

输入饱和约束下多智能体的有限时间一致

孙新勇^{1,2}, 吴 杰¹, 侯至丞^{2†}, 张 弓², 杨文林², 韩彰秀²

(1. 华南理工大学 机械与汽车工程学院, 广东 广州 510640; 2. 广州中国科学院 先进技术研究所, 广东 广州 511458)

摘要: 为解决多智能体系统在有限时间跟踪控制过程中受输入饱和影响的问题, 本文研究了输入饱和约束下的二阶线性多智能体系统的有限时间一致和跟踪控制. 首先在无向通信拓扑下, 利用齐次函数, 设计了基于单饱和函数的有限时间一致和跟踪控制器. 然后, 应用李雅普诺夫稳定性理论和代数图论等方法证明了控制算法的稳定性. 最后, 给出了能够使多智能体系统实现有限时间一致和跟踪的充分条件. 仿真结果验证了当系统存在输入饱和约束时, 控制器能使多智能体在有限时间内完成跟踪任务.

关键词: 有限时间收敛; 输入饱和; 多智能体; 一致性; 跟踪控制

引用格式: 孙新勇, 吴杰, 侯至丞, 等. 输入饱和约束下多智能体的有限时间一致. 控制理论与应用, 2020, 37(11): 2391 – 2397

DOI: 10.7641/CTA.2020.00005

Finite-time consensus of multi-agent systems with input saturation constraints

SUN Xin-yong^{1,2}, WU Jie¹, HOU Zhi-cheng^{2†}, ZHANG Gong²,
YANG Wen-lin², HAN Zhang-xiu²

(1. School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;
2. Guangzhou Institute of Advanced Technology, Chinese Academy of Sciences, Guangzhou Guangdong 511458, China)

Abstract: In order to solve the problem of multi-agent systems subject to input saturation in the finite-time tracking control process, this paper studies the finite-time consensus and tracking control of the second-order linear multi-agent systems subject input saturation constraints. Firstly, in a undirected communication topology, a homogeneous function is used, finite-time consensus and tracking protocols are proposed based on single saturation function. Then, the stability of the control algorithm is proven by using Lyapunov's stability theory and algebraic graph theory. Finally, sufficient conditions are given to enable multi-agents system to achieve consensus and tracking in finite time. Simulation results show that the protocol can complete the tracking task in finite time when multi-agent systems subject to input saturation.

Key words: finite-time convergence; input saturation; multi-agent systems; consensus; tracking control

Citation: SUN Xinyong, WU Jie, HOU Zhicheng, et al. Finite-time consensus of multi-agent systems with input saturation constraints. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(11): 2391 – 2397

1 引言

一致性问题作为多智能体分布式协同控制的基础问题, 近年来受到广泛关注. 一致性问题的目标是设计一个基于局部信息的分布式控制器, 使所有智能体的状态收敛到相同值. 现有成果大多只能实现渐近一致, 即只有当时间趋于无穷大时, 系统的状态才能实现一致. 而在某些实际应用中, 多智能体系统往往存在输入饱和约束, 且要求在有限时间内实现快速一致,

因此很有必要设计一种抗饱和的有限时间控制器.

有限时间一致相较于渐近一致具有更快的收敛速度、更好的抗扰动性能和更高的精度^[1–2]. 文献[3–5]研究了切换拓扑下的有限时间一致问题, 设计了一种集中式切换协同控制器, 从而快速实现有限时间一致. 当系统存在扰动时, 文献[6–7]证明了跟踪误差可以在有限时间内收敛到原点附近的有界区域. 对二阶多智能体系统速度不可测的情况, 文献[8–10]基于有

收稿日期: 2020-01-03; 录用日期: 2020-06-04.

[†]通信作者. E-mail: zc.hou@giat.ac.cn; Tel.: +86 20-22912610.

本文责任编辑: 孙长银.

中国博士后科学基金面上项目(2019M662848), 广东省自然科学基金项目(2018A030310046, 2016A030313463)资助.

Supported by the China Postdoctoral Science Foundation (2019M662848) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province (2018A030310046, 2016A030313463).

限时间一致观测器,证明了在通信拓扑和控制参数满足一定条件的情况下,可以实现协同跟踪任务.文献[11]研究了二阶多智能体的有限时间跟踪问题.

