第 37 卷第 11 期
2020 年 11 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 37 No. 11
Nov. 2020

航向已知条件下纯方位跟踪的可观测性

李洪瑞†

(江苏自动化研究所, 江苏 连云港 222061)

摘要: 利用已知的目标航向可以提高纯方位跟踪系统的性能, 其前提条件是系统可观测. 为了得到可观测条件, 详细推导了观测系统Gram矩阵行列式的解析表达式, 证明了已知航向的纯方位跟踪系统可观测的充分必要条件是存在由3个方位与已知航向构成的可观测判别式不等于0, 证明了系统不可观测的充分必要条件是存在等效的匀速直线运动观测器且它与目标轨线平行, 所获得的系统可观测性判据具有表达形式简洁的特点. 研究成果表明了利用已知的目标航向降低了纯方位跟踪系统观测器机动的要求, 可应用于被动观测系统目标跟踪的理论与工程.

关键词: 可观测性; 纯方位跟踪; 已知航向; 等效观测器

引用格式: 李洪瑞. 航向已知条件下纯方位跟踪的可观测性. 控制理论与应用, 2020, 37(11): 2464 – 2471

DOI: 10.7641/CTA.2020.90976

Observability for bearings-only tracking with known course

LI Hong-rui†

(Jiangsu Automation Research Institute, Lianyungang Jiangsu 222061, China)

Abstract: It is a prerequisite for improving the performance of bearings-only tracking (BOT) by applying known course that the system is observable. In order to attain the observable condition an analytic expression of the Gram matrix determinant for the system is deduced in detail.Then it is strictly proved that a BOT system with known course is observable if and only if there exists a nonzero observable discriminant which consists of three bearings and the known course. It is further shown that a BOT system with known course is unobservable if and only if there exists an equivalent observer motion trajectory with constant velocity and course which parallels to target. The attained observability criterion are characterized by their simple expressions. These conclusions indicate that the application of known course may reduce the need of observer maneuver for BOT and may be applicable to passive target tracking.

Key words: observability; bearing-only tracking; known course; equivalent observer

Citation: LI Hongrui. Observability for bearings-only tracking with known course. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(11): 2464 – 2471

1 引言

纯方位跟踪(bearings-only tracking, BOT)也称目标运动分析(target motion analysis, TMA), 是条件可观测性系统, 其可观测性和跟踪效果依赖于观测平台的机动(方式)[1–2], 因此BOT问题研究的核心内容除了目标跟踪算法外还包括系统的可观测性、观测平台机动方式[3–4], 多年来, 已经开展了许多卓有成效的研究. 可观测性是BOT的基本问题, 已获得许多结果, 例如由观测器加速度矢量、初始时刻目标相对位置和速度矢量的关系表达的可观性条件[1]、仅用(测量的)方位表达的可观测性条件[5]以及目标N–阶多项式运动假设条件下[6]、匀速圆周和匀加速直线运动假设条件下[7–9]的可观测性条件和不可观测条件[10]等. 在BOT算法方面, 从早期的确定性解算到以极大似然为基础的批处理算法[2–3], 从线性/非线性最小二乘滤波到以卡尔曼滤波为基础的各种先进滤波算法等[11–13], 系统性能不断得到改进. 在观测平台机动研究方面, 以费希尔信息矩阵为指标并应用现代最优控制理论获得了观测器常速率下的理论最优航向[14], 以及在观测器机动约束[15]和战场威胁环境约束[16]条件下获得的更符合实际的观测站优化轨迹等. 文献[17]以几何因子为优化指标, 获得了纯方位多目标定位问题中多运动平台的最优布局算法.

虽然BOT问题的研究取得了许多成果, 但是在精度、反应时间、对观测器机动(方式)的依赖以及不同条件或背景的应用等方面还不能完全满足实际需求,

收稿日期: 2019−11−26; 录用日期: 2020−06−30.
†通信作者. E-mail: wylihr863@163.com; Tel.: +86 13861431852.
本文责任编委: 潘泉.
海军装备预先研究项目(3020102020103)资助.
Supported by the Navy Equipment Advanced Research Foundation of China (3020102020103).

目前国内外仍有许多不同兴趣点的研究[17−19]. 由于BOT需要观测器进行有效机动, 这个过程一般需要耗费较长的时间, 影响观测平台占位和系统的应用. 在实际中, 通常存在已知目标的某些先验信息的情况, 利用先验信息的BOT有利于提高应用系统性能[20], 在文献[21]中利用目标前后段“等速”的先验条件, 在观测器不机动情况下得到了分段常速运动目标的参数估计. 然而, 利用先验信息的BOT仍是有条件的可观测系统, 当前, 在不同先验信息条件下已得到了由观测器和目标运动参数关系表达的可观测条件、观测平台匀速直线运动时的可观测条件等[2−3,21], 条件表达较为复杂.

本文研究已知目标航向条件下BOT的可观测条件, 在对BOT观测方程通过数学处理成线性系统后, 将推导观测系统Gram矩阵行列式的解析表达式, 并得到由观测方位和已知航向表示的简洁的系统可观测的充要条件. 然后研究了不可观测系统的观测器运动形态, 证明了系统不可观测的充分必要条件. 最后通过数字计算例, 对本文研究结论进行了数字验证和直观展示.

2　问题描述

目标及观测器态势如图1所示, 设运动目标T作匀速直线(constant velocity, CV)运动, 且已知其航向为$C_{\rm t}$, 观测器平台O为运动平台(速度非0). 由于目标航向已知, 故设状态向量为

$$X_k=(x_{{\rm t},0}\ \ y_{{\rm t},0}\ \ V_{\rm t})^{\rm T}, \tag{1}$$

其中: $x_{{\rm t},0}, y_{{\rm t},0}$为初始时刻($t_0=0$时刻)目标位置坐标; $V_{\rm t}(\neq 0)$为目标航速; 右上角T表示向量或矩阵取转置. 显然X_k为时常量.

