第 37 卷第 11 期
2020 年 11 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 37 No. 11
Nov. 2020

合成H_∞动态观测器存在性问题的研究

唐　敏†, 徐跃良

(西南交通大学 数学学院, 四川 成都 610000)

摘要: 本文研究了文献[24]提出的合成H_∞动态观测器存在性问题, 针对合成H_∞动态观测器存在时需要满足的一组特殊Sylvester矩阵方程组是否有解进行了讨论, 利用矩阵理论进行相关推导和证明, 得到了此Sylvester矩阵方程组有解的充分必要条件, 以及有解时解的结构, 缩小了合成H_∞动态观测器(UHDO)设计问题中参数的搜索范围, 并给出了该Sylvester矩阵方程组的求解算法, 最后的仿真例子通过解的结构中任意参数的不同取值, 说明了对合成动态观测器的影响.

关键词: 合成动态观测器; 稳定; Hurwitz矩阵; 矩阵方程组; 广义逆

引用格式: 唐敏, 徐跃良. 合成H_∞动态观测器存在性问题的研究. 控制理论与应用, 2020, 37(11): 2451 – 2463

DOI: 10.7641/CTA.2020.90952

Study on the existence of unified H_∞ dynamic observer

TANG Min†, XU Yue-liang

(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan 610000, China)

Abstract: In this paper, the existence of unified H_∞ dynamic observer proposed by article [24] is studied. and whether there is a solution for a special set of Sylvester matrix equations which is needed by the existence of unified H_∞ dynamic observer is discussed. By using the matrix theory, this paper conducts relevant derivation and demonstration, and finally finds out the necessary and sufficient conditions for the Sylvester matrix equations to have solutions, as well as the structure of solutions. It shortens the search range of parameters in the UHDO (unified H_∞ dynamic observer) design problem. And gives the algorithm for solving the Sylvester matrix equations. Finally, different values of arbitrary parameters in the solution structure in the simulation case show the influence on the unified H_∞ dynamic observer.

Key words: unified H_∞ dynamic observer; stable; Hurwitz matrix; matrix equations; Penrose-Moore inverse

Citation: TANG Min, XU Yueliang. Study on the existence of unified H_∞ dynamic observer. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(11): 2451 – 2463

1　引言

状态观测器的研究, 尤其是由输入和输出估计动态系统状态的问题, 最早可追溯到1964年. 自Luenberger引入动态系统的观测器后[1–2], 它已成为现代控制理论与设计中必不可少的基本概念与手段之一.

在过去的几十年里, Luenberger观测器(也称比例观测器(proportional observer, PO))已经扩展到具有未知输入的线性系统中, 关于该观测器的设计理论已经有相当丰富的研究成果. 例如, 文献[3]提出了具有未知输入的最小阶观测器. 文献[4]给出了具有未知输入的线性系统的降阶观测器及相关理论. 文献[5–6]利用直接的矩阵计算给出了未知输入线性系统的全阶观测器的设计方法, 文献[7]对该方法进行了改进, 得到了更一般的设计方法.

由于比例观测器(PO)不能很好的消除稳态误差, 因此, 在PO基础上进一步发展得到比例积分观测器(proportional integral observer, PIO), 它考虑了渐进时间行为. PIO是一个具有积分效应的观测器, 主要优点是具有时间恢复效果, 需要相对较低的观测器增益. 相较于传统观测器, 它的不同之处在于为参数选择提供了一定的自由度. 文献[8]首次提出PIO并应用于单输入单输出线性时不变系统. 之后, 文献[9]把比例积分观测器应用于鲁棒控制系统. 文献[10]利用连续时间PIO, 推导出回路转换复原法(loop transfer recovery, LTR)的设计方法. 文献[11]引入了广义逆矩阵方法来解决具有多个延迟和未知输入的广义系统的PIO设计问题.

近年来, 称之为动态观测器(dynamic observer, DO)的研究成果也很多[12–15]. 动态观测器被广泛应用于线性系统, 相较于PO和PIO, 其不同之处在于观测

收稿日期: 2019−11−15; 录用日期: 2020−07−13.
†通信作者. E-mail: tang0916yuan@sina.com; Tel.: +86 19982018375.
本文责任编委: 段志生.

器增益中包含一个动态变量. 从文献[12]首次提出动态观测器的概念, 到文献[13]采用线性矩阵不等式优化方法设计H_∞输出动态观测器, 研究对象不断丰富. 由于系统模型总是含有一些不确定因素, 这些不确定因素可能由附加的未知噪声、环境影响、未知干扰、不确定或缓慢变化的参数造成. 它们使系统的动态性能变差, 控制变得更为困难, 为保证系统的性能, 因此研究扰动对系统的影响必不可少, 并涌现了大量的优秀研究成果, 提出了许多适用于实际问题的扰动抑制方法, 如文献[16]对可实施的滑模控制设计解决方案进行了分类, 并为将来的滑模控制研究提供了参考框架, 文献[17]针对一类单输入单输出非线性不确定系统的状态和未知输入估计, 提出了一种离散时间非线性滑模观测器, 文献[18]研究了一类具有时滞和不确定性的基于观测器的Takagi-Sugeno模糊滑模控制广义系统设计问题. 除此之外, 设计的H_∞观测器是一种为使扰动和不确定性影响尽可能小的观测器. 文献[19]第一次提出H_∞观测器的概念, 进一步, 文献[20]研究了一类具有时滞状态和参数不确定性的线性离散系统的H_∞观测器的设计问题, 之后, H_∞观测器被应用于离散时间系统和连续时间延迟系统的控制设计问题[21–22], 近来, 为提高系统性能, 采用了故障检测和隔离技术, 如文献[23]研究了基于区间观测器和渐近降阶观测器的不确定系统执行器故障检测问题.

最近, 文献[24]提出了一个综合了DO观测器和H_∞观测器的合成H_∞动态观测器(unified H_∞ dynamic observer, UHDO), 使其兼具能处理存在未知输入和扰动的线性系统, 又能处理没有未知输入和扰动的线性系统. 文中给出了这种动态观测器的参数需满足的条件, 即一组矩阵方程—一组特殊的Sylvester矩阵方程组. 文中也给出了这组矩阵方程, 如果有解, 动态观测器参数可能的形式, 然矩阵方程组何时有解? 若有解, 能否找出其通解没有涉及. 对Sylvester矩阵方程组的研究, 在现有的文献中, 已有几种形式的矩阵方程组被提及. 例如, 文献[25–27]研究了周期Sylvester矩阵方程问题. 文献[28]讨论了关于两个四元数矩阵方程组的解的问题. 然而对本文中的Sylvester矩阵方程组是否有解, 尚没发现有具体的结果. 本文针对文献[24]提出的UHDO参数化设计方法, 在寻找UHDO时, 对需解的Sylvester矩阵方程组进行探讨, 利用矩阵理论得到了该Sylvester矩阵方程组有解的充分必要条件, 及有解时解的结构—通解. 从而方便在得到相应矩阵不是Hurwitz阵时, 有效调整参数.