前述的控制算法没有考虑系统存在输入饱和的情况,而在实际的控制系统中,输入饱和是系统普遍存在的一种控制约束.它是由智能体的驱动能力有限引起的.如果处理不当会导致严重的性能下降甚至使系统失稳.文献[12–13]介绍了一些输入饱和问题的研究方法,但只能保证系统渐近一致,而针对输入饱和约束下的有限时间一致的成果较少.当系统存在输入饱和约束时,文献[14–15]研究了基于增加幂次积分的有限时间姿态和编队控制问题,控制器有较好的抗扰性且可实现全局收敛.相较于增加幂次积分方法,利用齐次理论实现有限时间控制的过程更简便,所得控制器的形式也更简单.文献[16–19]基于齐次理论设计了输入饱和约束下的有限时间一致控制器.然而,该理论却对非齐次系统的控制器设计无能为力,文献[20–21]提出了扩展齐次定理,文献[22–23]利用扩展齐次定理研究了输入饱和约束下的有限时间一致问题,由于对不同的状态变量分别使用相同的饱和函数,未解决饱和度分配不均匀的问题.文献[24–26]基于单个饱和函数,解决了饱和度分配不均的问题.

本文针对受输入饱和约束下的二阶线性多智能体系统,提出了一种抗饱和有限时间一致控制器,相较于文献[22–23],本文基于单饱和函数,解决了饱和度在控制器的位置和速度反馈之间分配不一致的问题,控制器结构更加简单易于应用.相较于文献[24–26],本文引入了双曲正切函数和嵌套齐次函数来解决输入饱和问题,降低了控制器设计的复杂性,仿真结果验证了当多智能体系统存在输入约束时,本文设计的控制器能使系统在有限时间内完成一致和跟踪任务.

本文其余部分结构如下:第2节介绍了一些有用的预备知识和模型描述;第3节和第4节分别设计了两类连续有限时间一致和跟踪控制器;第5节通过仿真实例,验证了算法的可行性;最后,第6节对全文进行总结.

以下符号将在本文的其余部分使用:定义 1_N 为每个元素都为1的列向量; $\text{sig}(x)^\alpha = \text{sgn } x|x|^\alpha$,其中 $|x|$ 表示实数 x 的绝对值且 $\text{sgn } x$ 是符号函数.对任意的向量 $x = [x_1 \cdots x_n]^\text{T} \in \mathbb{R}^n$ 和正实数 $\alpha > 0$,都有 $\text{sig}(x)^\alpha = [\text{sig}(x_1)^\alpha \cdots \text{sig}(x_n)^\alpha]^\text{T}$ 和 $\tanh x = [\tanh x_1 \cdots \tanh x_n]^\text{T}$.令 $\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ 是界为 $[-1, 1]$ 的饱和函数.

2 问题描述和预备知识

2.1 问题描述

本文研究了输入饱和约束下的二阶多智能体系统,其动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,1} = x_{i,2}, \\ \dot{x}_{i,2} = \sigma_b(u_i), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_i, u_i \in \mathbb{R}^n$ 分别为第 $i(i = 1, \cdots, N)$ 个智能体的状态和输入; $\sigma_b(x)$ 为以 b 为饱和界的饱和函数,定义为

$$\sigma_b(x) = \begin{cases} x, & |x| < b, \\ \text{sgn } xb, & |x| \geq b. \end{cases}$$

定义 1^[1] 对于系统(1),如果存在一个函数形如 $T_X(x_0) : \Omega \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$,使 $\lim_{t \rightarrow T_X(x_0)} (x_i(t, x_0) - x_j(t, x_0)) = 0$,当 $t \geq T_X(x_0)$ 时,有 $x_i(t, x_0) = x_j(t, x_0)$, $\forall i, j = 1, \cdots, N$,则多智能体系统(1)是局部有限时间一致的.若 $\Omega = D = \mathbb{R}^n$,则系统为全局有限时间一致的.

对于有限时间跟踪问题,将领导者的状态作为期望的同步轨迹,其模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_{0,1} = x_{0,2}, \\ \dot{x}_{0,2} = u_0, \end{cases} \quad (2)$$

其中 u_0 是关于时间的连续函数.

定义 2 对于系统(1)和系统(2),如果存在一个函数形如 $T_X(x_0) : \Omega \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$,使 $\lim_{t \rightarrow T_X(x_0)} (x_i(t, x_0) - x_0(t, x_0)) = 0$,当 $t \geq T_X(x_0)$ 时,有 $x_i(t, x_0) = x_0(t, x_0)$, $\forall i = 1, \cdots, N$,若 $\Omega = D = \mathbb{R}^n$,则称智能体系统(1)在有限时间内跟踪领导者智能体系统(2).

