7 \ -1.2]^T. \end{aligned}$$

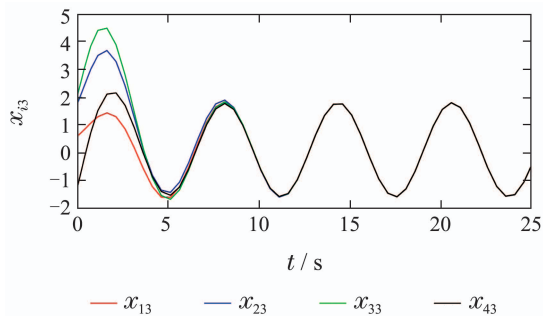
线性多智能体系统(1)在信息拓扑图 $\mathcal{G}_2$ 下的状态轨迹如图4所示. 图4(a)–(c)分别表示系统的3个状态 x_1, x_2, x_3 的轨迹, 从图中可以看出3个状态最终都趋于一致. 进而, 数值仿真结果也验证了定理1的正确性.



(a) 状态分量 $x_{i1}(i = 1, \dots, 4)$ 的轨迹



(b) 状态分量 $x_{i2}(i = 1, \dots, 4)$ 的轨迹



(c) 状态分量 $x_{i3}(i = 1, \dots, 4)$ 的轨迹

图4 通信不确定多智能体系统的状态轨迹

Fig. 4 State trajectories of MASs with uncertain communication topology

6 结论

本文针对具有通信不确定的多智能体系统状态一致性问题, 提出了鲁棒部分变元稳定性方法. 与平均一致性不同, 本文采用有向扩展树的关联矩阵进行线性变换, 将连续时间多智能体不确定系统的一致性问

题转化为不确定系统鲁棒二次镇定问题, 其中采用该矩阵进行线性变换, 更具有针对性. 对摄动矩阵 ΔL 进行分解, 使其满足匹配条件, 基于鲁棒二次稳定性理论, 分析了系统的稳定性和鲁棒性, 在满足系统稳定性的同时, 使得所有智能体状态达到渐近一致. 仿真结果表明: 所提出的部分稳定性方法在参数摄动的情况下, 多智能体系统状态分量仍能各自渐近地达到一致, 误差逼近于零, 从而实现了多智能体系统协调控制的目的.

值得指出的是, 本文所提出的方法利用了全局信息, 然而在实际的分布式控制中全局信息是未知的, 后续研究工作将进一步考虑利用局部信息, 将智能体 i 及其通信邻居集合的一致性转化为鲁棒部分变元稳定性问题, 其余智能体转化为领导-跟随多智能体的一致性, 从而设计反馈增益矩阵, 实现真正意义上的分布式控制.

参考文献:

- [1] JI Lianghao, WANG Huiwei, LI Huaqing. *Theory of Distributed Consensus Coordination Control for Multi-Agent Systems Networks*. Beijing: Science Press, 2015.
(纪良浩, 王慧维, 李华青. 分布式多智能体网络一致性协调控制理论. 北京: 科学出版社, 2015.)
- [2] SHANG Y L. Consensus seeking over Markovian switching networks with time-varying delays and uncertain topologies. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 273: 1234 – 1245.
- [3] WANG Y W, YI J W, XIAO J W. Consensus in Markovian jump second-order multi-agent systems with random communication delay. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(16): 1666 – 1675.
- [4] MIAO G Y, XU S Y, ZOU Y. Necessary and sufficient conditions for mean square consensus under Markov switching topologies. *International Journal of Systems Science*, 2013, 44(1): 178 – 186.
- [5] YOU K Y, LI Z K, XIE L H. Consensus condition for linear multi-agent systems over randomly switching topologies. *Automatica*, 2013, 49(10): 3125 – 3132.
- [6] SUN Y G. Average consensus in networks of dynamic agents with uncertain topologies and time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(3): 1061 – 1073.
- [7] SHANG Y L. Average consensus in multi-agent systems with uncertain topologies and multiple time-varying delays. *Linear Algebra and its Applications*, 2014, 459: 411 – 429.
- [8] LIN P, JIA Y M. Robust H_∞ consensus analysis of a class of second-order multi-agent systems with uncertainty. *IET of Control Theory & Applications*, 2010, 4(3): 487 – 498.
- [9] LIU Jiangang, HUANG Zhiwu, WANG Jing. Distributed robust H_∞ cooperative control of uncertain multi-agent interconnected dynamic systems. *Control and Decision*, 2014, 29(7): 797 – 803.
(刘建刚, 黄志武, 王晶. 不确定多智能体互联动态系统分布式鲁棒 H_∞ 协同控制. 控制与决策, 2014, 29(7): 797 – 803.)
- [10] CUI Y, JIA Y M. Robust $L_2 - L_\infty$ consensus control for uncertain high-order multi-agent systems with time-delay. *International Journal of Systems Science*, 2014, 45(3): 427 – 438.
- [11] WANG Qing, HOU Delong, LI Jun, et al. Consensus analysis of multi-missile decentralized cooperative guidance time with time-delays and topologies uncertainty. *Acta Armamentarii*, 2014, 35(7): 982 – 989.