本文使用以下符号定义: $\mathbb{R}^{m\times n}$表示维度为$m\times n$的实数矩阵, $r_{(\cdot)}=\mathrm{rank}(\cdot)$表示矩阵的秩, 上标$(\cdot)^+$表示矩阵的广义逆, 上标$(\cdot)^*$表示矩阵的共轭转置, 上标$(\cdot)^\perp$表示满足$(\cdot)^\perp(\cdot)=0$的行满秩矩阵, $\|\cdot\|_\infty$表示H_∞范数, $\mathbf{0}$和$\boldsymbol{I}$分别表示适当维数的零矩阵和单位矩阵.

2 问题描述

所谓UHDO设计问题, 就是对如下线性系统:

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu+Fd+D_1w,\\ y=Cx+D_2w.\end{cases}\tag{1}$$

寻找如下结构动态观测器称为UHDO:

$$\begin{cases}\dot{z}=Nz+Jy+Hu+Mv,\\ \dot{v}=Pz+Qy+Gv,\\ \hat{x}=Rz+Sy,\\ e=\hat{x}-x,\end{cases}\tag{2}$$

其中:

$$A\in\mathbb{R}^{n\times n},\ B\in\mathbb{R}^{n\times m},\ F\in\mathbb{R}^{n\times l}, C\in\mathbb{R}^{p\times n},$$
$$D_1\in\mathbb{R}^{p\times d},\ P\in\mathbb{R}^{q\times q},\ N\in\mathbb{R}^{q\times q},\ J\in\mathbb{R}^{q\times p},$$
$$G\in\mathbb{R}^{q\times q},\ H\in\mathbb{R}^{q\times m},\ M\in\mathbb{R}^{q\times q},\ R\in\mathbb{R}^{n\times q},$$
$$S\in\mathbb{R}^{n\times p},\ D_2\in\mathbb{R}^{p\times d},$$

u为控制输入, d为未知输入, w为扰动, v为辅助向量. A,B,F,D_1,C,D_2已知, 但P,Q,R,S,G,N,J,H,M未知, 即寻找矩阵P,Q,R,S,G,N,J,H,M使

1) 当$w=0$时, $e\to 0(t\to+\infty)$.

2) 当$w\neq 0$时, $\|T_{we}\|_\infty<\gamma$, γ为给定的常数, T_{we}为从w到e的传递矩阵.

在引入动态误差$\epsilon=z-Tx$后($T\in\mathbb{R}^{q\times n}$), 文献[24]给出了关于系统(1)是否存在UHDO的如下结论.

引理 1 在$w=0$时, 如果存在T, 使

$$\begin{cases}NT-TA+JC=0,\\ TF=0,\\ H-TB=0,\\ PT+QC=0,\\ RT+SC=I,\end{cases}\tag{3}$$

及$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}N & M\\ P & G\end{bmatrix}$是Hurwitz阵, 则系统(1)的UHDO存在.

注 1 更严格地说, 是当$w=0$时, $e\to 0(t\to+\infty)$动态观测器存在.

对于一个给定的矩阵, 是否是Hurwitz阵有成熟的方法. 因此矩阵方程组是否有解、有解时, 解的结构是怎么样的, 这是寻找UHDO的关键问题. 为了便于参数刻画矩阵方程组(3)的解及当$w\neq 0$时, $\|T_{we}\|_\infty<\gamma$的需要, 在文献[24]中还引入了矩阵E,K, 并且使矩阵T满足下式

$$T=E-KC,\tag{4}$$

目的是容易求解相应的参数, 使方程易解.

原文是在假定式(3)–(4)有解的情况下, 给出了P,

Q,R,S,G,N,J,H,M可能的形式. 但何条件下有解, 其全部解的结构是本文的研究重点, 即

$$\begin{cases} NT-TA+JC=0, \\ TF=0, \\ H-TB=0, \\ PT+QC=0, \\ RT+SC=I, \\ E-KC=T \end{cases} \tag{5}$$

有解的充要条件和有解时解的结构.

3　主要结果

定理 1　矩阵方程组(5)有解的充要条件如下: $\mathrm{rank}(CF)=\mathrm{rank}(F)$及

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} V_{21}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix} \\ F^{\perp}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix} \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}=n$$

成立. 其中对矩阵作奇异值分解:

$$\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}=V^*_{(n+p)\times(n+p)}\begin{pmatrix} \sum_n \\ 0\end{pmatrix}U_n.$$

这里$V_{(n+p)\times(n+p)},U_n$都是酉矩阵, $\sum_n$是对角阵且对角元大于零, 且

$$V_{(n+p)\times(n+p)}=\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^*=U_n^*(\sum_n\ \ 0)V_{(n+p)\times(n+p)},$$

$F^{\perp}$表示秩为$n-r_{\mathrm{F}}$, 满足$F^{\perp}F=0$的行满秩矩阵.

为了便于阅读定理1的证明, 将定理分成4个部分, 每个部分以引理的形式, 单独进行阐述, 在矩阵C已知的情况下, 引理2表明了矩阵方程组(5)中的后3个矩阵方程有解的充要条件; 引理3在矩阵方程组(5)中的后3个矩阵方程有解的条件下, 给出了参数矩阵T,K的具体结构(通解); 引理4阐述了在矩阵方程组(5)中的后3个矩阵方程有解的条件下, 除$TF=0$外, 矩阵方程组(5)的其他方程有解的充要条件及解的形式(通解); 引理5在引理4的基础上, 给出了能使$TF=0$的充要条件, 通过引理5, 最后证明了定理1, 即矩阵方程组(5)有解的充要条件, 具体过程如下.

要使矩阵方程组(5)有解, 它的部分矩阵方程组有解. 因此式(5)中的后3个方程应有解, 其解的情况由如下引理给出.

