

一类输入饱和非仿射非线性系统的非线性动态逆控制

杨 浩, 裴海龙[†]

(华南理工大学 自主系统与网络控制教育部重点实验室; 广东省无人机系统工程技术研究中心, 广东 广州 510640)

摘要: 输入饱和是实际系统中经常遇到的问题, 很多已有的控制方法要求被控系统具有仿射结构. 本文针对一类具有输入饱和的非仿射纯反馈非线性系统提出了一种基于奇异值摄动理论的非线性动态逆控制方法. 首先构建一个快变子系统, 在慢时间尺度下将非仿射非线性系统转换为具有仿射结构的线性系统, 从而应用已有的控制算法实现控制目的. 为了消除输入饱和带来的影响, 建立一个中间子系统对理想控制量与输入饱和限制下控制量的差进行估计和补偿. 所提出的控制方法不依赖于被控系统固有的时标分离特性, 并能证明闭环系统指数跟踪参考轨迹. 该方法具有良好的扩展性, 可以根据实际需求与多种控制算法相结合. 与动态面控制器和传统近似动态逆控制器的对比仿真结果验证了本文控制方法的有效性.

关键词: 非仿射非线性系统; 非线性控制; 奇异值摄动; 输入饱和; 反步法

引用格式: 杨浩, 裴海龙. 一类输入饱和非仿射非线性系统的模型预测控制. 控制理论与应用, 2021, 38(4): 425 – 432

DOI: 10.7641/CTA.2020.90950

Nonlinear dynamic inversion approach for a class of nonaffine nonlinear systems with input saturation

YANG Hao, PEI Hai-long[†]

(Key Laboratory of Autonomous Systems and Networked Control, Ministry of Education;
Unmanned Aerial Vehicle Systems Engineering Technology Research Center of Guangdong,
South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: Input saturation is frequently encountered in practical systems, and many existing control methods require the system to be affine-in-control. In this paper, a singular perturbation theory based nonlinear dynamic inversion method is proposed for a class of nonaffine pure-feedback nonlinear systems with input saturation. Firstly, a fast dynamic subsystem is constructed to transform the nonaffine nonlinear system into a linear system in the affined form to apply the existing control algorithms in the slow time-scale. In order to eliminate the influence of input saturation, an intermediate subsystem is established to approximate and compensate the difference between the desired and saturated inputs. The provided control method is independent of the inherent time-scale character of the original system and ensures that the closed-loop system tracks the desired trajectory exponentially. The presented scheme has good expansibility, and a large number of control schemes can be combined according to the actual requirements. Simulation results are provided by comparison with dynamic surface control and traditional approximate dynamic inversion to validate the effectiveness of the proposed control method.

Key words: nonaffine nonlinear systems; nonlinear control; singular perturbation; input saturation; backstepping

Citation: YANG Hao, PEI Hailong. Nonlinear dynamic inversion approach for a class of nonaffine nonlinear systems with input saturation. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(4): 425 – 432

1 引言

输入饱和普遍存在于各类实际系统中, 如空间飞行器^[1]、电机伺服系统^[2]等. 输入饱和的出现有可能导致闭环系统暂态性能下降甚至发散^[3]. 因此针对含有输入饱和系统的控制器设计吸引了大量研究人员的参与.

文献[4]针对一类含有输入饱和的线性系统提出了一种复合非线性控制方法. 文献[5]为一类含有输入饱和的多输入多输出非线性系统提出了基于估计的自适应控制算法. 文献[6]为在输入饱和影响下的 Takagi-Sugeno 系统提出了容错约束控制器. 文献[7]

收稿日期: 2019-11-15; 录用日期: 2020-12-14.

[†]通信作者. E-mail: auhlpei@scut.edu.cn; Tel.: +86 13660182029.

本文责任编辑: 宗群.

国家自然科学基金重大科研仪器研制项目(615278010), 广东省省级科技计划项目(2017B010116005)资助.

Supported by the Scientific Instruments Development Program of NSFC (615278010) and the Science and Technology Planning Project of Guangdong, China (2017B010116005).

为严格反馈型输入饱和和非线性系统设计了复合非线性反馈控制器。

然而上述控制方法仅适用于具有仿射结构的被控对象,无法直接应用于非仿射非线性系统,而该类系统常常出现于很多前沿应用领域,如大攻角机动飞行状态下的高超音速飞行器^[8],大迎角飞行下的舵面控制系统^[9]等。近年来针对含有输入饱和和限制的非仿射非线性系统的控制研究取得了不少成果。如文献[10]中基于扩张状态观测器的自适应控制方法,以及文献[11–12]中基于人工神经网络与模糊控制的相关算法等。然而基于扩张状态观测器的相关方法有可能伴随着结构复杂且控制器参数较多并缺乏调节依据等不足^[13]。而基于神经网络与模糊控制的方法往往伴随较重的计算负荷,从而限制了在实际系统中的应用^[14]。

本文为一类含有输入饱和的非仿射纯反馈非线性系统提供了一种基于奇异值摄动理论^[10]的非线性动态逆控制器设计方法。首先通过被称为“近似动态逆”的控制方法^[15–16]为不考虑输入饱和影响的标称系统设计一个快变子系统,并使该快变子系统能以指数形式收敛到期望的非仿射函数精确逆上。在慢时间尺度下,快变状态可以被视为标称系统的控制量,并将其转化为积分器串联的线性系统,从而应用已有的控制方法。之后,在快变子系统的基础上构建一个中间子系统,对输入饱和造成的影响进行估计和补偿。最后通过奇异值摄动理论保证闭环系统指数跟踪参考轨迹。