- (王青, 后德龙, 李君, 等. 存在时延和拓扑不确定的多弹分散化协同制导时间一致性分析. 兵工学报, 2014, 35(7): 982 – 989.)
- [12] ZELAZO D, BURGER M. On the robustness of uncertain consensus networks. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2017, 4(2): 170 – 178.
- [13] LI P, QIN K Y, SHI M J. Distributed robust H_∞ rotating consensus control for directed networks of second-order agents with mixed uncertainties and time-delay. *Neurocomputing*, 2015, 148: 332 – 339.
- [14] HUANG W C, ZENG J P, SUN H F. Robust consensus for linear multi-agent systems with mixed uncertainties. *Systems & Control Letters*, 2015, 76: 56 – 65.
- [15] HUANG W C, HUANG Y W, CHEN S B. Robust consensus control for a class of second-order multi-agent systems with uncertain topology and disturbances. *Neurocomputing*, 2018, 313(3): 426 – 435.
- [16] ELAHI A, ALFI A, MODARES H. H_∞ consensus control of discrete-time multi-agent systems under network imperfections and external disturbance. *Acta Automatic Sinica*, 2019, 6(3): 667 – 675.
- [17] LI Z K, CHEN J. Robust consensus of multi-agent systems with stochastic uncertain channels. *American Control Conference*. Boston, MA, USA: AACC, 2016: 56 – 65.
- [18] LIU Y, JIA Y M. Robust H_∞ consensus control of uncertain multi-agent systems with time delays. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2011, 9(6): 1086 – 1094.
- [19] CHEN Y Z, GE Y R, ZHANG Y X. Partial stability approach to consensus problem of linear multi-agent systems. *Acta Automatic Sinica*, 2014, 40(11): 2573 – 2584.
- [20] QU X J, CHEN Y Z, ALEKSANDROVB A Y, et al. Distributed consensus of large-scale multi-agent systems via linear-transformation-based partial stability approach. *Neurocomputing*, 2017, 222(26): 54 – 61.
- [21] SUN Jian, CHEN Jie, LIU Guoping. *Stability Analysis of Time-Delay Systems and Applications*. Beijing: Science Press, 2012.
(孙健, 陈杰, 刘国平. 时滞系统稳定性分析与应用. 北京: 科学出版社, 2012.)

作者简介:

陈阳舟 教授, 博士生导师, 目前研究方向为多智能体与网络系统信息处理与协作控制、智能交通信息处理与控制、车路协同控制等, E-mail: yzchen@bjut.edu.cn;

黄小龙 博士研究生, 目前研究方向为多智能体协作控制、鲁棒控制, E-mail: talltree2008@emails.bjut.edu.cn;

詹璟原 讲师, 目前研究方向为多智能体系统协同控制、分布式模型预测控制、智能交通系统, E-mail: jyjzhan@bjut.edu.cn.