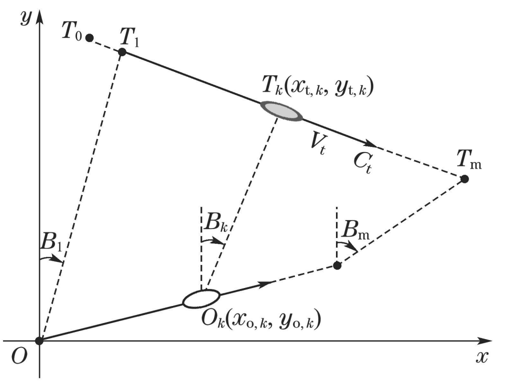


图 1　目标与观测器运动态势

Fig. 1　Kinematic situation of target and observer

将方位测量方程进行适当数学变换, 可得到如下线性状态观测系统:

$$\begin{cases}X_k=F_{k-1}X_{k-1}+u_k,\\ Z_k=H_kX_k+v_k,\end{cases} \tag{2}$$

式中: $F_k=I_{3\times 3}$为3阶单位矩阵,

$$H_k=(\cos B_k\ \ -\sin B_k\ \ t_k\sin(C_{\rm t}-B_k)), \tag{3}$$

$$Z_k=x_{{\rm o},k}\cos B_k-y_{{\rm o},k}\sin B_k, \tag{4}$$

$x_{{\rm o},k}, y_{{\rm o},k}$为$t_k$时刻观测器坐标; B_k为t_k时刻测量的目标方位, 其测量方程为

$$B_k=h(X_k)+w_k, \tag{5}$$

$$h(X_k)=\arctan\frac{x_{{\rm t},k}-x_{{\rm o},k}}{y_{{\rm t},k}-y_{{\rm o},k}}, \tag{6}$$

式中: $x_{{\rm t},k}, y_{{\rm t},k}$为$t_k$时刻目标的直角坐标: $x_{{\rm t},k}=x_{{\rm t},0}+t_kV_{\rm t}\sin C_{\rm t}$, $y_{{\rm t},k}=x_{\rm t}+t_kV_{\rm t}\cos C_{\rm t}$; u_k, v_k, w_k为误差项. 本文主要研究系统的可观测性理论, 因此不考虑系统的各种误差, 即假设各误差项都为0(或0向量).

根据现代控制系统理论, 在观测时间$[t_1, t_m]$内观测系统(2)可观测性判别的Gram矩阵为

$$G_m=\sum_{i=1}^{m}H_i^{\rm T}H_i. \tag{7}$$

本文将对$|G_m|$的表达式进行推导, 将得到观测系统(2)可观测或不可观测的充分必要条件.

3　可观测性定理

定理 1　观测系统(2)可观测的充分必要条件为: 存在$1\leqslant i_0\leqslant j_0\leqslant k_0\leqslant m$, 使得

$$\varDelta(i_0, j_0, k_0)\neq 0, \tag{8}$$

其中:

$$\begin{aligned}\varDelta(i,j,k)=\ &t_i\sin(C_{\rm t}-B_{\rm t})\sin B_{jk}-\\ &t_j\sin(C_{\rm t}-B_j)\sin B_{ik}+\\ &t_k\sin(C_{\rm t}-B_k)\sin B_{ij},\end{aligned} \tag{9}$$

式中$\varDelta(i,j,k)$称为可观测判别式, 它与$C_{\rm t}$有关, 因此若需区分$C_{\rm t}$时可写成$\varDelta(C_{\rm t}, i, j, k)$.

BOT可观测的最少测量个数是4个[2,5], 从定理1可知, 已知目标航向的BOT可观测的最少测量个数减少为3个.

定理1的证明较复杂, 将在第4节给出. 这里先给出由它得到的3个推论. 为此, 记

$$\varGamma(i,j,k)=\\ \frac{t_i\sin B_i\sin B_{jk}-t_j\sin B_j\sin B_{ik}+t_k\sin B_k\sin B_{ij}}{t_i\cos B_i\sin B_{jk}-t_j\cos B_j\sin B_{ik}+t_k\cos B_k\sin B_{ij}}, \tag{10}$$

式中方位的双下标表示两方位取差, 即$B_{ij}=B_j-B_i$. 当i, j, k中存在任意两个相等或3个全相等时, 函数$\varGamma(i,j,k)$的值为0/0型表达式, 在本文并不需要讨论它, 因此后续关于$\varGamma(i,j,k)$的描述或结论中, 如没有特别说明, 都默认假设所涉及的正整数指标i, j, k等互不相等.

推论 1 观测系统(2)不可观测的充分必要条件为: 对任何$1 \leqslant i, j, k \leqslant m$, 都有

$$\Delta(i,j,k) = 0. \tag{11}$$

推论 2 观测系统(2)可观测的充分必要条件为: 存在$1 \leqslant i_0 < j_0 < k_0 \leqslant m$, 使得

$$\tan C_{\mathrm{t}} \neq \Gamma(i_0, j_0, k_0). \tag{12}$$

将式(8)进行适当变形即得式(12). 这是可观测条件式(8)的另外一种表达形式.

推论 3 若观测系统(2)不可观测, 则$\Gamma(i,j,k)$是与i,j,k无关的常数, 且等于目标航向的正切值, 即

$$\Gamma(i,j,k) = \mathrm{const}, \tag{13}$$

且

$$\tan C_{\mathrm{t}} = \Gamma(i,j,k). \tag{14}$$

证 根据定理1, 若观测系统(2)不可观测, 则对于所有i,j,k均有$\Delta(i,j,k)=0$, 从式(9)变形、整理即可得到式(13)–(14). 证毕.

4 可观测性定理证明

为证明定理1, 先给出求G_m行列式解析式的引理1, 其证明详见附录C.