本文提出的非线性动态逆控制方法通过构建快变子系统和中间子系统引入多时间尺度,通过基于奇异值摄动理论的分析方法在不同的时间尺度中对原系统进行简化和控制器设计。本文所提控制方法的主要特点包括:1) 控制器有效性不依赖于原系统自身固有的时标分离特征;2) 避免了反步法中经常出现的“复杂性爆炸”(explosion of complexity)问题;3) 具有良好的扩展性。可以根据实际需求与不同的控制方法相结合,使大量已有的控制方法能够应用于含有输入饱和的非仿射纯反馈非线性系统;4) 闭环系统可以指数跟踪参考轨迹。

2 问题描述及准备

本文的主要数学符号定义如下: D_a 表示与变量 a 相关的开连通集; $\mathbb{R}$ 表示实数域; $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维实向量空间; $|a|$ 表示 a 的绝对值; B_r 表示球域 $\{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq r\}$ 。

2.1 问题描述

考虑一类含有输入饱和的非仿射纯反馈非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, \text{sat}(u)), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\bar{x}_j = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_j]^T \in \mathbb{R}^j$ 和 $u \in \mathbb{R}$ 分别为状态向量和输入量; f_j 为连续可导的非线性函数; $j = 1, \dots, n$; 关于标量 $s \in \mathbb{R}$ 的饱和函数 $\text{sat}(\cdot)$ 定义如下:

$$\text{sat}(s) = \text{sgn}(s) \cdot \min\{M, |s|\}, \quad (2)$$

其中 $M > 0$ 为一正常数。系统(1)的标称系统定义如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}), \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, u), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (3)$$

设式(3)中的标称系统满足如下假设。

假设 1 $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}$ 和 $\frac{\partial f_n}{\partial u}$ 在

$$\bar{x}_{i+1} \in \Omega_{\bar{x}_{i+1}} \subset D_{\bar{x}_{i+1}}, (\bar{x}_n, u) \in \Omega_{\bar{x}_n, u} \subset D_{\bar{x}_n} \times D_u$$

上有界且远离零点,即 $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}$ 和 $\frac{\partial f_n}{\partial u}$ 非零。其中: $D_{\bar{x}_{i+1}} \subset \mathbb{R}^{i+1}$, $D_{\bar{x}_n} \subset \mathbb{R}^n$, $D_u \subset \mathbb{R}$ 为包含原点的定义域, $\Omega_{\bar{x}_{i+1}}$, $\Omega_{\bar{x}_n, u}$ 为紧集。为不失一般性,设 $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} > 0$ 和 $\frac{\partial f_n}{\partial u} > 0$ 。

注 1 假设1是传统近似动态逆控制器设计过程中的常用假设^[15–16]。

假设 2 参考轨迹 y_r 及其高阶导数存在且有界。

假设 3 考虑如下积分器串联系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, \\ \dot{x}_n = u, \end{cases} \quad (4)$$

其中: $x = [x_1 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u \in \mathbb{R}$ 为控制输入。存在反馈控制律 $u = \mathcal{G}(x)$ 使式(4)在原点处指数稳定。

注 2 积分串联系统的结构比较简单,且假设3对反馈控制律 $\mathcal{G}$ 的具体形式不做要求。这表明很多已有的控制方法都可以满足假设3。

本文将为式(1)中含有输入饱和的非仿射纯反馈非线性系统设计跟踪控制器,使输出轨迹 y 指数跟踪参考轨迹 y_r 。

2.2 奇异值摄动理论

考虑如下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), & x(0) = \xi(\varepsilon), \\ \varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), & z(0) = \eta(\varepsilon), \end{cases} \quad (5)$$

其中: $0 < \varepsilon < 1$ 被称为奇异值摄动参数; $x \in D_x$ 为慢变状态, $z \in D_z$ 为快变状态; $\xi(\varepsilon)$ 和 $\eta(\varepsilon)$ 为光滑函数; f 和 g 为在定义域

$$(t, x, z, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_x \times D_z \times [0, \varepsilon_0]$$

上足够光滑的函数,其中 $D_x \subset \mathbb{R}^n$ 和 $D_z \subset \mathbb{R}^m$ 为开连

通集, $\varepsilon_0 \gg 0$. 如果对于 $(t, x) \in [0, \infty) \times D_x$, 方程 $0 = g(t, x, z, 0)$ 都有 $k \geq 1$ 个孤立实根: $z = h_i(t, x)$, $i = 1, 2, \dots, k$, 则称(5)中的系统为奇异值摄动标准型系统. 根据奇异值摄动理论, 分别在慢时间尺度 t 和快时间尺度 $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ 中令 $\varepsilon = 0$, 则可得到两个降阶子系统, 降阶慢变子系统:

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0), \quad x(0) = \xi_0, \quad (6)$$

和边界层子系统:

$$\frac{dv}{d\tau} = g(t, x, v + h(t, x), 0), \quad v(0) = \eta_0 - h(0, \xi_0), \quad (7)$$

其中 $v = z - h(t, x)$, $\xi_0 = \xi(0)$, $\eta_0 = \eta(0)$.

引理 1 (定理11.4^[17]) 考虑式(5)中的奇异值摄动系统. 假设对所有

$$(t, x, z - h(t, x), \varepsilon) \in [0, \infty) \times B_r \times [0, \varepsilon_0]$$

的点都满足下面的条件:

A1) $f(t, 0, 0, \varepsilon) = 0, g(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$.

A2) 方程 $0 = g(t, x, z, 0)$ 存在孤立根 $z = h(t, x)$, 且 $h(t, 0) = 0$.

A3) 对于 $z - h(t, x) \in B_\rho$, 函数 f, g, h 及其一阶、二阶偏导数有界.

A4) 降阶慢变子系统(6)在原点处指数稳定.

A5) 边界层子系统(7)在原点处指数稳定, 在 (t, x) 上一致.

则存在一个正常数 $\varepsilon^* > 0$, 当 $\varepsilon < \varepsilon^*$ 时, 奇异值摄动系统(5)在原点处指数稳定.