引理 2　对给定的矩阵C, 矩阵方程组

$$\begin{cases} PT+QC=0, \\ RT+SC=I, \\ E-KC=T \end{cases} \tag{6}$$

有解的充要条件是

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n.$$

证　因

$$\begin{matrix} PT+QC=0 \\ RT+SC=I\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ I\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} T \\ C\end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n.$$

又

$$T=E-KC\Leftrightarrow\begin{pmatrix} I & K \\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} T \\ C\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}.$$

因此矩阵方程组(6)有解, 必有

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n.$$

反之, 如果找到$E\in\mathbb{R}^{q\times n}$, 满足

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n.$$

令$T=E-KC(\forall K\in\mathbb{R}^{q\times p})$, 必有

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} T \\ C\end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n,$$

因此可找到P,Q,R,S(见附录1), 使

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ I\end{pmatrix}$$

成立.　　证毕.

若式(5)中的后3个矩阵方程构成的矩阵方程组有解, T,K的具体表达式可由引理3给出.

引理 3　$\forall E\in\mathbb{R}^{q\times n}$, C给定, 满足

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n,$$

矩阵方程组(6)有解, 则T,K必具如下形式:

$$T=\left[E\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^+ + z_{q\times(n+p)}(I_{(n+p)}-\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^+)\right]\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{p\times n}\end{bmatrix},$$

$$K=\left[E\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+}+z_{q\times(n+p)}(I_{(n+p)}-\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+})\right]\begin{bmatrix}0_{n\times p}\\I_p\end{bmatrix},$$

其中:

$$\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+}=U_n^*(\sum_n^{-1}\ \ 0)V_{(n+p)\times(n+p)},$$

矩阵$z_{q\times(n+p)}$为任意的.

证 由引理2知矩阵方程组(6)有解, 又

$$T=E-KC\Rightarrow(T\ \ K)\begin{pmatrix}I\\C\end{pmatrix}=E,$$

因此

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}I\\C\end{pmatrix}_{(n+p)\times n}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}I\\C\\E\end{pmatrix}_{(n+q+p)\times n}=n,$$

而$\begin{pmatrix}I\\C\end{pmatrix}^{\perp}$可转化为$(I_{(n+p)}-\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+})$, 并且$E\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+}$是方程$(T\ \ K)\begin{pmatrix}I\\C\end{pmatrix}=E$的一个特解. 则对$\forall z_{q\times(n+p)}$, 有

$$(T,K)=z_{q\times(n+p)}(I_{(n+p)}-\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+})+E\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+}.$$

(见附录A.) 证毕.

注 2 条件$q+r_{\rm c}\geqslant n$是必不可少的.

进一步, 在式(5)中的后3个矩阵方程构成的矩阵方程组有解的基础上, 由引理4给出再增加矩阵方程$NJ-TA+JC=0$和$H=TB$, 得到新的矩阵方程组有解的充要条件及解的具体表达式.

引理 4 $\forall E\in\mathbb{R}^{q\times n}$, C给定, 满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n,$$

矩阵方程组

$$\begin{cases}PT+QC=0,\\RT+SC=I,\\E-KC=T,\\NT-TA+JC=0,\\H=TB\end{cases}\tag{7}$$

有解, 且T,K,N,J,H必具有如下形式:

$$T=\left[E\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+}+z_{q\times(n+p)}(I_{(n+p)}-\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+})\right]\begin{bmatrix}I_n\\0_{p\times n}\end{bmatrix},$$

$$K=\left[E\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+}+z_{q\times(n+p)}(I_{(n+p)}-\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+})\right]\begin{bmatrix}0_{n\times p}\\I_p\end{bmatrix},$$

$$N=\left[(E-KC)A\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}^{+}+z_{q\times(q+p)}(I-\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}^{+})\right]\begin{bmatrix}I_q\\0_{p\times q}\end{bmatrix},$$

$$J=\left[(E-KC)A\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}^{+}+z_{q\times(q+p)}(I-\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}^{+})\right]\begin{bmatrix}0_{q\times p}\\I_p\end{bmatrix}+NK,$$

$$H=(E-KC)B,$$

其中矩阵$z_{q\times(n+p)}, z_{q\times(q+p)}$为任意的.

证 由引理2和引理3知, 已经求解出P,Q,R,S,T,K. 进一步, 令$H=TB$, 可求解出H. 因此针对矩阵方程组(7), 只有N,J未知, 所以这里只需证明: 对给定的C, 当$\forall E\in\mathbb{R}^{q\times n}$, 满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n,$$

矩阵方程组$NT-TA+JC=0$有解, 且解的形式固定. 针对$NT-TA+JC=0$, 利用$T=E-KC$可化为$N(E-KC)-(E-KC)A+JC=0$, 即

$$NE+(J-NK)C=(E-KC)A\Leftrightarrow(N\ \ J-NK)\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}=(E-KC)A.$$

由于

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}=n=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}E\\C\\(E-KC)A\end{pmatrix},$$

则对$\forall K_{q\times p}, A_{n\times n}$, 总有$N,J$存在, 使

$$(N\ \ J-NK)\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}=(E-KC)A$$

成立. 然而$\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}^{\perp}$可转化为$(I-\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}^{+})$. 并且$(E-KC)A\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}^{+}$是方程

$$(N\quad J-NK)\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}=(E-KC)A$$

的一个特解. 则对$\forall z_{q\times(q+p)}$, 其通解为

$$(N\ \ J-NK)=(E-KC)A\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}^{+}+ z_{q\times(q+p)}(I-\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}^{+}).$$

(见附录B.)

要使矩阵方程组(5)有解, 则找的$E\in\mathbb{R}^{q\times n}$需满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n.$$

除此之外, T还需满足$TF=0$, 即$EF-KCF=0$. 可转化为找的K需满足: $EF-KCF=0$. 即能找到这样的K需满足的充要条件是

$$\operatorname{rank}(CF)=\operatorname{rank}(F).$$

(见附录B.)　　证毕.

在前面的讨论中知, 假定E满足条件

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n$$

的基础上, 给出了引理2–4. 现在的关键是找到矩阵E, 满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n,$$

并且可找到矩阵K, 使$EF-KCF=0$成立. 由引理2和引理3知, 满足条件$T=E-KC$的K必具有以下形式:

$$K=E\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p \end{pmatrix}+z_{q\times(n+p)}(I_{(n+p)}-\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}^{+})\begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p \end{pmatrix}.$$

进一步, 转化为: 在条件$\operatorname{rank}(CF)=\operatorname{rank}(F)$下, 寻找$E$, 满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n,$$

使下面关于z的矩阵方程

$$EF-E\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p \end{pmatrix}CF+z_{q\times(n+p)}\times (I_{(n+p)}-\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}^{+})\begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p \end{pmatrix}CF=0 \tag{8}$$

有解. 对这样的z是否存在由引理5给出.