2.2 预备知识

本文中,使用无向图 $G = (V, E, A)$ 描述智能体之间的相互通信,其中 $V = \{v_1, \cdots, v_N\}$ 为智能体的集合, $E \subseteq V \times V$ 为边的集合, $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是权重因子 $a_{ij} \geq 0$ 的邻接矩阵.如果任意两个智能体之间都存在一条路径,则无向图 G 为连通的.图 G 的Laplacian矩阵为 $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$,其中: $l_{ii} = \sum_{i \neq j} a_{ij}$, $l_{ij} = -a_{ij}$, $i \neq j$.

令 $B = \text{diag}\{b_1, \cdots, b_N\}$ 表示跟随者与领导者之间的通信连接,其中 $b_i > 0$ 表示跟随者 i 直接获得领导者的信息,否则 $b_i = 0$,令 $H = L + B$.

齐次性质是研究有限时间一致性和跟踪的有效工具.考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad (3)$$

符号 U_0 表示包含原点的开环邻域,向量函数 $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 连续,且 $f(0) = 0$.

定义 3^[10] 若对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $(r_1, r_2, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}^n$,其中 $r_i > 0(i = 1, \cdots, n)$, $f(x)$ 满足

$$f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{\kappa + r_i} f_i(x),$$

其中 $\kappa \geq -\max\{r_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$,则称 $f(x)$ 是关

于 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ 的具有齐次度 κ 的齐次函数. 此外, 若函数 $f(x)$ 是齐次的, 则系统(3)是齐次的.

引理 1^[21] 考虑如下的系统:

$$\dot{\xi} = f(\xi) + \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

其中 $f(\xi)$ 是关于 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ 的具有齐次度 $\kappa < 0$ 的齐次函数, 且 $\hat{f}(\xi)$ 满足 $\hat{f}(0) = 0$. 假设 $\xi = 0$ 是系统 $\dot{\xi} = f(\xi)$ 渐进稳定平衡点, 若下式成立:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{f}_i(\varepsilon^{r_1} \xi_1, \dots, \varepsilon^{r_n} \xi_n)}{\varepsilon^{\kappa+r_i}} = 0, \quad \forall \xi \neq 0,$$

则 $\xi = 0$ 是系统(4)的局部有限时间平衡点. 此外, 如果系统(4)的稳定平衡点 $\xi = 0$ 是全局渐进稳定的平衡点, 则 $\xi = 0$ 是系统(4)的全局有限时间平衡点.

引理 2 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 饱和函数 $\tanh x$ 对任意 $b > 0$ 和 $y \neq 0$, 有 $y[\tanh(\text{sig}(x + b\text{sig}(y)^\alpha)^\eta) - \tanh(\text{sig}(x))^\eta] > 0$.

证 已知饱和函数 $\tanh(x)$ 严格单调递增, 则对于任意的 $b > 0$ 和 $y \neq 0$, $\tanh(\text{sig}(x + b\text{sig}(y)^\alpha)^\eta) - \tanh(\text{sig}(x))^\eta$ 具有与 y 相同的符号, 从而得出结论.

证毕.

3 有限时间一致控制器设计

对于无领导者的多智能体有限时间一致性问题, 通信拓扑满足以下假设.

假设 1 智能体之间的通信拓扑为无向连通图.

为了方便, 设

$$\begin{aligned} v_{i,1} &= \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_{i,1} - x_{j,1}), \\ v_{i,2} &= \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_{i,2} - x_{j,2}) \end{aligned} \quad (5)$$

为协作误差, 将用来构造控制输入 u_i .

考虑式(1)所描述的多智能体系统, 提出了如下基于相对位置和速度信息的分布式控制器:

$$\begin{aligned} u_i &= -\tanh(h_2 \text{sig}(\text{sig}(v_{i,2})^\beta + \\ &\quad \text{sig}(v_{i,1})^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $h_1, h_2 > 0$, $\beta, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ 是待决定的参数. 将控制器(6)代入系统(1), 多智能系统的闭环系统变为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,1} = x_{i,2}, \\ \dot{x}_{i,2} = -\tanh(h_2 \text{sig}(\text{sig}(v_{i,2})^\beta + \\ \quad h_1 \text{sig}(v_{i,1})^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}), \\ i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (7)$$

令 $x_1 = [x_{11}^T \dots x_{N1}^T]^T$, $x_2 = [x_{12}^T \dots x_{N2}^T]^T$. 根据系统(7), 多智能体系统可以改写为如下矩阵形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\tanh(h_2 \text{sig}(\text{sig}(Lx_2)^\beta + \\ \quad h_1 \text{sig}(Lx_1)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}), \end{cases} \quad (8)$$

其中 L 为图 G 的Laplacian矩阵.