文献[16]指出, 引理1中的条件(A5)可以通过下面的引理2局部验证.

引理 2 (定义11.1^[17]) 当边界层子系统(7)的雅克比矩阵 $\left[\frac{\partial g}{\partial v}\right]$ 的特征值对于所有 $[0, \infty) \times D_x$ 上的点都满足

$$\operatorname{Re}[\lambda\{\frac{\partial g}{\partial v}(t, x, h(t, x), 0)\}] \leq -c < 0, \quad (8)$$

则有平衡点 $v = 0$ 为边界层子系统的指数稳定平衡点, 且在 $(t, x) \in [0, \infty) \times D_x$ 上一致.

3 非线性动态逆控制器设计

本文所提非线性动态逆控制器的设计过程可以分为两部分. 首先通过反步法为标称系统构建快变子系统, 之后考虑含有输入饱和的原系统并设计中间子系统对输入饱和带来的影响进行估计与补偿.

3.1 快变子系统

快变子系统的设计过程包含 n 步. 前面的 $n-1$ 步设计虚拟控制量, 最后一步设计实际控制量.

第1步 将跟踪误差 $e_1 = x_1 - y_r = x_1 - \alpha_0$ 代回

标称系统(3)可得

$$\dot{e}_1 = f_1(x_1, x_2) - \dot{\alpha}_0. \quad (9)$$

引入虚拟控制量 $\alpha_1 = x_2 - e_2$, 并将其动态方程设计如下:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{\alpha}_1 = -\operatorname{sgn}(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1})Q_1, \\ Q_1(\bar{e}_2, \alpha_1) = -e_2 + f_1(x_1, e_2 + \alpha_1) - \dot{\alpha}_0, \end{cases} \quad (10)$$

其中: $\epsilon > 0$ 为待调的奇异值摄动参数, $\bar{e}_2 = [e_1 \ e_2]^T \in \mathbb{R}^2$. 设 $h_1(\bar{e}_2)$ 为方程 $Q_1(\bar{e}_2, \alpha_1) = 0$ 的孤立根, 则式(9)–(10)可以写为如下奇异值摄动标准型:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = f_1(x_1, e_2 + (z_1 + h_1)) - \dot{\alpha}_0, \\ \epsilon \dot{\alpha}_1 = -\operatorname{sgn}(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1})Q_1, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $z_1 = \alpha_1 - h_1$. 令 $\epsilon \rightarrow 0$, 可得奇异值摄动系统(11)的边界层子系统:

$$\frac{dz_1}{d\tau} = -\operatorname{sgn}(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1})Q_1, \quad (12)$$

与降阶慢变子系统:

$$\dot{e}_1 = f_1(x_1, e_2 + h_1) - \dot{\alpha}_0 = e_2. \quad (13)$$

注 3 奇异值摄动系统(11)中的快变状态是虚拟控制量 α_1 , 而奇异值摄动参数 ϵ 与被控系统无关. 这表明通过快变子系统引入的时标分离的有效性不依赖于原系统固有的时标分离特性.

第 i 步 ($2 \leq i \leq n-1$) 重复前述步骤, 将 $e_i = x_i - \alpha_{i-1}$ 代入标称系统的第 i 阶微分方程可得

$$\dot{e}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) - \dot{\alpha}_{i-1}. \quad (14)$$

为式(14)引入虚拟控制量 $\alpha_i = x_{i+1} - e_{i+1}$, 其动态方程设计如下:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{\alpha}_i = -\operatorname{sgn}(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i})Q_i, \\ Q_i(\bar{e}_{i+1}, \alpha_i) = -e_{i+1} + f_i(\bar{x}_i, e_{i+1} + \alpha_i) - \dot{\alpha}_{i-1}, \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\bar{e}_{i+1} = [e_1 \ \dots \ e_{i+1}]^T \in \mathbb{R}^{i+1}$. 设 $h_i(\bar{e}_{i+1})$ 为方程 $Q_i(\bar{e}_{i+1}, \alpha_i) = 0$ 的孤立根, 则式(14)–(15)可表示为如下奇异值摄动标准型:

$$\begin{cases} \dot{e}_i = f_i(\bar{x}_i, e_{i+1} + (z_i + h_i)) - \dot{\alpha}_{i-1}, \\ \epsilon \dot{\alpha}_i = -\operatorname{sgn}(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i})Q_i, \end{cases} \quad (16)$$

其中 $z_i = \alpha_i - h_i$. 令 $\epsilon \rightarrow 0$, 可以得到奇异值摄动系统(16)的边界层子系统:

$$\frac{dz_i}{d\tau} = -\operatorname{sgn}(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i})Q_i \quad (17)$$

和降阶慢变子系统:

$$\dot{e}_i = f_i(\bar{x}_i, e_{i+1} + h_i) - \dot{\alpha}_{i-1} = e_{i+1}. \quad (18)$$

注4 第*i*步中虚拟控制量 α_i 的导数已经通过式(15)得到, 因此避免了标准反步法中经常出现的“复杂性爆炸”问题^[15-16].