引理 5　假设$\operatorname{rank}(CF)=\operatorname{rank}(F)$,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n$$

满足, 矩阵方程(8)有解的充分必要条件为

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_{21}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix} \\ F^{\perp}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix} \\ C \end{pmatrix}=n.$$

证　矩阵方程(8)有解的必要条件可表示为如下形式:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} (I_{(n+p)}-\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}^{+})\begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p \end{pmatrix}CF \\ EF-E\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p \end{pmatrix}CF \end{pmatrix}= \operatorname{rank}(I_{(n+p)}-\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}^{+})\begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p \end{pmatrix}CF.$$

上式可转化为

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_2^{*}V_{22}V_{12}^{*}\sum_n U_nF \\ E(I_n-U_n^{*}\sum_n^{-1}V_{12}V_{12}^{*}\sum_n U_n)F \end{pmatrix}= \operatorname{rank}(V_2^{*}V_{22}V_{12}^{*}\sum_n U_nF).$$

(见附录C.)　　证毕.

由

$$\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}=V_{(n+p)\times(n+p)}^{*}\begin{pmatrix} \sum_n \\ 0 \end{pmatrix}U_n=V_1^{*}\sum_n U_n\Rightarrow$$

$$\begin{cases} I_n=(I_n\quad 0_{n\times p})V_1^{*}\sum_n U_n=V_{11}^{*}\sum_n U_n, \\ C_{p\times n}=(0_{p\times n}\quad I_p)V_1^{*}\sum_n U_n=V_{12}^{*}\sum_n U_n, \end{cases} \tag{9}$$

知$\operatorname{rank}(CF)=\operatorname{rank}(F)$可转化为

$$\operatorname{rank}(V_{12}^{*}\sum_n U_nF)=\operatorname{rank}(F),$$

又因V_2^*是列满秩矩阵, 则

$$\operatorname{rank}(V_2^* V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F) = \operatorname{rank}(V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F),$$

从而有

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_2^* V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F \\ E(I_n - U_n^* \overset{-1}{\sum_n} V_{12} V_{12}^* \sum_n U_n) F \end{pmatrix} = \\ &\operatorname{rank}(V_2^* V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F) \Leftrightarrow \\ &\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_2^* V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F \\ E(I_n - U_n^* \overset{-1}{\sum_n} V_{12} V_{12}^* \sum_n U_n) F \end{pmatrix} = \\ &\operatorname{rank}(V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F). \end{aligned} \tag{10}$$

即矩阵方程(8)有解的充要条件转化为

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_2^* V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F \\ E(I_n - U_n^* \overset{-1}{\sum_n} V_{12} V_{12}^* \sum_n U_n) F \end{pmatrix} = \\ &\operatorname{rank}(V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F). \end{aligned} \tag{11}$$

当满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}_{(q+p)\times n} = n$$

时, 由式(9)知$V_{11}^* = U_n^* \overset{-1}{\sum_n}$, 又

$$\begin{aligned}&V_{11} V_{11}^* + V_{12} V_{12}^* = I_n \Rightarrow \\ &V_{12} V_{12}^* = I_n - \overset{-2}{\sum_n}, \\ &V_{21} V_{11}^* + V_{22} V_{12}^* = 0 \Rightarrow \\ &V_{22} V_{12}^* = -V_{21} V_{11}^* = -V_{21} U_n^* \overset{-1}{\sum_n}, \\ &I_n - U_n^* \overset{-1}{\sum_n} V_{12} V_{12}^* \sum_n U_n = \\ &I_n - U_n^* \overset{-1}{\sum_n} (I_n - \overset{-2}{\sum_n}) \sum_n U_n = U_n^* \overset{-2}{\sum_n} U_n, \\ &E(I_n - U_n^* \overset{-1}{\sum_n} V_{12} V_{12}^* \sum_n U_n) F = E U_n^* \overset{-2}{\sum_n} U_n F, \\ &V_2^* V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F = V_2^* V_{21} F. \end{aligned}$$

则式(11)等价于

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_2^* V_{21} F \\ E U_n^* \overset{-2}{\sum_n} U_n F \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(V_{21} F), \tag{12}$$

其中: 1) 若V_{22}可逆或$V_{22}V_{12}^*$列满秩时, 不论E为何矩阵, 矩阵方程(8)必有解(见附录D); 2) 若V_{22}不可逆或$V_{22}V_{12}^*$非列满秩时, 任取$L_{q\times p}$, 令$E = L_{q\times p} \times V_{21} U_n^* \overset{2}{\sum_n} U_n$, 矩阵方程(8)有解.

针对情况 (2), 式 (12) 成立的充要条件为: 存在$L_{q\times p}, \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})}$, 使

$$E U_n^* \overset{-2}{\sum_n} U_n - L_{q\times p} V_{21} = \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})} F^{\perp},$$

即

$$E = (L_{q\times p} V_{21} + \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})} F^{\perp}) U_n^* \overset{2}{\sum_n} U_n. \tag{13}$$

进一步, 在

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}_{(q+p)\times n} = n \Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} E \\ V_{12}^* \sum_n U_n \end{pmatrix} = n$$

成立的条件下, 有

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}\begin{pmatrix} E \\ V_{12}^* \sum_n U_n \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow \\ &\operatorname{rank}\begin{pmatrix} E \\ V_{12}^* (V_{11}^*)^{-1} \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow \\ &\operatorname{rank}\begin{pmatrix} E V_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix} = n. \end{aligned} \tag{14}$$

因此, 由式(13)–(14)可知: 矩阵方程(8)有解的充分必要条件转化为: 存在$L_{q\times p}, \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})}$, 满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} (L_{q\times p} V_{21} + \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})} F^{\perp}) U_n^* \overset{2}{\sum_n} U_n V_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix} = n. \tag{15}$$

由式(9)知$V_{11}^* = U_n^* \overset{-1}{\sum_n}$, 因此式(15)中的矩阵转化为

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} (L_{q\times p} V_{21} + \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})} F^{\perp}) U_n^* \overset{2}{\sum_n} U_n V_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} (L_{q\times p} V_{21} + \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})} F^{\perp}) U_n^* \sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{pmatrix} (L_{q\times p} V_{21} + \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})} F^{\perp}) U_n^* \sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_{q\times p} & \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{21}U_n^*\sum_n \\ F^{\perp}U_n^*\sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix}.$$