引理 1 可观测性判别矩阵G_m的行列式为

$$|G_m| = \frac{1}{6}\sum_{i,j,k} \Delta^2(i,j,k). \tag{15}$$

定理1的证明 由现代控制理论可知, 观测系统(2)在观测时间$[t_1, t_m]$内可观测的充分必要条件是矩阵G_m满秩, 即$|G_m| \neq 0$. 根据引理1, 有

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j,k=1}^{m} \Delta^2(i,j,k) \neq 0 \Leftrightarrow \exists: 1 \leqslant i_0, j_0, k_0 \leqslant m, \\ \text{s.t. } \Delta(i_0, j_0, k_0) \neq 0. \end{cases} \tag{16}$$

根据性质A2, $\Delta(i_0,j_0,k_0) \neq 0$时, i_0, j_0, k_0必互不相等. 而根据性质A1, 在i_0, j_0, k_0间进行适当的交换, 总可以保证$i_0 < j_0 < k_0$, 并且保持$\Delta(i_0,j_0,k_0) \neq 0$. 所以

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j,k=1}^{m} \Delta^2(i,j,k) \neq 0 \Leftrightarrow \exists: 1 \leqslant i_0 < j_0 < k_0 \leqslant m, \\ \text{s.t. } \Delta(i_0, j_0, k_0) \neq 0 \end{cases} \tag{17}$$

成立, 因此, 定理1结论成立. 证毕.

5 进一步研究

在第3节给出的用方位表达的可观测性条件的基础上, 本节将研究观测器运动方式与系统可观测性的关系, 得出相应的可观测条件. 为此, 引入等效观测概念: 若两个观测器对目标观测的方位序列相等, 则称两观测器为等效观测器; 所观测的方位序列为$\{B_k\}_{k=1}^m$的观测器被称为$\{B_k\}_{k=1}^m$的等效观测器[22].

引理 2 若方位序列$\{B_k\}_{k=1}^m$存在等效的匀速直线运动观测器, 且其航向为C_{o}, 速度为V_{o}, 那么

$$\Delta(C_{\mathrm{t}}, i, j, k) - r_{\mathrm{v}}\Delta(C_{\mathrm{o}}, i, j, k) = 0, \tag{18}$$

其中$r_{\mathrm{v}} = V_{\mathrm{o}}/V_{\mathrm{t}} > 0$.

证 将坐标原点平移至观测器轨迹的初始点, 则有

$$x_{\mathrm{o},k} = t_k V_{\mathrm{o}} \sin C_{\mathrm{o}},\ y_{\mathrm{o},k} = t_k V_{\mathrm{o}} \cos C_{\mathrm{o}},$$

将其代入式(6)后取正切、变形并注意到X_k为时常量, 因此得到

$$H'_k X_k = 0, \tag{19}$$

$$(\sum_k {H'_k}^{\mathrm{T}} H'_k) X_k = 0, \tag{20}$$

其中$H'_k = H_k - (0\ \ 0\ \ t_k r_{\mathrm{v}} \sin(C_{\mathrm{o}} - B_k))$.

经过一定推导可得到线性方程(20)的系数矩阵的行列式等于

$$|\sum_k {H'_k}^{\mathrm{T}} H'_k| = \frac{1}{6}\sum_{i,j,k} \Delta_{\mathrm{to}}^2(i,j,k), \tag{21}$$

其中

$$\Delta_{\mathrm{to}}(i,j,k) = \Delta(C_{\mathrm{t}}, i, j, k) - r_{\mathrm{v}}\Delta(C_{\mathrm{o}}, i, j, k). \tag{22}$$

注意到$X_k \neq 0$, 因此式(20)的系数矩阵行列式等于0, 故对所有i,j,k有$\Delta_{\mathrm{to}}(i,j,k) = 0$, 从而式(18)成立.

证毕.

关于系统的不可观测条件有如下定理:

定理 2 观测系统(2)不可观测的充分必要条件是方位序列$\{B_k\}_{k=1}^m$存在等效的匀速直线运动观测器, 且目标航向与等效观测器航向相等或相差180°, 即

$$C_{\mathrm{t}} = C_{\mathrm{o}} \text{或} C_{\mathrm{t}} = C_{\mathrm{o}} \pm 180^\circ. \tag{23}$$

证 必要性. 分两步完成证明:

1) 证明$\{B_k\}_{k=1}^m$存在等效的匀速直线运动观测器.

若$\tan B_k$为常数$(1 \leqslant k \leqslant m)$, 则

$$\frac{x_{\mathrm{t},0} + t_k V_{\mathrm{t}} \sin C_{\mathrm{t}} - x_{\mathrm{o},k}}{y_{\mathrm{t},0} + t_k V_{\mathrm{t}} \cos C_{\mathrm{t}} - y_{\mathrm{o},k}} = \frac{\sin B_1}{\cos B_1}, \tag{24}$$

于是运动方程

$$\begin{cases} x_{\mathrm{o},k} = (x_{\mathrm{t},0} - \sin B_1) + t_k V_{\mathrm{t}} \sin C_{\mathrm{t}}, \\ y_{\mathrm{o},k} = (y_{\mathrm{t},0} - \cos B_1) + t_k V_{\mathrm{t}} \cos C_{\mathrm{t}} \end{cases} \tag{25}$$

的观测器就是$\{B_k\}_{k=1}^m$的一个等效的匀速直线运动观测器.

若$\tan B_k (1 \leqslant k \leqslant m)$不是常数, 即存在$\tan B_{i_0} \neq \tan B_{j_0}$, 也即$\cos B_{i_0} \sin B_{j_0} - \sin B_{i_0} \cos B_{j_0} \neq 0 (1 \leqslant$

$i_0, j_0 \leqslant m$), 那么线性方程组

$$\begin{pmatrix} \cos B_{i_0} & -\sin B_{i_0} \\ \cos B_{j_0} & -\sin B_{j_0} \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -t_{i_0}\sin(C_{\rm t}-B_{i_0}) \\ -t_{j_0}\sin(C_{\rm t}-B_{j_0}) \end{pmatrix} \tag{26}$$

存在唯一解$(a\ \ b)^{\rm T}$. 这意味着行向量$(a\ \ b\ \ 1)$与如下矩阵A的第1, 2行都正交:

$$A = \begin{pmatrix} \cos B_{i_0} & -\sin B_{i_0} & t_{i_0}\sin(C_{\rm t}-B_{i_0}) \\ \cos B_{j_0} & -\sin B_{j_0} & t_{j_0}\sin(C_{\rm t}-B_{j_0}) \\ \cos B_k & -\sin B_k & t_k\sin(C_{\rm t}-B_k) \end{pmatrix}, \tag{27}$$