令 $q = Mx_1$, $p = Mx_2$, 其中 $M = I - \frac{1}{N}1_N 1_N^T$, 注意到 $LM = L = ML$, 则有

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = -M \tanh(h_2 \text{sig}(\text{sig}(Lp)^\beta + \\ \quad h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}). \end{cases} \quad (9)$$

根据 M 的定义, 有 1_N 是对应单特征值0的特征向量, 1为 M 的 $N-1$ 重特征值. 有当且仅当 $x_{1,1} = x_{2,1} = \dots = x_{N,1}$ 和 $x_{1,2} = x_{2,2} = \dots = x_{N,2}$ 时, $q = 0$ 和 $p = 0$. 因此, 当且仅当 q 和 p 在有限时间内收敛到零时, 多智能体系统(1)才能实现有限时间一致.

根据文献[22], 在原点附近有 $\tanh(\text{sig}(x)^\alpha) = \text{sig}(x)^\alpha + o(\text{sig}(x)^\alpha)$, 则在原点附近系统(9)可改写为

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = -M(h_2 \text{sig}(\text{sig}(Lp)^\beta + \\ \quad h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) + f(q, p), \end{cases} \quad (10)$$

其中函数

$$\begin{aligned} f(p, q) &= -Mo(h_2 \text{sig}(\text{sig}(Lp)^\beta + \\ &\quad h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}). \end{aligned}$$

根据引理1可以得出, 如果系统(9)满足以下条件, 则系统(9)是全局有限时间稳定的:

1) 系统(9)全局渐进稳定;

2) 系统(11)是齐次度 $\kappa < 0$ 的齐次系统, 且为局部渐进稳定的:

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = -M(h_2 \text{sig}(\text{sig}(Lp)^\beta + \\ \quad h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}). \end{cases} \quad (11)$$

3) 在式(10)中满足

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon^{r_1} p, \varepsilon^{r_2} q)}{\varepsilon^{\kappa+r_2}} = 0,$$

其中: $\kappa < 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$.

基于以上分析, 得出以下定理.

定理 1 若假设1成立, 且控制器参数满足

$$h_1, h_2 > 0, \beta > 1, r_p = 1 + (p-1)\kappa, \kappa < 0,$$

则控制器(6)可使系统(1)在有限时间达到一致.

证 证明过程可分为如下3个步骤:

步骤 1 首先, 证明系统(9)的平衡点是全局渐进稳定的, 考虑如下候选Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^{Lq} \tanh^T(h_2 \text{sig}(h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) ds + \\ &\quad \frac{1}{2} p^T L p, \end{aligned} \quad (12)$$

有 $V_1 \geq 0$, 当且仅当 $Lq = 0$ 和 $p^T L p = 0$ 时等式成立. 由假设1, 有 1_N 是 L 属于单特征值0的特征向量, 又根

据 $1_N^T q = 1_N^T M x_1 = 0$. 有当且仅当 $q = 0$ 时, $Lq = 0$ 成立. 类似地, 可以得出当且仅当 $p = 0$ 时, $p^T Lp = 0$ 成立. 故 V_1 正定.

计算 V_1 时间导数得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & (L\dot{q})^T \tanh(h_2 \text{sig}(h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) + p^T L\dot{p} = \\ & p^T L \tanh(h_2 \text{sig}(h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) - \\ & p^T L \tanh(h_2 \text{sig}(\text{sig}(Lp)^\beta + \\ & h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) \leq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

根据引理2此不等式成立; 此外, 当且仅当 $Lp = 0$ 时, 等式成立. 又由 $1_N^T q = 1_N^T M x_1 = 0$ 得出 $p = 0$. 结合系统(9)有 $q = 0$ 和 $p = 0$. 根据Lasalle不变集原理可以得出, 闭环系统(9)在原点处的平衡点全局渐近稳定.

步骤2 其次, 考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = -M(h_2 \text{sig}(\text{sig}(Lp)^\beta + \\ h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}). \end{cases} \quad (14)$$

本文使用齐次系统理论证明式(14)的有限时间收敛性.

首先, 证明系统(14)在原点处的平衡点渐进稳定, 考虑如下候选Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V_2 = & \int_0^{Lq} h_2 \text{sig}^T(h_1 \text{sig}(s)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta} ds + \\ & \frac{1}{2} p^T Lp, \end{aligned} \quad (15)$$

显然 V_2 关于 q 和 p 正定.