第*n*步 将标称系统(3)中的第*n*个方程重新描述为如下误差形式:

$$\dot{e}_n = f_n(\bar{x}_n, u) - \dot{\alpha}_{n-1}, \quad (19)$$

其中 $e_n = x_n - \alpha_{n-1}$. 实际控制量 u 的动态方程设计如下:

$$\epsilon \dot{u} = -\text{sgn}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial u}\right) Q_n, \quad (20)$$

$$Q_n(\bar{e}_n, u) = -\mathcal{G}(\bar{e}_n) + f_n(\bar{x}_n, u) - \dot{\alpha}_{n-1}, \quad (21)$$

其中: $\bar{e}_n = [e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n]^T$, $\mathcal{G}(\bar{e}_n)$ 为根据实际需求选择的反馈控制律. 设 $h_n(\bar{e}_n)$ 为方程 $Q_n(\bar{e}_n, u) = 0$ 的孤立根. 将式(19)–(20)表示为如下奇异值摄动标准型:

$$\begin{cases} \dot{e}_n = f_n(\bar{x}_n, z_n + h_n) - \dot{\alpha}_{n-1}, \\ \epsilon \dot{u} = -\text{sgn}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial u}\right) Q_n, \end{cases} \quad (22)$$

其中 $z_n = u - h_n$. 令 $\epsilon \rightarrow 0$, 则该奇异值摄动系统的边界层子系统:

$$\frac{dz_n}{d\tau} = -\text{sgn}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial u}\right) Q_n \quad (23)$$

和降阶慢变子系统:

$$\dot{e}_n = f_n(\bar{x}_n, h_n) - \dot{\alpha}_{n-1} = u. \quad (24)$$

3.2 中间子系统

如果考虑输入饱和, 则式(24)中的第*n*阶降阶慢变子系统应改写为

$$\begin{aligned} \dot{e}_n &= f_n(\bar{x}_n, \text{sat}(h_n)) - \dot{\alpha}_{n-1} = \\ &\mathcal{G}(\bar{e}_n) + f_n(\bar{x}_n, \text{sat}(h_n)) - f_n(\bar{x}_n, h_n). \end{aligned} \quad (25)$$

为式(21)中的 Q_n 引入一个新变量 ω , 则有

$$Q_n(\bar{e}_n, u, \omega) = -\mathcal{G}(\bar{e}_n) + f_n(\bar{x}_n, u) - \dot{\alpha}_{n-1} + \omega, \quad (26)$$

则式(25)中的降阶慢变子系统应重新表示如下:

$$\dot{e}_n = \mathcal{G}(\bar{e}_n) + f_n(\bar{x}_n, \text{sat}(h_n)) - f_n(\bar{x}_n, h_n) - \omega. \quad (27)$$

设计 ω 的动态方程如下:

$$\begin{cases} \epsilon_1 \dot{\omega} = -\text{sgn}\left(\frac{\partial Q_\omega}{\partial \omega}\right) Q_\omega, \\ Q_\omega(\bar{e}_n, u, \omega) = f_n(\bar{x}_n, \text{sat}(u)) - f_n(\bar{x}_n, u) - \omega, \end{cases} \quad (28)$$

其中 ϵ_1 为中间子系统的待调奇异值摄动参数. 且 ϵ_1 应满足下面的时标分离条件:

$$0 < \epsilon < \epsilon_1 < 1. \quad (29)$$

从式(28)中易得 $\left[\frac{\partial Q_\omega}{\partial \omega}\right] = -1$, 因此 ω 的动态方程可简

化为

$$\epsilon_1 \dot{\omega} = Q_\omega. \quad (30)$$

中间子系统的时间尺度为 $\tau_1 = \frac{t}{\epsilon_1}$, 变化速度介于降阶慢变子系统和边界层子系统之间. 令 $\epsilon_1 \rightarrow 0$, 则可得到中间子系统的边界层子系统:

$$\frac{dz_\omega}{d\tau_1} = Q_\omega, \quad (31)$$

其中 $h_\omega(\bar{e}_n)$ 为方程 $Q_\omega(\bar{e}_n, u, \omega) = 0$ 的孤立根, $z_\omega = \omega - h_\omega$.

注5 整个控制器的待调参数包括: 奇异值摄动参数 ϵ 和 ϵ_1 ; 控制律 $\mathcal{G}(\bar{e}_n)$ 的相关参数. 由于快变子系统和中间子系统不依赖于原系统, 因此 ϵ 和 ϵ_1 应选择足够小的数值, 并满足式(29)中的关系, 以确保时标分离的有效性. 控制律 $\mathcal{G}(\bar{e}_n)$ 则应根据其自身的参数调节方法进行设置.

4 稳定性分析

定理1 考虑满足假设1的含有输入饱和的非仿射纯反馈非线性系统(1), 以及满足假设3的反馈控制律 $\mathcal{G}$. 假设所有 $(\bar{e}_{j+1}, z_j, z_\omega) \in D_{\bar{e}_{j+1}} \times D_{z_j} \times D_{z_\omega}$ 上的点都满足下列条件, 其中

$$D_{\bar{e}_{j+1}} \subset \mathbb{R}^{j+1}, D_{z_j} \subset \mathbb{R}, D_{z_\omega} \subset \mathbb{R},$$

并包含原点;

$$z_j = \alpha_j - h_j, z_\omega = \omega - h_\omega, \bar{e}_{n+1} = \bar{e}_n,$$

$$D_{\bar{e}_{n+1}} = D_{\bar{e}_n}, \alpha_n = u,$$

$$j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, n-1.$$

B1) $f_j(0, 0) = 0, Q_i(0, 0) = 0, Q_n(0, 0, 0) = 0, Q_\omega(0, 0, 0) = 0$.

B2) 当 $\epsilon \rightarrow 0$, 在 $D_{\bar{e}_{j+1}} \times D_{z_j} \times D_\omega$ 的任意紧子集上, 方程 $Q_i(\bar{e}_{i+1}, \alpha_i) = 0$ 和 $Q_n(\bar{e}_n, u, \omega) = 0$ 都存在孤立根 $\alpha_i = h_i(\bar{e}_{i+1})$ 和 $\alpha_n = h_n(\bar{e}_n, \omega)$, 并且 $h_i(0) = h_n(0, 0) = 0$.

B3) 当 $\epsilon_1 \rightarrow 0$, 在 $D_{\bar{e}_{j+1}} \times D_{z_\omega}$ 的任意紧子集上, 方程 $Q_\omega(\bar{e}_n, u, \omega) = 0$ 存在孤立根 $\omega = h_\omega(\bar{e}_n)$, 且 $h_\omega(0) = 0$.