其中$1\leqslant k\leqslant m$. 根据引理1及推论1, $|A^{\rm T}A| = \varDelta^2(C_{\rm t}, i_0, j_0, k) = 0$, 因此矩阵$A$的秩等于2, 由于$A$的第1, 2行线性无关, 故$A$的第3行可以由第1, 2 行线性表示, 所以第3行也与$(a\ \ b\ \ 1)$正交, 即

$$a\cos B_k - b\sin B_k + t_k\sin(C_{\rm t} - B_k) = 0. \tag{28}$$

上式变形得

$$\frac{\sin B_k}{\cos B_k} = \frac{a + t_k\sin C_{\rm t}}{b + t_k\cos C_{\rm t}}, \tag{29}$$

于是运动方程

$$\begin{cases} x_{{\rm o},k} = (x_{\rm t,o} - a) + t_k(V_{\rm t} - 1)\sin C_{\rm t}, \\ y_{{\rm o},k} = (y_{\rm t,o} - b) + t_k(V_{\rm t} - 1)\cos C_{\rm t} \end{cases} \tag{30}$$

的观测器就是$\{B_k\}_{k=1}^m$的一个等效的匀速直线运动观测器.

2) 证明式(23)成立.

系统不可观测时, 根据定理1, 必$\varDelta(C_{\rm t}, i, j, k) = 0$, 再根据上一步证明的结论及引理2 得: $\varDelta(C_{\rm o}, i, j, k) = 0$. 由推论3, 有

$$\tan C_{\rm t} = \varGamma(i, j, k) = \tan C_{\rm o}, \tag{31}$$

所以式(23)成立.

充分性. 反之, 当式(23)成立时, 分两种情况证明$\varDelta(C_{\rm t}, i, j, k) = 0$:

1) 若$C_{\rm t} = C_{\rm o}$, 则根据引理2, 对所有i, j, k有

$$(1 - r_{\rm v})\varDelta(C_{\rm t}, i, j, k) = 0, \tag{32}$$

于是$\varDelta(C_{\rm t}, i, j, k) = 0$或$1 - r_{\rm v} = 0$. 若$1-r_{\rm v} = 0$, 则目标航速、航向与观测器航速、航向分别相等, 因此目标方位不变, 故有$\varDelta(C_{\rm t}, i, j, k) = 0$.

2) 若$C_{\rm t} = C_{\rm o} \pm 180°$, 则由引理2, 对所有$i, j, k$有

$$(1 + r_{\rm v})\varDelta(C_{\rm t}, i, j, k) = 0, \tag{33}$$

即$\varDelta(C_{\rm t}, i, j, k) = 0$.

总之, 当式(23)成立时, $\varDelta(C_{\rm t}, i, j, k) = 0$, 根据定理1, 观测系统(2)不可观测. 证毕.

由定理2可得如下推论.

推论 4 若观测器匀速直线运动, 则观测系统(2)不可观测的充分必要条件是式(23)成立.

BOT系统在观测器匀速直线运动情况下是不可观测的[2], 而从推论4可知, 已知目标航向的BOT系统仅在观测器与目标运动轨线平行时不可观测, 这点更符合观测器占位的需求[3,20], 理论上只需避免观测器航向与目标同向或反向.

推论 5 观测系统(2)可观测的充分必要条件是: 对所有互不相等的i, j, k均有

$$\tan C_{\rm t} \neq \varGamma(i, j, k). \tag{34}$$

证 根据推论2, 观测系统(2)可观测的充分必要条件是存在$1\leqslant i_0 < j_0 < k_0 \leqslant m$, 使得$\tan C_{\rm t} \neq \varGamma(i_0, j_0, k_0)$. 依定理2 及性质B3(见附录B), $\varGamma(i, j, k)$是常数, 因此对所有互不相等的i, j, k均有$\varGamma(i, j, k) = \varGamma(i_0, j_0, k_0)$, 故推论5成立. 证毕.

6 数字计算例

给出4个数字计算例, 分别对可观测性判别矩阵行列式、不可观测、可观测等实例进行直观展示与验证.

例 1 可观测性判别矩阵行列式的数字计算例. 通过固定目标参数、改变观测器运动参数的方式对各种态势进行枚举. 设观测采样次数$m = 20 \sim 200$, 采样时刻为$t_k = 10k$ (s). 目标1运动速度、航向分别为5.144 m/s, 100°, 初始位置为(2000 m, 9000 m), 其运动方程为

$$\begin{cases} x_{t_1,k} = 2000 + 10.1326t_k, \\ y_{t_1,k} = 9000 - 1.7866t_k. \end{cases} \tag{35}$$

目标2是与目标1平行的匀直运动目标, 其运动方程为

$$\begin{cases} x_{t_2,k} = 2321.5964 + 13.6790t_k, \\ y_{t_2,k} = 10823.8640 - 2.4120t_k. \end{cases} \tag{36}$$

目标选取为目标1或目标2, 观测器速度在(0 m/s, 50 m/s)、航向和初始方位B_0在$[0°, 360°]$范围、初始距离D_0在[1 km, 40 km]范围随机选取, 得到观测器初始位置坐标为$x_{\rm o,0} = x_{\rm t,0} - D_0\sin B_0$, $y_{\rm o,0} = y_{\rm t,0} - D_0\cos B_0$, 这样保证了各种态势能得到枚举, 数字计算中当式(15)左右两边计算误差低于1.0×10^{-8}时视为相等. 共进行10^6次蒙特卡洛计算, 计算结果均显示式(15)成立, 在观测器航向等于100°或280°时, 式(15)左右端等于0, 这也间接验证了定理1的正确性.

例 2 观测器匀速直线运动轨迹的不可观测计算例. 观测器的航向在100°和280°中随机选取, 观测器其余运动参数(速度和初始位置坐标)按照数字计算例1选取, 枚举观测器轨迹与目标轨迹平行的各种态势. 共进行10^6次蒙特卡洛计算, 均得出$|G_{\rm m}| = 0$, 表明系统不可观测. 计算结果验证了定理2 的正确性.