计算 V_2 的时间导数得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & (L\dot{q})^T h_2 \text{sig}(h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta} + p^T L\dot{p} = \\ & p^T L h_2 \text{sig}(h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta} - \\ & p^T L h_2 \text{sig}(\text{sig}(Lp)^\beta + h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta} \leq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

同样, 根据Lasalle不变集原理, 可以得出系统(14)的局部渐近稳定性.

最后, 由 $r_p = 1 + (p-1)\kappa$, $r_1 = 1$, 令

$$\begin{aligned} f_1(q, p) &= p, \\ f_2(q, p) &= -M(h_2 \text{sig}(\text{sig}(Lp)^\beta + \\ & h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}), \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon^{r_1} q, \varepsilon^{r_2} p) &= \varepsilon^{r_2} p = \varepsilon^{r_1+\kappa} p = \varepsilon^{r_1+\kappa} f_1(q, p), \\ f_2(\varepsilon^{r_1} q, \varepsilon^{r_2} p) &= \\ & -M(h_2 \text{sig}(\text{sig}(\varepsilon^{r_2} Lp)^\beta + h_1 \text{sig}(\varepsilon^{r_1} Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -M(h_2 \varepsilon^{r_2\beta} \text{sig}(\text{sig}(Lp)^\beta + h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) = \\ & -\varepsilon^{r_3} M(h_2 \text{sig}(\text{sig}(Lp)^\beta + h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) = \\ & -\varepsilon^{r_2+\kappa} M(h_2 \text{sig}(\text{sig}(Lp)^\beta + h_1 \text{sig}(Lq)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) = \\ & \varepsilon^{r_2+\kappa} f_2(q, p). \end{aligned}$$

可以证明, 系统(11)是关于 (r_1, r_2) 的齐次度为 κ 的齐次函数.

步骤3 根据 $f(p, q)$ 的定义和高阶无穷小的性质, 类似于文献[9]的分析, 可以证明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon^{r_1} p, \varepsilon^{r_2} q)}{\varepsilon^{\kappa+r_2}} = 0$$

对任意的 $(q^T, p^T)^T \neq 0$ 成立.

则根据引理1, 系统(9)在原点的平衡点为全局有限时间稳定的. 又 $q = Mx_1$, $p = Mx_2$, 由此可见, 系统(1)在控制器(6)的作用下实现了全局有限时间一致.

证毕.

4 有限时间跟踪控制器设计

对于多智能体系统有限时间跟踪问题, 通信拓扑满足以下假设.

假设2 智能体之间的通信拓扑为无向连通图. 此外, 至少有一个跟随者可以访问领导者的信息.

为了方便, 本文令

$$\begin{aligned} \hat{v}_{i,1} &= \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_{i,1} - x_{j,1}) + b_i(x_{i,1} - x_{0,1}), \\ \hat{v}_{i,2} &= \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_{i,2} - x_{j,2}) + b_i(x_{i,2} - x_{0,2}). \end{aligned}$$

设计控制器如下:

$$\begin{aligned} u_i = & -\tanh(h_2 \text{sig}(\text{sig}(\hat{v}_{i,2})^\beta + \\ & h_1 \text{sig}(\hat{v}_{i,1})^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}). \end{aligned} \quad (17)$$

定义 $\tilde{x}_{i,1} = x_{i,1} - x_{0,1}$, $\tilde{x}_{i,2} = x_{i,2} - x_{0,2}$, 根据系统(1)–(2)和控制器(17), 多智能体系统变为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\tanh(h_2 \text{sig}(\text{sig}(H\tilde{x}_2)^\beta + \\ h_1 \text{sig}(H\tilde{x}_1)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}). \end{cases} \quad (18)$$

定理2 若假设2成立且控制器参数满足定理1, 则在控制器(17)的作用下, 系统(1)能够在有限时间内跟踪系统(2)的状态.

考虑以下候选Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V_3 = & \int_0^{H\tilde{x}_1} \tanh(h_2 \text{sig}(h_1 \text{sig}(s)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) ds + \frac{1}{2} \tilde{x}_2^T H \tilde{x}_2. \end{aligned} \quad (19)$$

根据假设2, 矩阵 H 正定. 由此可见, V_3 关于 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ 正定.