B4) $Q_i, Q_\omega, h_i, h_\omega$ 及其关于 z_i 和 z_ω 的一阶、二阶偏导数在 $D_{\bar{e}_{i+1}} \times D_{z_i} \times D_{z_\omega}$ 的任意紧子集上有界.

B5) 对于所有的 $\bar{e}_{j+1} \in D_{\bar{e}_{j+1}}$, 都会有 $(\bar{e}_{j+1}, z_j) \mapsto \left(\frac{\partial Q_j}{\partial \alpha_j}\right)$ 有界且远离某正常数.

则在式(10)(15)(20)(26)和式(28)构成的非线性动态逆控制器作用下, 存在正常数 $\epsilon^* > 0$ 和 $\epsilon_1^* > 0$, 使得对于所有 $\epsilon < \epsilon^*$ 和 $\epsilon_1 < \epsilon_1^*$, 都有系统(1)的输出信号 y 指数跟踪参考轨迹 y_r .

证 将式(10)(15)(20)(26)和式(28)构成的非线性动态逆控制器带入式(1)所表示的饱和非仿射纯反馈

非线性系统, 则闭环系统可以表示为如下奇异值摄动标准型:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = f_1(x_1, e_2 + (z_1 + h_1)) - \dot{\alpha}_0, \\ \vdots \\ \dot{e}_i = f_i(\bar{x}_i, e_{i+1} + (z_i + h_i)) - \dot{\alpha}_{i-1}, \\ \vdots \\ \dot{e}_n = f_n(\bar{x}_n, z_n + h_n) - \dot{\alpha}_{n-1} + \\ \quad (f_n(\bar{x}_n, \text{sat}(z_n + h_n)) - f_n(\bar{x}_n, z_n + h_n)), \\ \epsilon_1 \dot{\omega} = Q_\omega - \epsilon_1 \dot{h}_\omega, \\ \epsilon \dot{z} = \Gamma q - \epsilon \dot{h}, \end{cases} \quad (32)$$

其中 $z = [z_1 \ \cdots \ z_n]^T$, $q = [Q_1 \ Q_2 \ \cdots \ Q_n]^T$, $h = [h_1 \ \cdots \ h_n]^T$, 且

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -\text{sgn}(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & -\text{sgn}(\frac{\partial Q_n}{\partial u}) \end{bmatrix}. \quad (33)$$

基于奇异值摄动理论, 令 $\epsilon \rightarrow 0$, 可以得到闭环系统(32)的边界层子系统:

$$\frac{dz}{d\tau} = \Gamma q \quad (34)$$

和降阶慢变子系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_i = e_{i+1}, \\ \dot{e}_n = \mathcal{G}(\bar{e}_n) + f_n(\bar{x}_n, \text{sat}(h_n)) - f_n(\bar{x}_n, h_n) - \omega, \\ \epsilon_1 \dot{\omega} = Q_\omega. \end{cases} \quad (35)$$

对于式(32)中的奇异值摄动系统, 定理1中的条件(B1)–(B2)和条件(B4)直接满足引理1中的条件(A1)–(A3). 通过条件(B5)可得^[10–14]

$$\begin{cases} \text{sgn}(\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i}) > 0, \\ \text{sgn}(\frac{\partial Q_n}{\partial u}) > 0. \end{cases} \quad (36)$$

考虑式(32)中的闭环系统, 条件(B1)–(B2)(B4)直接满足引理1中的条件(A1)–(A3). 根据文献[15–16], 结合假设1, 条件(B5)和引理2可得边界层子系统(34)在原点处局部指数稳定. 现在只需证明降阶慢变子系统(35)在原点处指数稳定. 由其结构可以看出, 式(35)也为奇异值摄动标准型. 令 $\epsilon_1 \rightarrow 0$ 可得式(35)所对应的降阶慢变子系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_i = e_{i+1}, \\ \dot{e}_n = \mathcal{G}(\bar{e}_n) \end{cases} \quad (37)$$

和边界层子系统:

$$\frac{dz_\omega}{d\tau_1} = Q_\omega. \quad (38)$$

易知式(35)中的奇异值摄动系统满足引理1中的条件(A1)–(A3)(A5). 根据假设3可知式(37)中的积分器串联系统在原点处指数稳定, 并由引理1可知式(35)在原点处指数稳定. 至此闭环系统(32)满足引理1中的全部条件. 证毕.

5 仿真示例和分析

5.1 仿真示例1

为验证本文所提非线性动态逆控制方法的有效性, 考虑如下二阶非仿射纯反馈非线性系统^[18]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + \frac{x^3}{5}, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u + \frac{u^3}{7}, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (39)$$

其中: x_1, x_2 为状态变量; u 为控制输入; y 为系统输出. 为了验证本文控制方法的跟踪性能, 使用文献[18]中的自适应动态面算法进行对比仿真, 其它条件不变, 但只对本文控制器进行输入饱和限制. 参考轨迹为 $y_r = \sin(\frac{\pi}{2}t)$; 系统的初始状态设为

$$x_1(0) = -3, x_2(0) = 2, u(0) = 0;$$

输入饱和设置为 $M = 5$; 控制律 $\mathcal{G}(\bar{x}_2)$ 使用文献[19]中的模型预测控制器:

$$\mathcal{G}(\bar{x}_2) = \gamma^{-1}(\bar{e}_n)(-K(\bar{Y} - \bar{Y}_c) + \bar{Y}_{c1} - \beta(\bar{e}_n)), \quad (40)$$

其中: $\gamma(\bar{e}_n) = e_n, n = 2, \beta(\bar{e}_n) = 0, \bar{Y} = [y \ \dot{y}]^T, \bar{Y}_c = [y_r \ \dot{y}_r]^T, \bar{Y}_{c1} = \ddot{y}_r, K$ 为优化控制增益向量, 设置方法可参考文献[19]. 在本次仿真中, 将控制阶与预测时间分别设置为 $r = 5, T_p = 2$. 奇异值摄动参数为 $\epsilon = 0.001, \epsilon_1 = 0.01$.