例 3　观测器复杂机动运动轨迹的不可观测计算例. 仿真结果如图2所示. 图2(a)中3个观测器运动方程分别为

$$\begin{cases} x_{o_1,k} = 392.0179 + 7.5994t_k, \\ y_{o_1,k} = -119.3198 - 1.3400t_k, \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} x_{o_2,k}=70.4215+5.4848t_k-0.0025t_k^2, \\ y_{o_2,k}=-1943.1838-10.3700t_k+0.0004t_k^2, \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{cases} x_{o_3,k}=794.0134+8.2327t_k-(200.9978- \\ \qquad 0.3166t_k)\sin(\pi t_k/180), \\ y_{o_3,k}=2160.5102+1.4517t_k-(1139.9150- \\ \qquad 0.0558t_k)\sin(\pi t_k/180). \end{cases} \tag{39}$$

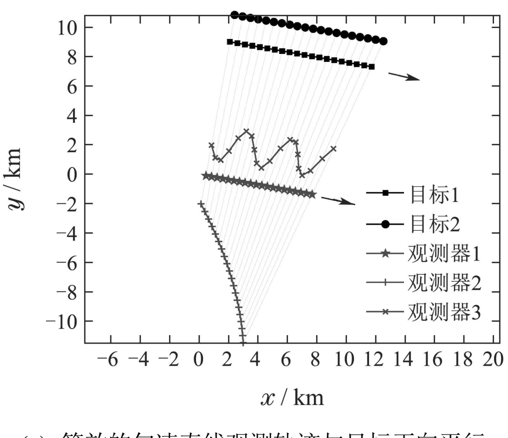
图2(b)中3个观测器运动方程分别为

$$\begin{cases} x_{o_1,k} = 392.0179 - 7.5994t_k, \\ y_{o_1,k} = -119.3198 + 1.3400t_k, \end{cases} \tag{40}$$

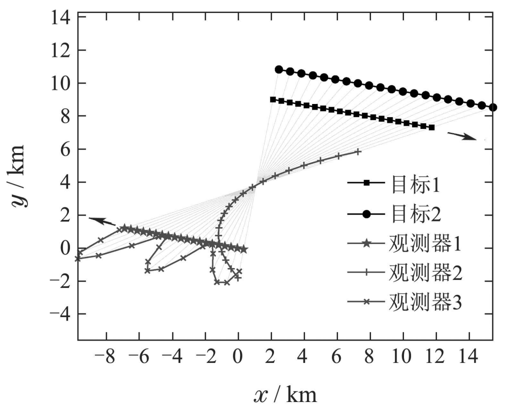
$$\begin{cases} x_{o_2,k}=70.4214-9.5379t_k+0.0177t_k^2, \\ y_{o_2,k}=-1943.1838+11.0846t_k-0.0031t_k^2, \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} x_{o_3,k}=191.0201-9.8159t_k-(200.9978+ \\ \qquad 2.2165t_k)\sin(\pi t_k/180), \\ y_{o_3,k}=-1259.2348+1.7308t_k-(1139.9150- \\ \qquad 0.3908t_k)\sin(\pi t_k/180). \end{cases} \tag{42}$$

图2(a)、图2(b)中, 观测器1与目标的运动轨线平行(图2(a)正向、图2(b)反向), 而观测器2、观测器3具有复杂的运动轨迹. 图2(a)、图2(b)都显示了观测器1, 2, 3对目标1, 2 的观测都得到了相同的方位观测量(即多个观测器对多个目标得到相等的方位观测量), 可见3个观测器是等效的, 并且由于3个观测器中任意一个对2个(实际上有无穷多个)目标的方位观测量相同, 说明3 个观测系统是不可观测的, 即便观测器2、观测器3具有复杂的运动轨迹.



(a) 等效的匀速直线观测轨迹与目标正向平行



(b) 等效的匀速直线观测轨迹与目标反向平行

图 2 观测器具有复杂运动轨迹的不可观测态势

Fig. 2 Unobservable kinematic situation with complicated observer motion trajectory

事实上, 从观测器的运动方程可以看出, 式(37)或式(40)为时间的线性函数, 式(38)或式(41)为时间的二次函数, 式(39)或式(42)为含时间的正弦运算的复杂函数, 但是稍加计算便能够得到:

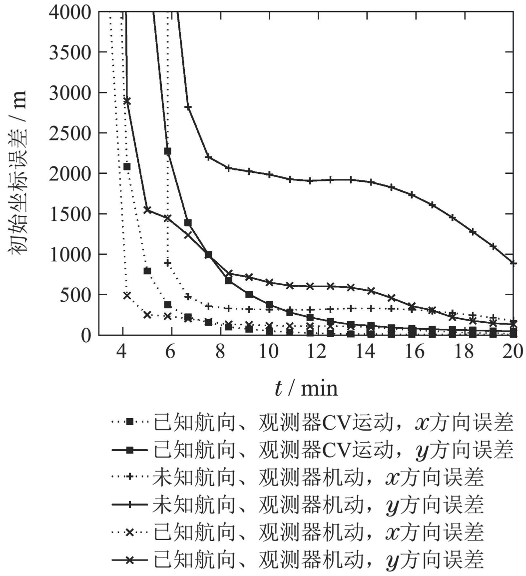
$$\tan B_k = \frac{x_{t_i,k}-x_{o_j,k}}{y_{t_i,k}-y_{o_j,k}},\ i=1,2,\ j=1,2,3. \tag{43}$$

可见不同观测器对不同目标观测得到的方位观测量相等.

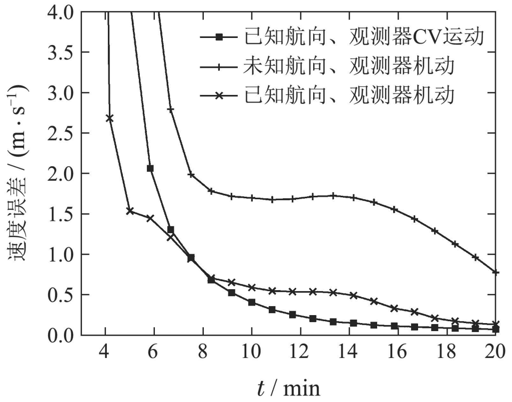
数字计算例3验证了定理2的正确性, 同时这也表明复杂的观测器运动并不能保证系统的可观测性. 在系统设计中, 即便已知目标航向, 观测器的运动方式的确定也应当予以重视.