计算 V_3 的时间导数得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= (H\dot{\tilde{x}}_1)^T \tanh(h_2 \text{sig}(h_1 \text{sig}(H\tilde{x}_1)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) + \\ &\tilde{x}_2^T H\dot{\tilde{x}}_2 = \\ &\tilde{x}_2^T H \tanh(h_2 \text{sig}(h_1 \text{sig}(H\tilde{x}_1)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) - \\ &\tilde{x}_2^T H \tanh(h_2 \text{sig}(\text{sig}(H\tilde{x}_2)^\beta + \\ &h_1 \text{sig}(H\tilde{x}_1)^{r_2\beta})^{r_3/r_2\beta}) \leq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

根据引理2此不等式成立. 此外, 若 $\dot{V}_3 = 0$ 则 $\tilde{x}_2 = 0$, 然后结合式(18)得出 $\tilde{x}_1 = 0$. 因此, 根据Lasalle不变集原理, 系统(19)全局渐进稳定, 其余证明与定理1的证明相似, 因此将其省略.

5 仿真结果

在本节中, 仿真实例说明了所提出的控制器与现有控制器相比的优点.

考虑由系统(1)和(2)描述的多智能体跟踪系统.

图G的Laplacian矩阵如下:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

领导者与跟随者之间的通信连接为

$$B = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

假设存在4个跟随者智能体, 其初始状态分别为 $x_{1,1}=10, x_{2,1}=5, x_{3,1}=0, x_{4,1}=-5, x_{1,2}=x_{2,2}=x_{3,2}=x_{4,2}=0$. 根据控制器的稳定条件, 选择控制器参数为 $h_1=5/8, h_2=2, \kappa=-2/5, \beta=2$.

选择文献[22]和文献[25]提出的控制器进行比较, 文献[22]设计的控制器如下:

$$u_i = -k_1 \tanh(\text{sig}(\hat{v}_{i,1})^{\alpha_1}) - k_2 \tanh(\text{sig}(\hat{v}_{i,2})^{\alpha_2}),$$

其中: $k_1 > 0, k_2 > 0, 0 < \alpha_1 < 1, \alpha_2 = \frac{2}{1+\alpha_1}$. 选择控制器参数 $k_1 = k_2 = 1, \alpha_1 = 1/4, \alpha_2 = 2/5$.

文献[25]设计的控制器如下

$$u_i = -\text{sat}_{(Q,M)}[k_1 \text{sig}(\hat{v}_{i,1})^{\alpha_1} + k_2 \text{sig}(\hat{v}_{i,2})^{\alpha_2}],$$

其中: $k_1 > 0, k_2 > 0, 0 < \alpha_1 < 1, \alpha_2 = \frac{2}{1+\alpha_1}$. 饱和函数 $\text{sat}_{(Q,M)}(\cdot)$ 为

$$\text{sat}_{(Q,M)}(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq Q, \\ -(M-Q)e^{-\frac{x-Q}{(M-Q)}} + M, & x > Q, \\ (M-Q)e^{\frac{x+Q}{(M-Q)}} - M, & x < -Q. \end{cases}$$

选择控制器参数 $k_1 = k_2 = 1, \alpha_1 = 1/4, \alpha_2 = 2/5, Q = 0.5, M = 1$.

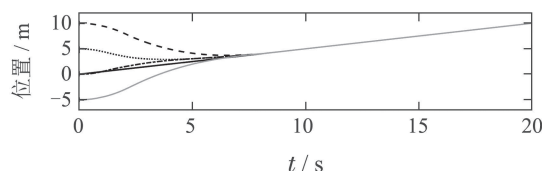
针对两种不同的领导者的状态, 分别给出以下两

组仿真实例.

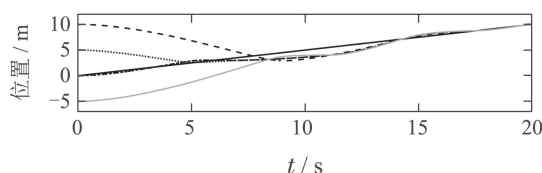
仿真实例 1 当领导者的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_{0,1} = x_{0,2}, \\ \dot{x}_{0,2} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

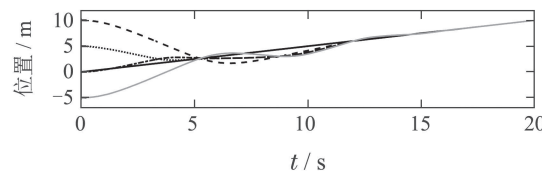
其中初始状态为 $[0; 0.5]$, 仿真结果如图1和图2所示.