因$\begin{pmatrix} V_{21}U_n^*\sum_n \\ F^{\perp}U_n^*\sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix}$是$n$列矩阵, 故当

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} (L_{q\times p}V_{21}+\tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})}F^{\perp})U_n^*\sum_n^2 U_nV_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix}=n$$

时, 可推出$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} V_{21}U_n^*\sum_n \\ F^{\perp}U_n^*\sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix}=n$. 另一方面, 当$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} V_{21}U_n^*\sum_n \\ F^{\perp}U_n^*\sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix}=n$时, 必可找到$\begin{pmatrix} V_{21}U_n^*\sum_n \\ F^{\perp}U_n^*\sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix}$中线性无关的$n$行(可取$V_{12}^*$中线性无关的行), 即可找到$L_{q\times p}, \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})}$, 使

$$\begin{pmatrix} L_{q\times p} & \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{21}U_n^*\sum_n \\ F^{\perp}U_n^*\sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix}$$

行中包含前面所述的线性无关的n行, 也就是说, 可找到$L_{q\times p}, \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})}$, 使

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} (L_{q\times p}V_{21}+\tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})}F^{\perp})U_n^*\sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix}=n.$$

综上有

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} (L_{q\times p}V_{21}+\tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})}F^{\perp})U_n^*\sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix}=n\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} V_{21}U_n^*\sum_n \\ F^{\perp}U_n^*\sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix}=n.$$

又因

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} V_{21}U_n^*\sum_n \\ F^{\perp}U_n^*\sum_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix}=n\Leftrightarrow\mathrm{rank}\begin{pmatrix} V_{21}U_n^*\sum_n^2 U_n \\ F^{\perp}U_n^*\sum_n^2 U_n \\ V_{12}^*\sum_n U_n^* \end{pmatrix}=n,$$

并且

$$U_n^*\sum_n^2 U_n=\begin{pmatrix} I_n \\ C_{q\times n} \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} I_n \\ C_{q\times n} \end{pmatrix},$$

则有

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} V_{21}U_n^*\sum_n^2 U_n \\ F^{\perp}U_n^*\sum_n^2 U_n \\ V_{12}^*\sum_n U_n^* \end{pmatrix}=n\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} V_{21}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix} \\ F^{\perp}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix} \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}=n.$$

注 3 当$\tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})}=0$时, 可推出若$\mathrm{rank}(C)=n$, 则对$\forall L_{q\times p}$, 有

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} L_{q\times p}V_{21}U_n^*\sum_n^2 U_nV_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix}=n;$$

若$\mathrm{rank}(C)<n$, 则对$\forall L_{q\times p}$, 有

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} L_{q\times p}V_{21}U_n^*\sum_n^2 U_nV_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix}<n.$$

(见附录E.) 证毕.

4 矩阵方程组解的算法

矩阵方程组(5)算法步骤如下:

步骤 1 计算$\mathrm{rank}(F), \mathrm{rank}(CF), \mathrm{rank}(C)$.

步骤 2 判断$\mathrm{rank}(CF)=\mathrm{rank}(F), q+r_{\mathrm{c}}\geqslant n$是否满足. 是: 转步骤3; 否: 输出, 无解, 转步骤15.

步骤 3 对$\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}$作奇异值分解有

$$\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n} \end{pmatrix}=V_{(n+p)\times(n+p)}^*\begin{pmatrix} \sum_n \\ 0 \end{pmatrix}U_n.$$

这里$V_{(n+p)\times(n+p)}, U_n$都是酉矩阵, $\sum_n$是对角阵且对角元大于零, 记

$$V_{(n+p)\times(n+p)}=\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \\ n \\ p \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & p \end{array} \\ \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \end{array}.$$

步骤 4 计算

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_{21}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix} \\ F^{\perp}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix} \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}.$$

步骤 5 判断是否满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_{21}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix} \\ F^{\perp}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix} \\ C_{p\times n}\end{pmatrix} = n.$$

是: 转步骤6; 否: 输出: 无解, 转步骤15.

步骤 6 找$L_{q\times p}, \tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})}$, 使

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} (L_{q\times p}V_{21}+\tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})}F^{\perp})U_n^*\sum\limits_n \\ V_{12}^* \end{pmatrix} = n.$$

步骤 7 计算

$$E = (L_{q\times p}V_{21}+\tilde{K}_{q\times(n-r_{\mathrm{F}})}F^{\perp})U_n^*\sum_n^2 U_n.$$

步骤 8 计算

$$K = E\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^+\begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p\end{pmatrix} + z_{q\times(n+p)} \times \\ (I_{(n+p)} - \begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^+)\begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p\end{pmatrix}, \\ \forall z_{q\times(n+p)}.$$

步骤 9 计算$T = E - KC.$

步骤 10 计算

$$N = (E-KC)A\begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}^+\begin{pmatrix} I_q \\ 0_{p\times q}\end{pmatrix} + \\ z_{q\times(q+p)}(I - \begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}^+)\begin{pmatrix} I_q \\ 0_{p\times q}\end{pmatrix}, \\ \forall z_{q\times(q+p)}.$$

步骤 11 计算

$$J = (E-KC)A\begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}^+\begin{pmatrix} 0_{q\times p} \\ I_p\end{pmatrix} + \\ z_{q\times(q+p)}(I - \begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ C\end{pmatrix}^+)\begin{pmatrix} 0_{q\times p} \\ I_p\end{pmatrix} + NK, \\ \forall z_{q\times(q+p)}.$$

步骤 12 计算$H = TB.$

步骤 13 计算

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ C\end{pmatrix}^+ + z_{(n+q)\times(p+q)} \times \\ (I_{(q+p)} - \begin{pmatrix} T \\ C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ C\end{pmatrix}^+), \\ \forall z_{(n+q)\times(q+p)}.$$

步骤 14 输出$P, Q, R, S, T, N, J, H.$

步骤 15 停止.

5 定理1的应用—实例分析

下面就对原系统(1)中,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix},\ C = (1\ \ 0), \\ D_1 = (1),\ F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix},\ D_2 = (-1),$$

寻找合成动态观测器, 使当$w = 0$时, 有$e \to 0 (t \to +\infty)$.

1) $\operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(CF) = \operatorname{rank}(C) = 1$.

2) 因$\operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(CF)$, 并且$1+1 \geqslant 2$, 满足算法中步骤1–2.