例 4　BOT计算例. 目标初始位置、航速、航向分别为(2083.78 m, 11817.69 m), 7.72 m/s, 135°. 为了进行比较, 考虑航向已知和未知的情况. 观测器1平台为匀速直线运动, 运动参数为: 初始位置(0.00 m, 0.00 m)、航速6.17 m/s、航向10°. 测量误差为0.3°. 观测器2初始运动参数与观测器1相同, 在第3分钟和第5分钟进行了转向机动, 航向分别为300°和50°. 对目标的跟踪考虑3种条件: 1) 航向已知, 采用观测器1的信息; 2) 航向未知, 采用观测器2的信息; 3) 航向已知, 采用观测器2的信息. 估计方法则由式(2)采用线性最小二乘法, 进行100次蒙特卡洛仿真计算, 结果如图3所示.

从仿真结果可知, 在航向已知的情况下, 无需观测平台进行机动, 得到了目标的运动参数. 与目标航向未知而通过观测器机动获得可观测条件进行目标运动参数计算相比, 前者所需观测时间更短, 在同样观测时间情况下精度更高. 如果目标航向已知, 同时观测器进行有效机动, 则目标运动参数精度进一步提高. 在本例中, 由于目标和观测平台运动航向不满足式(23), 因此BOT系统可观测, 这也间接验证了定理1–2的正确性.



(a) 目标初始位置误差



(b) 目标速度误差

图 3 不同条件下BOT误差

Fig. 3 Errors of BOT for different conditions

7 结论

在纯方位观测系统中利用已知的目标航向进行目标跟踪, 其主要目的是期望系统可观测, 而无需观测平台机动, 有利平台占位, 缩短系统反应时间. 本文从方位测量关系和观测器平台运动方式研究了系统的可观测性, 通过详细推导观测系统的Gram矩阵行列式, 得到并证明了系统可观测的判断准则, 并分析出了不可观测系统的目标与观测器运动态势特征.

研究得到的观测系统(2)可观测的充分必要条件是存在$1 \leqslant i_0 < j_0 < k_0 \leqslant m$, 使得$\Delta(i_0, j_0, k_0) \neq 0$或已知航向满足$\tan C_{\mathrm{t}} \neq \Gamma(i_0, j_0, k_0)$. 观测系统(2)不可观测的充分必要条件是存在等效的匀速直线运动观测器, 且它的轨线与目标轨线平行. 尤其在目标、观测器保持匀速直线运动时, 除了目标和观测器运动轨线平行的态势外, 其他态势情况下系统都是可观测的.

这种由已知航向和方位测量关系表示的可观测性判断条件, 可为被动观测系统设计提供指导. 而由目标航向与观测器航向关系的可观测性判别条件, 可为观测平台的运动控制提供参考.

工程实际中, 目标运动方式会更加复杂, 例如匀加速直线运动、匀速圆周运动等, 相应的可观测条件尚待研究.

参考文献:

[1] NARDONE S, AIDALA V J. Observability criteria for bearings-only target motion analysis. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, 1981, 17(2): 162 – 166.

[2] DONG Zhirong. *Information Fusion & Target Motion Analysis for Naval Vessels*. Beijing: National Defense Industry Publishing Corporation, 2016: 128 – 173.
(董志荣. 舰船信息融合与目标运动分析. 北京: 国防工业出版社, 2016: 128 – 173.)

[3] SI Guangyu. *Theory and Application for Submarine Command & Control System*. Beijing: National Publishing House Electronics Industry, 2018: 118 – 123, 189 – 226.
(司广宇. 潜艇指控系统理论与应用. 北京: 电子工业出版社, 2018: 118 – 123, 189 – 226.)

[4] YANG Jing, LI Yinya, QI Guoqing, et al. Overview of observability of bearings-only target motion analysis. *Fire Control & Command Control*, 2015, 40(12): 1 – 9.
(杨婧, 李银伢, 戚国庆, 等. 纯方位目标运动分析可观测性研究. 火力与指挥控制, 2015, 40(12): 1 – 9.)

[5] LI Hongrui, SHENG Andong. Observability criteria for discrete bearings-only system. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(5): 570 – 572.
(李洪瑞, 盛安东. 离散纯方位系统的可观测性判据. 控制理论与应用, 2009, 26(5): 570 – 572.)

[6] FOGEL E, GAVISH M. Nth-Order dynamics target observability from angle measurements. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1988, 24(3): 305 – 308.

[7] PILLON D, PIGNOL A C, JAUFFRET C. Observability: range-only vs. bearings-only target motion analysis for a leg-by-leg observer's trajectory. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, 52(4): 1667 – 1778.

[8] JAUFFRET C, PIGNOL A C, PILLON D. Observability: range-only versus bearings-only target motion analysis when the observer maneuvers smoothly. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, 53(6): 2814 – 2832.

[9] PÈREZ A C, JAUFFRET C, PILLON D. Bearings-only target motion analysis: observability when the observer maneuvers smoothly. *Proceedings of 20th International Conference on Information Fusion*. Xi'an, China: IEEE, 2017: 1450 – 1457.

[10] HE You, GUAN Xin, YI Xiao. Research on the unobservability problem for two-dimensional tracking based on bearings-only measurements. *Systems Engineering and Electronics*, 2003, 25(1): 11 – 15.
(何友, 关欣, 衣晓. 纯方位二维运动目标的不可观测性问题研究. 系统工程与电子技术, 2003, 25(1): 11 – 15.)

[11] WU Jiutao, CHEN Yawei, SUN Jun. Bearings-only target motion analysis based on two-grade maximum likelihood seeking. *Technical Acoustics*, 2018, 37(6): 217 – 218.
(吴久涛, 陈亚伟, 孙俊. 基于两级最大似然寻优的纯方位目标运动分析. 声学技术, 2018, 37(6): 217 – 218.)

[12] RADHAKRISHNAN R, BHAUMIK S, TOMAR N K. Gaussian sum shifted Rayleigh filter for underwater bearings-only target tracking problems. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2019, 44(2): 492 – 501.

[13] SUN T, XIN M. Bearings-only tracking using augmented ensemble Kalman filter. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2020, 28(3): 1009 – 1016.