(a) 本文控制器



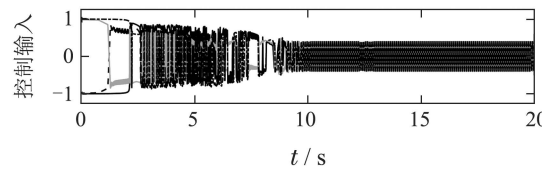
(b) 文献[22]控制器



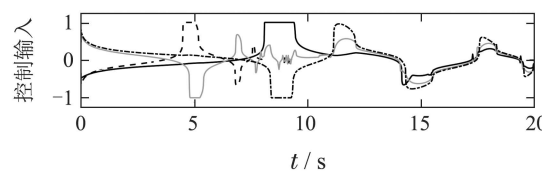
(c) 文献[25]控制器

图 1 系统的状态响应曲线

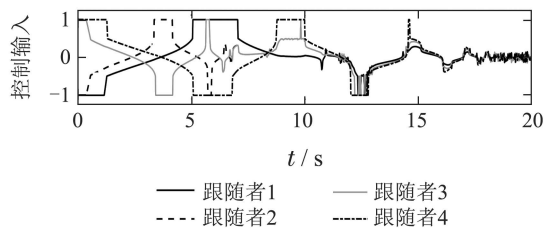
Fig. 1 The state response of system



(a) 本文控制器



(b) 文献[22]控制器



(c) 文献[25]控制器

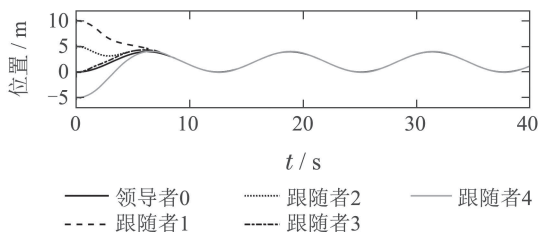
图2 控制器的输入曲线

Fig. 2 The input of controller

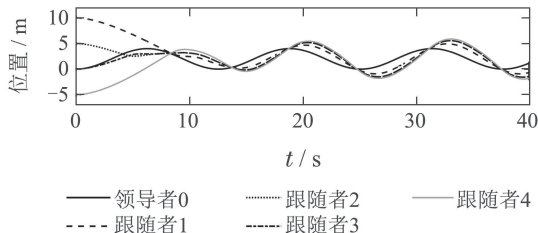
仿真实例2 当领导者的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_{0,1} = x_{0,2}, \\ \dot{x}_{0,2} = 0.5\cos(0.5t), \end{cases} \quad (22)$$

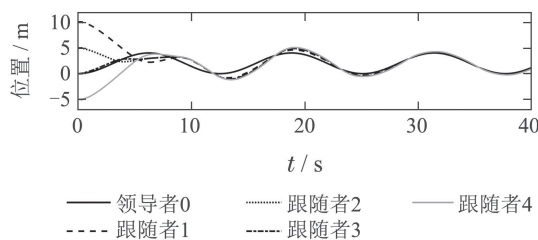
其中初始状态为[0; 0], 仿真结果如图3和图4所示.