从图1中的轨迹曲线可以看出, 在本文所提控制方法的作用下, 系统的输出量可以更快速地跟踪参考轨迹, 并且完全消除稳态误差. 相比于动态面控制, 本文提供的非线性动态逆控制器具有更好的闭环跟踪性能.

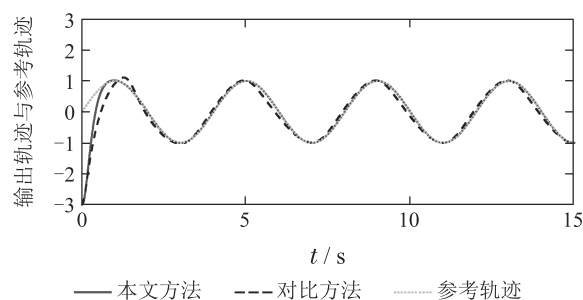


图1 输出轨迹与参考轨迹

Fig. 1 Output trajectory and reference trajectory

图2中跟踪误差曲线则验证了定理1中闭环系统指数跟踪参考轨迹的稳定性结论. 图3中, 状态变量 x_2 始终保持有界.

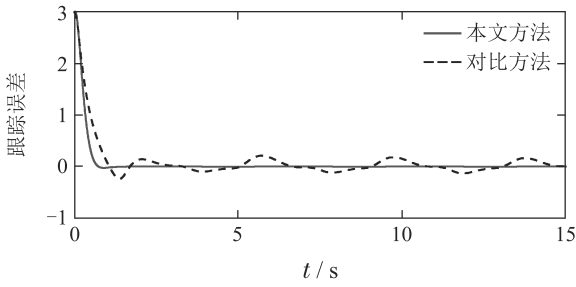


图2 跟踪误差 $e_1 = y_r - x_1$

Fig. 2 Tracking error $e_1 = y_r - x_1$

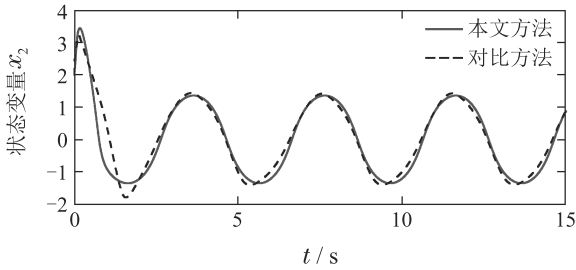


图3 状态响应曲线 x_2

Fig. 3 Response curve of x_2

从图4中可以看出, 在整个控制过程中, 控制量都被限定在输入饱和允许的幅值范围内. 仿真结果验证了本文非线性动态逆控制算法的有效性.

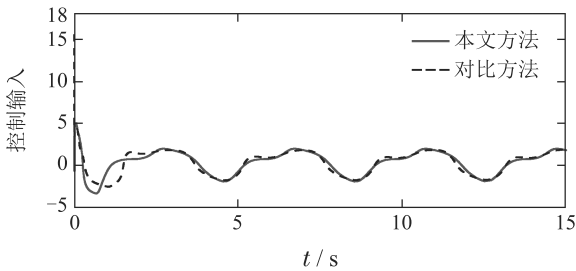


图4 控制输入曲线

Fig. 4 Curve of control input

为进一步验证控制方法的有效性, 假设系统(39)的状态都受到测量噪声的影响:

$$d_{1m} = 0.01 \sin t, d_{2m} = 0.1 \cos^2(3t).$$

为了方便进行对比, 其它条件均保持不变.

从图5-8中可以看出, 即便受到测量噪声的影响, 本文中的控制器依然保持了良好的控制性能. 从图9中可以看出, 在测量噪声的干扰下, 本文控制量没有产生明显波动. 相较于对比方法, 本文的控制方法在测量噪声和输入饱和的双重影响下可以取得更好的跟踪效果.