[14] PASSERIEUX J M, VAN CAPPEL D. Optimal observer maneuver for bearings-only tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1998, 34(3): 777 – 778.

[15] HE S M, SHIN H S, TSOURDOS A. Trajectory optimization for target localization with bearing-only measurement. *IEEE Transactions on Robotics*, 2019, 35(3): 653 – 668.

[16] WU Hao, CHEN Shuxin, LIU Zhuowei. Single-observer trajectory optimization in battlefield threats for bearings-only detection. *Journal of National University of Defense Technology*, 2018, 40(5): 133 – 137.
(吴昊, 陈树新, 刘卓葳. 战场威胁约束下的纯方位探测单观测站轨迹优化. 国防科技大学学报, 2018, 40(5): 133 – 137.)

[17] LI Y Y, QI G Q, SHENG A D. Optimal deployment of vehicles with circular formation for bearings-only multi-target localization. *Automatica*, 2019, 105(6): 347 – 355.

[18] SEO M G, TAHK M J. Observability analysis and enhancement of radome aberration estimation with line-of-sight angle-only measurement. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic System*, 2015, 51(4): 3321 – 3331.

[19] KLEIN I, LIPMAN Y, BAR-SGALOM Y. Asynchronous passive multisensor system observability with unknown sensor position. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic System*, 2018, 54(1): 369 – 375.

[20] MENG Qingyu, ZHANG Jingyuan, SONG Baowei. *Analysis of Operational Effectiveness for Torpedo*. Beijing: National Defense Industry Publishing Corporation. 2003: 108 – 120.
(孟庆玉, 张静远, 宋保维. 鱼雷作战效能分析. 北京: 国防工业出版社, 2003: 108 – 120.)

[21] JAUFFRET C, PILLON D, PIGNOL A C. Bearings-only TMA without observer maneuver. *Proceedings of the 11th International Conference on Informational Fusion*. Cologne, Germany: IEEE, 2008: 501 – 508.

[22] LI Hongrui, SHENG Andong. Analysis on the observability for continuous bearings-only system. *Acta Armamentarii*, 2009, 30(11): 1446 – 1450.
(李洪瑞, 盛安冬. 连续纯方位系统的可观测性分析. 兵工学报, 2009, 30(11): 1446 – 1450.)

附录A 可观测判别式性质

本文用到的关于可观测判别式$\varDelta(i,j,k)$的两个性质:

性质 A1 可观测判别式$\varDelta(i,j,k)$对各个变量具有反对称性, 即交换$\varDelta(i,j,k)$中任意两个变量的顺序, 相应函数值改变符号:

$$\varDelta(j,i,k)=-\varDelta(i,j,k), \tag{A1}$$

$$\varDelta(i,k,j)=-\varDelta(i,j,k), \tag{A2}$$

$$\varDelta(k,j,i)=-\varDelta(i,j,k). \tag{A3}$$

这可应用三角函数性质推导出来. 由性质A1很容易推导出如下性质A2.

性质 A2 若变量i,j,k中存在两个相等, 则$\varDelta(i,j,k)=0$, 即

$$\varDelta(i,i,k)=\varDelta(i,j,i)=\varDelta(i,j,j)=0. \tag{A4}$$

附录B $\boldsymbol{\varGamma(i,j,k)}$性质

本文用到的关于$\varGamma(i,j,k)$的3个性质:

性质 B1 交换i,j,k中的任意两个变量, $\varGamma(i,j,k)$的值不变, 即

$$\varGamma(j,i,k)=\varGamma(i,j,k), \tag{B1}$$

$$\varGamma(k,j,i)=\varGamma(i,j,k), \tag{B2}$$

$$\varGamma(i,k,j)=\varGamma(i,j,k). \tag{B3}$$

根据式(10), 结论显然.

性质 B2 若方位序列$\{B_k\}_{k=1}^m$存在等效的匀速直线观测轨迹, 则改变i,j,k中的一个变量的值而其余两个变量不变时, $\varGamma(i,j,k)$的值不变, 即

$$\varGamma(i,j,l)=\varGamma(i,j,k), \tag{B4}$$

$$\varGamma(i,l,k)=\varGamma(i,j,k), \tag{B5}$$

$$\varGamma(l,j,k)=\varGamma(i,j,k). \tag{B6}$$

证 根据性质B1, 只需证明$\varGamma(i,j,k)=\varGamma(i,j,l)$. 为此, 计算$\varGamma(i,j,l)-\varGamma(i,j,k)$的分子$\varDelta\varGamma_{ijkl}$, 得

$$\begin{aligned}&\varDelta\varGamma_{ijkl}=\\&(t_is_is_{jk}-t_js_js_{ik}+t_ks_ks_{ij})(t_ic_is_{jl}-t_jc_js_{il}+\\&t_lc_ls_{ij})-(t_is_is_{jl}-t_js_js_{il}+t_ls_ls_{ij})(t_ic_is_{jk}-\\&t_jc_js_{ik}+t_kc_ks_{ij}).\end{aligned} \tag{B7}$$

经过一定运算和整理可得

$$\varDelta\varGamma_{ijkl}=-s_{ij}\varDelta(i,j,k,l), \tag{B8}$$

式中: $s_i=\sin B_i$, $c_i=\cos B_i$, $s_{ij}=\sin B_{ij}$, 四元函数$\varDelta(i,j,k,l)$为传统BOT系统的可观测判别式[5]. 依据文献[5]的结论, 当方位序列$\{B_k\}_{k=1}^m$存在等效的匀速直线观测轨迹时$\varDelta(i,j,k,l)=0$, 因此可推得$\varDelta\varGamma_{ijkl}=0$, 即$\varGamma(i,j,k)=\varGamma(i,j,l)$. 证毕.

性质 B3 在方位序列$\{B_k\}_{k=1}^m$存在等效的匀速直线观测轨迹时, 若i,j,k互不相等, 则$\varGamma(i,j,k)$是与i,j,k无关的常数, 即式(12)成立.

证 根据性质B2, 有如下推理:

$$\varGamma(i,j,k)=\varGamma(p,j,k)=\varGamma(p,q,k)=\varGamma(p,q,s).$$

可见性质B3成立. 证毕.