3) 对$\begin{pmatrix} I_2 \\ C_{1\times 2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$作奇异值分解知其伪逆为

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ C_{1\times 2}\end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

其中奇异矩阵为

$$\sum_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\ U_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$V_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

4) $F^{\perp}=(0\ \ 1)$, 从而

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_{21}\begin{pmatrix}I_2\\C_{1\times2}\end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix}I_2\\C_{1\times2}\end{pmatrix}\\ F^{\perp}\begin{pmatrix}I_2\\C_{1\times2}\end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix}I_2\\C_{1\times2}\end{pmatrix}\\ C_{1\times2}\end{pmatrix}=$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}=2.$$

5) 满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_{21}\begin{pmatrix}I_2\\C_{1\times2}\end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix}I_2\\C_{1\times2}\end{pmatrix}\\ F^{\perp}\begin{pmatrix}I_2\\C_{1\times2}\end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix}I_2\\C_{1\times2}\end{pmatrix}\\ C_{1\times2}\end{pmatrix}=2.$$

6) 取$L_{1\times1}=(1),\tilde{K}_{1\times1}=(-1)$, 有

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}(L_{1\times1}V_{21}+\tilde{K}_{1\times1}F^{\perp})U_2^{*}\sum_2\\ V_{12}^{*}\end{pmatrix}=$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1&-1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}=2.$$

7) $E=(L_{1\times1}V_{21}+\tilde{K}_{1\times1}F^{\perp})U_2^{*}\sum_2^2U_2=(\sqrt{2}\ \ -1)$.

8) 取$z_{1\times3}=(1\ \ 0\ \ 1)$, 有

$$K=E\begin{pmatrix}I_2\\C_{1\times2}\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}0_{2\times1}\\I_1\end{pmatrix}+ z_{1\times3}(I_3-\begin{pmatrix}I_2\\C_{1\times2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2\\C_{1\times2}\end{pmatrix}^{+})\begin{pmatrix}0_{2\times1}\\I_1\end{pmatrix}= (\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

9) $T=E-KC=(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ -1)$.

10) 取$z_{1\times2}=(0\ \ 10^7)$, 有

$$N=(E-KC)A\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}I_1\\0_{1\times1}\end{pmatrix}+ z_{1\times2}(I-\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}^{+})\begin{pmatrix}I_1\\0_{1\times1}\end{pmatrix}= (-2.133).$$

11)

$$J=(E-KC)A\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}0_{1\times1}\\I_1\end{pmatrix}+ z_{1\times2}(I-\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}^{+})\begin{pmatrix}0_{1\times1}\\I_1\end{pmatrix}+NK= (2997.8).$$

12) $H=TB=(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

13) 取$z_{3\times2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&-2\times10^5\end{pmatrix}$, 因

$$\begin{pmatrix}P&Q\\R&S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}^{+}+z_{3\times2}(I_2-\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}^{+}),$$

得

$$P=(0),\ Q=(0),\ R=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

14)

$$P=(0),\ Q=(0),\ R=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$

$$T=(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ -1),\ N=(-2.133),\ J=(2997.8),$$

$$H=(\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

取$M=(1),G=(-2)$, 则

$$A=\begin{bmatrix}N&M\\P&G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2.133&1\\0&-2\end{bmatrix}$$

是Hurwitz矩阵, 从而合成动态观测器(2)有当$w=0$时, 满足$e\to0(t\to+\infty)$.

但若在步骤(10)中取$z_{1\times2}=(0\ \ 10)$时, 经计算知

$$N=(0.99998),\ J=(-7.0681),\ H=(\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$P=(0),\ Q=(0),\ R=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$

则

$$A=\begin{bmatrix}N&M\\P&G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.99998&1\\0&-2\end{bmatrix}$$

不是一个Hurwitz阵, 从而合成动态观测器(2)有当$w=0$时, 不满足$e\to 0(t\to +\infty)$.

从上述数值例子可以看出, 对同一系统而言, 通过取不同参数z, 得到的合成动态观测器(2), 有如下情况:

1) 当$w=0$时, 满足$e\to 0(t\to +\infty)$;

2) 当$w=0$时, 不满足$e\to 0(t\to +\infty)$.

此数值例子很好地揭示了本文刻画的参数选取方式的对合成H_∞动态观测器的影响.

当设$n=3, m=l=p=q=d=2$时, 不妨设

$$F=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\\1&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

有$CF=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$, 则$\mathrm{rank}(F)=2, \mathrm{rank}(CF)=1$, 两者不相等, 根据定理1知, 矩阵方程组无解. 故对系统(1)而言, 不会存在如文中结构的合成动态观测器.

6 结论

本文研究了文献[24]提出的合成H_∞动态观测器存在性问题, 针对合成H_∞动态观测器存在时需要满足的一组特殊Sylvester矩阵方程组是否有解进行了讨论, 利用矩阵理论进行相关推导和证明, 得到了此Sylvester矩阵方程组有解的充分必要条件, 以及有解时解的结构, 缩小了UHDO设计问题中参数的搜索范围, 并给出了该Sylvester矩阵方程组的求解算法和具体的数值例子. 由于本文只在矩阵方程组有解时, 就如何缩小参数的搜索范围进行了讨论, 至于如何确定精确参数值还未讨论, 这也是需要进一步研究的方向.

参考文献:

[1] LUENBERGER D. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 1964, 8(2): 70 – 80.

[2] LUENBERGER D. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, 16(6): 596 – 602.

[3] WANG S H, DAVISON E J, DORATO P. Observing the states of systems with unmeasurable disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, 20(5): 716 – 717.

[4] HOU M, MULLER P C. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(6): 871 – 875.

[5] DAROUACH M, ZASADZINSKI M, XU S J. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(3): 606 – 609.

[6] YANG F, RICHARD W W. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(7): 677 – 681.

[7] DAROUACH M. Complements to full order observer design for linear systems with unknown inputs. *Applied Mathematics Letters*, 2009, 22(7): 1107 – 1111.

[8] WOJCIECHOWSKI B. *Analysis and synthesis of proportional-integral observers for single-input-single-output time-invariant continuous systems*. Poland: Gliwice, 1978.

[9] BEALE S, SHAFAI B. Robust control system design with proportional integral observer. *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 1988: 554 – 557.

[10] NIEMANN H H, STOUSTRUP J, SHAFAI B, et al. LTR design of proportional-integral observers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1995, 5(7): 671 – 693.