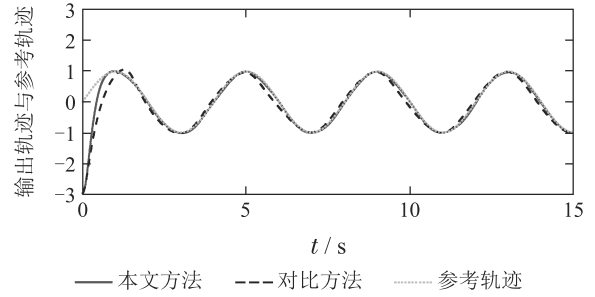


图5 测量噪声下的输出轨迹与参考轨迹

Fig. 5 Output trajectory and reference trajectory under measurement noise

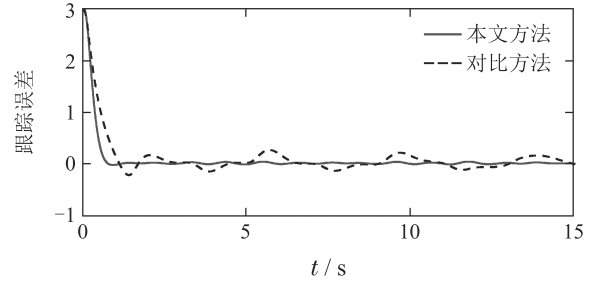


图6 测量噪声下的跟踪误差 $e_1 = y_r - x_1$

Fig. 6 Tracking error under measurement noise $e_1 = y_r - x_1$

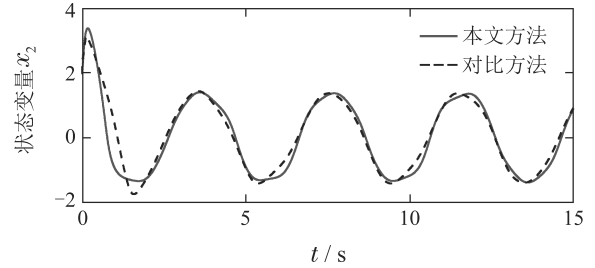


图7 测量噪声下的状态响应曲线 x_2

Fig. 7 Response curve of x_2 under measurement noise

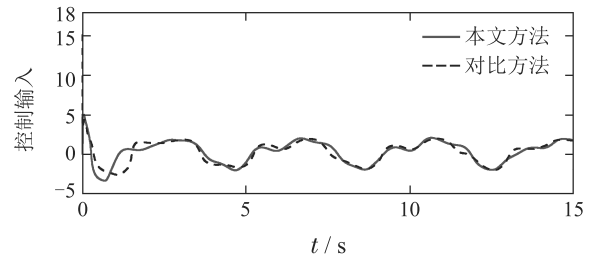


图8 测量噪声下的控制输入曲线

Fig. 8 Curve of control input under measurement noise

5.2 仿真示例2

考虑如下单连杆机电系统:

$$\begin{cases} D\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + N \sin \theta = \tau_B, \\ L\dot{\tau}_B + H\tau_B + K_m\dot{\theta} = V, \end{cases} \quad (41)$$

其中:

$$D = \frac{J}{K_\tau} + \frac{mL_0^2}{3K_\tau} + \frac{M_0^2}{K_\tau} + \frac{2M_0R_0^2}{5K_\tau},$$

$$N = \frac{mL_0^2 G}{2K_\tau} + \frac{M_0 L_0 G}{K_\tau}, \quad B = \frac{B_0}{K_\tau}.$$

单连杆机电系统的物理参数如下:

$$J = 1.625 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad m = 1 \text{ kg},$$

$$R_0 = 0.023 \text{ m}, \quad M_0 = 0.434 \text{ kg}, \quad L_0 = 0.305 \text{ m},$$

$$B_0 = 16.25 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad},$$

$$L = 25.0 \times 10^{-3} \text{ H}, \quad G = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad H = 5.0 \Omega,$$

$$K_\tau = K_m = 0.9 \text{ N} \cdot \text{m/A}.$$

令 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = \tau_B$, $u = V$, 则式(41)中的单连杆机电系统可以重新表示为如下非仿射形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\bar{x}_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = f_3(\bar{x}_2, x_3, u), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (42)$$

其中:

$$f_1(\bar{x}_2) = x_2,$$

$$f_2(\bar{x}_2, x_3) = -\frac{Bx_2}{D} - \frac{N \sin x_1}{D} + \frac{x_3}{D},$$

$$f_3(\bar{x}_2, x_3, u) = \frac{-K_m x_2}{L} - \frac{Hx_3}{L} + \frac{u}{L}.$$

按照文献[16]为三阶积分器串联系统设计传统近似动态逆控制器 $\mathcal{G}(\bar{x}_3)$ 如下:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{\alpha}_1 = -\text{sgn}(\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}) Q_1, \\ Q_1 = k_1 e_1 + x_2 - \dot{\alpha}_0, \\ \epsilon \dot{\alpha}_2 = -\text{sgn}(\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2}) Q_2, \\ Q_2 = k_2 e_2 + x_3 - \dot{\alpha}_1, \\ \epsilon \dot{\mathcal{G}} = -\text{sgn}(\frac{\partial Q_3}{\partial \mathcal{G}}) Q_3, \\ Q_3 = k_3 e_3 + \mathcal{G}, \end{cases} \quad (43)$$

其中 $k_i > 0, i = 1, 2, 3$, 为传统近似动态逆控制器的反馈增益系数.

现将系统的初始状态设为 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1, u(0) = 0$; 参考轨迹选为 $y_r = 1 + \sin(\frac{\pi}{2}t)$; $\mathcal{G}(\bar{x}_3)$ 的反馈增益系数设置为 $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 5$. 在本示例中, 将传统近似动态逆控制器应用于式(42), 作为对照组. 在其它条件不变的情况下, 仅对本文控制器进行输入饱和限制. 奇异值摄动参数设为 $\epsilon = 0.01, \epsilon_1 = 0.1$.

从图9-10中可以看出, 传统近似动态逆控制器要实现参考轨迹的跟踪, 所需要的控制量最大幅值约为110左右. 而在本文所提的控制方法下, 控制量虽然被输入饱和限制在 $[-10, 10]$ 的范围内, 但依然取得了与传统近似动态逆控制方法相同的跟踪性能.