附录C 引理1的证明

为了证明引理(即式(15)), 将式(3)代入式(7), 可得到G_m的表达如下:

$$G_\mathrm{m}=\sum_{i=1}^m\begin{pmatrix}\cos^2B_i & \sin B_i\cos B_i & t_i\cos B_i\sin(C_\mathrm{t}-B_i)\\ -\sin B_i\cos B_i & \sin^2B_i & -t_i\sin B_i\sin(C_\mathrm{t}-B_i)\\ t_i\cos B_i\sin(C_\mathrm{t}-B_i) & -t_i\sin B_i\sin(C_\mathrm{t}-B_i) & t_i^2\sin^2(C_\mathrm{t}-B_i)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m}\cos^2 B_i & -\sum\limits_{i=1}^{m}\sin B_i\cos B_i & \sum\limits_{i=1}^{m} t_i\cos B_i\sin(C_\mathrm{t}-B_i) \\ -\sum\limits_{i=1}^{m}\sin B_i\cos B_i & \sum\limits_{i=1}^{m}\sin^2 B_i & -\sum\limits_{i=1}^{m} t_i\sin B_i\sin(C_\mathrm{t}-B_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} t_i\cos B_i\sin(C_\mathrm{t}-B_i) & -\sum\limits_{i=1}^{m} t_i\sin B_i\sin(C_\mathrm{t}-B_i) & \sum\limits_{i=1}^{m} t_i^2\sin^2(C_\mathrm{t}-B_i) \end{pmatrix}. \tag{C1}$$

为了表达式简单, 令$sc_i=\sin(C_\mathrm{t}-B_i)$. 则$|G_\mathrm{m}|$可表示为

$$|G_\mathrm{m}|=\begin{vmatrix} \sum\limits_i c_i^2 & -\sum\limits_i s_ic_i & \sum\limits_i t_ic_isc_i \\ -\sum\limits_i s_ic_i & \sum\limits_i s_i^2 & -\sum\limits_i t_is_isc_i \\ \sum\limits_i t_ic_isc_i & -\sum\limits_i t_is_isc_i & \sum\limits_i t_i^2sc_i^2 \end{vmatrix}, \tag{C2}$$

其中和号下标取值范围为1到m.

根据拉普拉斯行列式展开定理对上述行列式按第1行展开成3项之和: $|G_\mathrm{m}|=D_1+D_2+D_3$, 其中$D_1, D_2, D_3$分别为

$$D_1=\sum_i c_i^2\cdot\begin{vmatrix} \sum\limits_i s_i^2 & -\sum\limits_i t_is_isc_i \\ -\sum\limits_i t_is_isc_i & \sum\limits_i t_i^2sc_i^2 \end{vmatrix}, \tag{C3}$$

$$D_2=\sum_i s_ic_i\cdot\begin{vmatrix} -\sum\limits_i s_ic_i & -\sum\limits_i t_is_isc_i \\ \sum\limits_i t_is_isc_i & \sum\limits_i t_i^2sc_i^2 \end{vmatrix}, \tag{C4}$$

$$D_3=\sum_i t_ic_isc_i\cdot\begin{vmatrix} -\sum\limits_i s_ic_i & \sum\limits_i s_i^2 \\ \sum\limits_i t_is_isc_i & -\sum\limits_i t_is_isc_i \end{vmatrix}. \tag{C5}$$

对以上3式右边二阶行列式展开并进行整理, 分别得到

$$D_1=\sum_{i,j,k} c_i^2(s_j^2t_k^2sc_k^2-t_js_jsc_jt_ks_ksc_k)=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(t_ksc_ks_jc_i-t_jsc_js_kc_i)^2, \tag{C6}$$

$$D_2=\sum_{i,j,k} s_ic_i(-s_jc_jt_k^2sc_k^2+t_js_jsc_jt_ks_ksc_k)=$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k} s_i(t_ksc_ks_jc_i-t_jsc_js_kc_i)\cdot$$
$$(t_ksc_kc_j-t_jsc_jc_k), \tag{C7}$$

$$D_3=\sum_{i,j,k} t_ic_isc_i(s_jc_jt_ks_ksc_k-s_k^2t_js_jsc_j)=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j,k} t_isc_is_{jk}(t_ksc_ks_jc_i-t_jsc_js_kc_i), \tag{C8}$$

因此

$$|G_\mathrm{m}|=D_1+D_2+D_3=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(t_ksc_ks_jc_i-t_jsc_js_kc_i)\varDelta(i,j,k)=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}t_ksc_ks_jc_i\varDelta(i,j,k)-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}t_jsc_js_kc_i\varDelta(i,j,k)=$$
$$\frac{1}{4}\sum_{i,j,k}t_ksc_ks_{ij}\varDelta(i,j,k)-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k}t_jsc_js_{ik}\varDelta(i,j,k)=$$
$$\frac{1}{4}\sum_{i,j,k}(t_ksc_ks_{ij}-t_jsc_js_{ik})\varDelta(i,j,k). \tag{C9}$$

上式推导中, 反复用到了可观测判别式的性质A1. 由于式(C9)中的多元求和次序不影响和值, 因此分别对i和j, i和k, j和k进行交换后依次得到

$$|G_\mathrm{m}|=\frac{1}{4}\sum_{i,j,k}(t_ksc_ks_{ij}+t_isc_is_{jk})\varDelta(i,j,k), \tag{C10}$$

$$|G_\mathrm{m}|=\frac{1}{4}\sum_{i,j,k}(t_isc_is_{jk}-t_jsc_js_{ik})\varDelta(i,j,k), \tag{C11}$$

$$|G_\mathrm{m}|=\frac{1}{4}\sum_{i,j,k}(-t_jsc_js_{ik}+t_ksc_ks_{ij})\varDelta(i,j,k). \tag{C12}$$

上述3式相加并整理得

$$3|G_\mathrm{m}|=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\varDelta^2(i,j,k), \tag{C13}$$

从而得到式(15).　　证毕.

在上述推导中反复用到了可观测性判别式的性质(见附录A).

作者简介:

李洪瑞　博士, 研究员, 主要研究方向为水下信息系统, E-mail: wylihr863@163.com.