[11] KOENIG D, MARX B, SENAME O. Unknown inputs proportional integral observers for descriptor systems with multiple delays and unknown inputs. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. Boston, USA: IEEE, 2004: 3472 – 3473.

[12] PARK J K, SHIN D R, CHUNG T M. Dynamic observers for linear time-invariant systems. *Automatica*, 2002, 38(6): 1083 – 1087.

[13] CHEN J D. Robust H_∞ output dynamic observer-based control of uncertain time-delay systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 31(2): 391 – 403.

[14] SUN Y J. Global stabilizability of uncertain systems with time-varying delays via dynamic observer-based output feedback. *Linear Algebra and Its Applications*, 2002, 353(1/3): 91 – 105.

[15] BACK J, YU K T, SEO J H. Dynamic observer error linearization. *Automatica*, 2006, 42(12): 2195 – 2200.

[16] YOUNG K D, UTKIN V I, OZGUNER U. A control engineer's guide to sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1996, 7(3): 328 – 342.

[17] VELUVOLU K C, SOH Y C, CAO W. Rabust discrete-time nonlinear sliding mode state estimation of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, 17(9): 803 – 828.

[18] ZHANG J C, ZHU F L, KARIMI H R, et al. Observer-based sliding mode control for T-S fuzzy descriptor systems with time delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 27(10): 2009 – 2022.

[19] CHOI H H, CHUNG M J. Observer-based H_∞ controller design for state delayed linear systems. *Automatica*, 1996, 32(7): 1073 – 1075.

[20] WANG Z, HUANG B, UNBEHAUEN H. Robust H_∞ observer design of linear state delayed systems with parametric uncertainty: The discrete-time case. *Automatica*, 1996, 35(6): 1161 – 1167.

[21] CHEN J D, YANG C D, LIEN C H, et al. New delay-dependent non-fragile H_∞ observer-based control for continuous time-delay systems. *Information Sciences*, 2008, 178(24): 4699 – 4706.

[22] PENARROCHA I, SANCHIS R, ALBERTOS P. H_∞ observer design for a class of nonlinear discrete systems. *European Journal of Control*, 2009, 15(2): 157 – 165.

[23] ZHANG X M, ZHU F L, GUO S H. Actuator fault detection for uncertain systems based on the combination of the interval observer and asymptotical reduced-order observer. *IEEE Journal of Control*, 2019, 1: 1 – 20. DOI: 10.1080/00207179.2019.1620329.

[24] GAO N, DAROUACH M, VOOS H, et al. New unified H_∞ dynamic observer design for linear systems with unknown inputs. *Automatica*, 2016, 65(C): 43 – 52.

[25] LV L L, ZHANG Z. Finite iterative solutions to periodic sylvester matrix equations. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(5): 2358 – 2370.

[26] LV L L, ZHANG Z. A numerical approach to generalized periodic sylvester matrix equation. *Asian Journal of Control*, 2018, 21(5): 1 – 8.

[27] WANG Q W, HE Z H. Solvability conditions and general solution for mixed Sylvester equations. *Automatica*, 2013, 49(9): 2713 – 2719.

[28] FARID O F, XIANG R N, QING W W. On the solutions of two systems of quaternion matrix equations. *Linear and Multilinear Algebra*, 2018, 66(12): 2355 – 2388.

附录A

给定C,T(维数同正文), 取适当维数的矩阵L, 当满足$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}=n$时, 关于

$$X\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}=L, \qquad (\star)$$

的通解有如下结论给出.

性质 1　如果$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}=n$, 则$X\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}=0$的通解为$X=z\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}^{\perp}$, (这里$\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}^{\perp}$表示$\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}^{\perp}\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}=0$的行满秩矩阵, z为与矩阵方程维数匹配的任意矩阵).

性质 2　如果$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}=n$, 则$X\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}=L$的通解为$X=z\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}^{\perp}+X^*$, 其中$X^*$表示$(\star)$的任意特解.

附录B

性质 3　若存在$E\in\mathbb{R}^{q\times n}$, 满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}_{(q+p)\times n}=n,$$

可转化为找的K需满足$EF-KCF=0$. 即能找到这样的K需满足的充要条件如下:

$$EF-KCF=0\text{有解}\Leftrightarrow\operatorname{rank}(CF)=\operatorname{rank}(F).$$

证　(必要性.) 因$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}=n\Rightarrow\operatorname{rank}\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}=n$. 又因$\operatorname{rank}(\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}F)=\operatorname{rank}(F)$和$TF=0$. 从而有

$$\begin{pmatrix}T\\C\end{pmatrix}F=\begin{pmatrix}TF\\CF\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\CF\end{pmatrix}.$$

故$\operatorname{rank}(CF)=\operatorname{rank}(F)$.

(充分性.) 因$\operatorname{rank}(CF)=\operatorname{rank}(F)$, 并且$CF$和$EF$均可用$F$的行向量线性表示, 因此能找到$K$使$EF=KCF$, 即$EF-KCF=0$.　　证毕.

附录C

性质 4　满足引理5的条件, 有

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}(I_{(n+p)}-\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+})\begin{pmatrix}0_{n\times p}\\I_p\end{pmatrix}CF\\ EF-E\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}0_{n\times p}\\I_p\end{pmatrix}CF\end{pmatrix}=$$

$$\operatorname{rank}(I_{(n+p)}-\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+})\begin{pmatrix}0_{n\times p}\\I_p\end{pmatrix}CF$$

与

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}V_2^*V_{22}V_{12}^*\sum_n U_nF\\ E(I_n-U_n^*\overset{-1}{\sum_n}V_{12}V_{12}^*\sum_n U_n)F\end{pmatrix}=$$
$$\operatorname{rank}(V_2^*V_{22}V_{12}^*\sum_n U_nF)$$

等价.