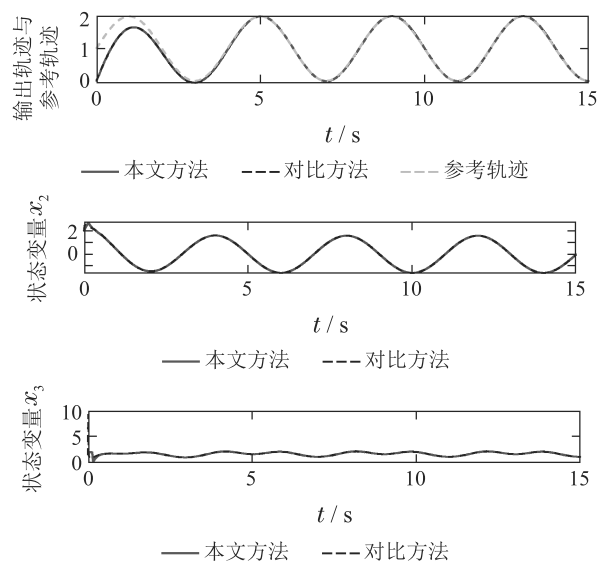


图9 响应曲线和参考轨迹

Fig. 9 Response curves and reference trajectory

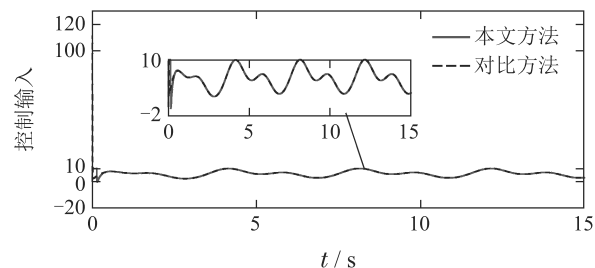


图10 控制输入曲线

Fig. 10 Curve of control input

6 结论

本文针对一类含有输入饱和的非仿射纯反馈非线性系统提出了一种基于奇异值摄动理论的非线性动态逆控制器设计方法. 该控制方法无需设计额外的观测器, 并且避免了反步法中的复杂性爆炸问题. 相比于传统的近似动态逆控制器增加了中间子系统, 从而可以对输入饱和带来的影响进行估计和补偿. 控制器的有效性不依赖于被控系统的时标分离特性, 并具有良好的扩展性, 能够与多种控制算法结合. 仿真结果验证了本文所提控制方法的跟踪性能与有效性.

参考文献:

- [1] YANG Qingyun, CHEN Mou. Robust control for near space vehicles with input saturation. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(1): 18–28.
(杨青运, 陈谋. 具有输入饱和的近空间飞行器鲁棒控制. *控制理论与应用*, 2015, 32(1): 18–28.)
- [2] ZHANG Yangming, YAN Peng. Adaptive robust control for linear motor servo systems. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(3): 287–294.
(张扬名, 闫鹏. 线性电机伺服系统的自适应鲁棒控制. *控制理论与应用*, 2015, 32(3): 287–294.)
- [3] WANG Naizhou, PEI Hailong, WANG Jun, et al. State feedback design for a class of non-rational system subject to actuator saturation.

- Control Theory & Applications*, 2015, 32(6): 823 – 831.
(王乃洲, 裴海龙, 王俊, 等. 一类饱和和非有理系统状态反馈设计. 控制理论与应用, 2015, 32(6): 823 – 831.)
- [4] CHEN B M, TONG H, PENG K M, et al. Composite nonlinear feedback control for linear systems with input saturation: Theory and an application. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(3): 427 – 439.
- [5] ZHOU Q, SHI P, TIAN Y, et al. Approximation-based adaptive tracking control for MIMO nonlinear systems with input saturation. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2014, 45(10): 2119 – 2128.
- [6] AOUAOU S, CHADLI M. Robust fault tolerant controller design for Takagi-Sugeno systems under input saturation. *International Journal of Systems Science*, 2019, 50(6): 1163 – 1178.
- [7] LU T, LAN W. Composite nonlinear feedback control for strict-feedback nonlinear systems with input saturation. *International Journal of Control*, 2019, 92(9): 2170 – 2177.
- [8] ZHANG S, WANG Q, DONG C. Extended state observer based control for generic hypersonic vehicles with nonaffine-in-control character. *ISA Transactions*, 2018, 80: 127 – 136.
- [9] PASHILKAR A A, SUNDARARAJAN N, SARATCHANDRAN P. Adaptive nonlinear neural controller for aircraft under actuator failures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30(3): 835 – 847.
- [10] CHENG Chunhua, WU Jinhua, HU Yunan, et al. Adaptive control of non-affine nonlinear system with saturation constraint. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(8): 1000 – 1008.
(程春华, 吴进华, 胡云安, 等. 受限的非仿射非线性系统的自适应控制. 控制理论与应用, 2014, 31(8): 1000 – 1008.)
- [11] ESFANDIARI K, ABDOLLAHI F, TALEBI H A. Adaptive control of uncertain nonaffine nonlinear systems with input saturation using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 26(10): 2311 – 2322.
- [12] MOLAVI A, JALALI A, NARAGHI M G. Adaptive fuzzy control of a class of nonaffine nonlinear system with input saturation based on passivity theorem. *ISA Transactions*, 2017, 69: 202 – 213.
- [13] ZENG Zhezha, WU Liangdong, YANG Zhenyuan, et al. Self-learning sliding-mode disturbance rejection control for non-affine systems. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(7): 980 – 987.
(曾昭, 吴亮东, 杨振源, 等. 非仿射系统的自学习滑模抗扰控制. 控制理论与应用, 2016, 33(7): 980 – 987.)
- [14] YI B, LIN S, YANG B. Performance recovery of a class of uncertain non-affine systems with unmodelled dynamics: An indirect dynamic inversion method. *International Journal of Control*, 2018, 91(2): 266 – 284.
- [15] YANG H, PEI H L. A novel redesign framework to extend the application scope of a class of disturbance-rejection algorithms. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(1): 321 – 337.
- [16] ASADI M, SHANDIZ H T, KHAYATIAN A. Time scale separation in control of a single-link flexible-joint robot manipulator. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2016, 35(2): 357 – 373.
- [17] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. New York: Upper Saddle River, 2002.
- [18] LIU Y H, HUANG L, XIAO D. Adaptive dynamic surface control for uncertain nonaffine nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(4): 535 – 546.
- [19] CHEN W H, BALLANCE D J, GAWTHROP P J. Optimal control of nonlinear systems: A predictive control approach. *Automatica*, 2003, 39(4): 633 – 641.

作者简介:

杨浩 博士研究生, 目前研究方向为非线性控制、机器人控制、奇异值摄动理论, E-mail: y.h21@mail.scut.edu.cn;

裴海龙 教授, 目前研究方向为机器人控制、智能控制、非线性控制, E-mail: auhlpei@scut.edu.cn.