证　由

$$\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+}=$$
$$V_{(n+p)\times(n+p)}^*\begin{pmatrix}\sum_n\\0\end{pmatrix}(\overset{-1}{\sum_n}\quad 0)V_{(n+p)\times(n+p)}=$$
$$V_{(n+p)\times(n+p)}^*\begin{pmatrix}I_n&0\\0&0\end{pmatrix}V_{(n+p)\times(n+p)}$$

得

$$I_{(n+p)}-\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+}=$$
$$V_{(n+p)\times(n+p)}^*\begin{pmatrix}0&0\\0&I_p\end{pmatrix}V_{(n+p)\times(n+p)}.$$

记

$$V_{(n+p)\times(n+p)}=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & p\end{array}\\ \begin{array}{c}n\\p\end{array} & \begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}\\V_{21}&V_{22}\end{pmatrix}\end{array},$$

则

$$I_{(n+p)}-\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+}=V_2^*V_2,$$

又

$$\begin{pmatrix}I\\C\end{pmatrix}=V_{(n+p)\times(n+p)}^*\begin{pmatrix}\sum_n\\0\end{pmatrix}U_n=V_1^*\sum_n U_n\Rightarrow$$
$$\begin{cases}I_n=(I_n\quad 0_{n\times p})V_1^*\sum_n U_n=V_{11}^*\sum_n U_n,\\ C_{p\times n}=(0_{p\times n}\quad I_p)V_1^*\sum_n U_n=V_{12}^*\sum_n U_n,\end{cases}$$

得

$$(I_{(n+p)}-\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n\\C_{p\times n}\end{pmatrix}^{+})\begin{pmatrix}0_{n\times p}\\I_p\end{pmatrix}CF=$$
$$V_2^*V_2\begin{pmatrix}0_{n\times p}\\I_p\end{pmatrix}CF=V_2^*V_2\begin{pmatrix}0_{n\times p}\\I_p\end{pmatrix}V_{12}^*\sum_n U_nF=$$
$$V_2^*V_{22}V_{12}^*\sum_n U_nF,$$

而

$$EF - E\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p\end{pmatrix} CF =$$

$$E(I_n - \begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p\end{pmatrix} C)F,$$

又

$$I_n - \begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p\end{pmatrix} C =$$

$$I_n - U_n^*(\sum_n^{-1} \quad 0)V_{(n+p)\times(n+p)} \begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p\end{pmatrix} V_{12}^* \sum_n U_n =$$

$$I_n - U_n^*(\sum_n^{-1} \quad 0)\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p\end{pmatrix} V_{12}^* \sum_n U_n =$$

$$I_n - U_n^* \sum_n^{-1} V_{12} V_{12}^* \sum_n U_n.$$

因此,

$$EF - E\begin{pmatrix} I_n \\ C_{p\times n}\end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p\end{pmatrix} CF =$$

$$E(I_n - U_n^* \sum_n^{-1} V_{12} V_{12}^* \sum_n U_n)F.$$

证毕.

附录D

性　　质 5　满足引理5的条件, 若V_{22}可逆或$V_{22}V_{12}^*$列满秩时, 不论E为何矩阵, 矩阵方程(8)必有解. 即方程

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_2^* V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F \\ E(I_n - U_n^* \sum_n^{-1} V_{12} V_{12}^* \sum_n U_n)F \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{rank}(V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F)$$

成立.

证　当V_{22}可逆时,

$$\operatorname{rank}(V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F) = \operatorname{rank}(V_{12}^* \sum_n U_n F) = \operatorname{rank}(F).$$

当$V_{22}V_{12}^*$列满秩时,

$$\operatorname{rank}(V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F) = \operatorname{rank}(\sum_n U_n F) = \operatorname{rank}(F).$$

因此$\forall E \in \mathbb{R}^{q\times n}$,

$$\operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F) \leqslant$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_2^* V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F \\ E(I_n - U_n^* \sum_n^{-1} V_{12} V_{12}^* \sum_n U_n)F \end{pmatrix} \leqslant$$

$$\operatorname{rank}(F),$$

即$\forall E \in \mathbb{R}^{q\times n}$, 方程

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_2^* V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F \\ E(I_n - U_n^* \sum_n^{-1} V_{12} V_{12}^* \sum_n U_n)F \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{rank}(V_{22} V_{12}^* \sum_n U_n F)$$

成立.　　证毕.

附录E

性质 6　满足引理5的条件, 若$\operatorname{rank}(C) = n$, 那么对$\forall L_{q\times p}$, 有

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} L_{q\times p} V_{21} U_n^* \sum_n^2 U_n V_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix} = n,$$

若$\operatorname{rank}(C) < n$, 则对$\forall L_{q\times p}$, 有

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} L_{q\times p} V_{21} U_n^* \sum_n^2 U_n V_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix} < n.$$

证　由$\operatorname{rank}(C) = n$可知$I_n + C^*C$的特征值都大于1, 即$\sum_n$对角元都大于1. 而

$$V_{11}V_{11}^* + V_{12}V_{12}^* = I_n \Rightarrow V_{12}V_{12}^* = I_n - \sum_n^{-2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{rank}(V_{12}V_{12}^*) = n \Rightarrow \operatorname{rank}(V_{12}^*) = n,$$

从而对$\forall L_{q\times p}$,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} L_{q\times p} V_{21} U_n^* \sum_n^2 U_n V_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix} = n.$$

如果$\operatorname{rank}(C) < n$, 可知$I_n + C^*C$的特征值有等于1的, 即$\sum_n$对角元有等于1的.

$$V_{12}V_{12}^* = I_n - \sum_n^{-2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{rank}(V_{12}V_{12}^*) < n \Rightarrow \operatorname{rank}(V_{12}^*) < n,$$

而

$$V_{21}V_{11}^* + V_{22}V_{12}^* = 0 \Rightarrow$$

$$V_{21} = -V_{22}V_{12}^*(V_{11}^*)^{-1},$$

则对于$\forall L_{q\times p}$,

$$\begin{pmatrix} L_{q\times p} V_{21} U_n^* \sum_n^2 U_n V_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -L_{q\times p} V_{22} V_{12}^* (V_{11}^*)^{-1} U_n^* \sum_n^2 U_n V_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -L_{q\times p} V_{22} & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{12}^* & 0 \\ 0 & V_{12}^* \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} (V_{11}^*)^{-1} U_n^* \sum_n^2 U_n V_{11}^* & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

即

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -L_{q\times p}V_{22}V_{12}^*(V_{11}^*)^{-1}U_n^*\sum_n^2 U_nV_{11}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} -L_{q\times p}V_{22} & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12}^* & 0 \\ 0 & V_{12}^* \end{pmatrix}\right) =$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -L_{q\times p}V_{22}V_{12}^* \\ V_{12}^* \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{rank}(\begin{pmatrix} -L_{q\times p}V_{22} \\ I_p \end{pmatrix} V_{12}^*) \leqslant \operatorname{rank}V_{12}^* < n.$$

证毕.

作者简介:

唐　敏　硕士研究生, 目前研究方向为运筹与控制, E-mail: tang0916yuan@sina.com;

徐跃良　教授, 硕士生导师, 目前研究方向为运筹与控制、最优化算法及理论, E-mail: xuyaoliang@home.swjtu.edu.cn.