(a) 本文控制器



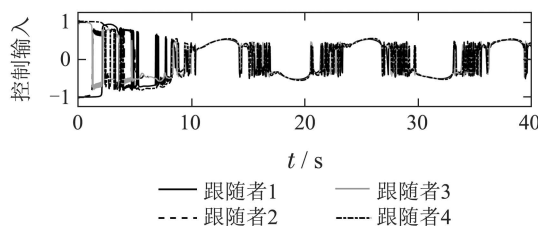
(b) 文献[22]控制器



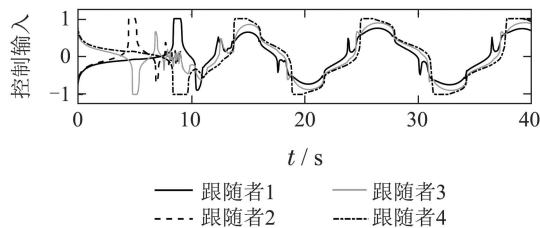
(c) 文献[25]控制器

图3 系统的状态响应曲线

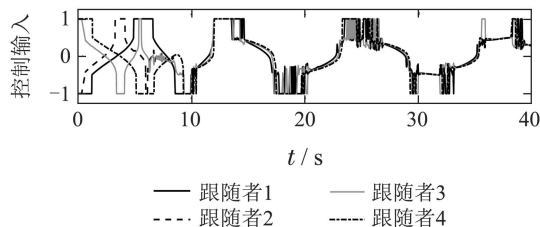
Fig. 3 The state response of system



(a) 本文控制器



(b) 文献[22]控制器



(c) 文献[25]控制器

图4 控制器的输入曲线

Fig. 4 The input of controller

从图1可以看出,当领导者的状态为系统(21)形式时,在本文提出的控制器作用下,跟随者智能体系统(1)在有限时间内跟踪领导者的状态,且相较于文献[22]和文献[25]提出的控制器本文提出的控制器能在较短的时间内实现跟踪任务.图2显示本文提出的控制器的输入在任何时间都满足输入饱和约束.而文献[22]和文献[25]提出的控制器,控制器出现多次饱和,导致控制系统性能的下降.

类似的,从图3可以看出,当领导者的状态为系统(22)形式时,在本文提出的控制器作用下,跟随者智能体系统(1)在有限时间内跟踪领导者的状态.图4显示本文提出的控制器在任何时间都满足输入饱和约束.

6 结论

本文研究了输入饱和约束下的多智能体系统的有限时间一致性和跟踪问题.通过引入双曲正切函数和嵌套齐次函数来解决输入饱和问题,降低了控制器设计的复杂性,通过使用单饱和函数,解决了饱和度在控制器的位置和速度反馈项中分配不一致的问题.最后,通过仿真实验验证了当多智能体系统存在输入饱和约束时,提出的控制器相对现有控制器能以较快的收敛速度实现一致和跟踪任务.

参考文献:

- [1] LIU Yang, JING Yuanwei, LIU Xiaoping, et al. Survey on finite-time control for nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 37(1): 1–12.
(刘洋, 井元伟, 刘晓平, 等. 非线性系统有限时间控制研究综述. *控制理论与应用*, 2020, 37(1): 1–12.)
- [2] WANG L, XIAO F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950–955.

- [3] LIU X, JAMES L, YU W, et al. Finite-time consensus of multiagent systems with a switching protocol. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 27(4): 853 – 862.
- [4] LI C, QU Z. Distributed finite-time consensus of nonlinear systems under switching topologies. *Automatica*, 2014, 50(6): 1626 – 1631.
- [5] LIN X, ZHENG Y. Finite-time consensus of switched multiagent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 47(7): 1535 – 1545.
- [6] YU S, LONG X. Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with disturbances by integral sliding mode. *Automatica*, 2015, 54: 158 – 165.
- [7] JIANG Yutao, LIU Zhongxin, CHEN Zengqiang. Distributed finite-time consensus algorithm for multiple nonholonomic mobile robots with disturbances. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(5): 737 – 745.
(姜玉涛, 刘忠信, 陈增强. 带扰动的多非完整移动机器人分布式有限时间一致性控制. 控制理论与应用, 2019, 36(5): 737 – 745.)
- [8] DU H, HE Y, CHENG Y. Finite-time synchronization of a class of second-order nonlinear multi-agent systems using output feedback control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers*, 2014, 61(6): 1778 – 1788.
- [9] MENG Z, LIN Z. On distributed finite-time observer design and finite-time coordinated tracking of multiple double integrator systems via local interactions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(16): 2473 – 2489.
- [10] LI Z, JI H. Finite-time consensus and tracking control of a class of nonlinear multiagent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(12): 4413 – 4420.
- [11] ZHAO Y, DUAN Z, WEN G. Distributed finite-time tracking for a multi-agent system under a leader with bounded unknown acceleration. *Systems & Control Letters*, 2015, 81: 8 – 13.
- [12] LIN Z. Control design in the presence of actuator saturation: from individual systems to multi-agent systems. *Science China Information Sciences*, 2019, 62(2): 195 – 197.
- [13] WANG Q, YU C, GAO H. Synchronization of identical linear dynamic systems subject to input saturation. *Systems & Control Letters*, 2014, 64: 107 – 113.
- [14] GAO F, YUAN Y, WU Y. Finite-time stabilization for a class of nonholonomic feedforward systems subject to inputs saturation. *ISA Transactions*, 2016, 64: 193 – 201.
- [15] ZOU A, KUMAR K D. Finite-time attitude control for rigid spacecraft subject to actuator saturation. *Nonlinear Dynamic*, 2019, 96: 1017 – 1035.
- [16] ZHANG A, ZHOU D, YANG M, et al. Finite-time formation control for unmanned aerial vehicle swarm system with time-delay and input saturation. *IEEE Access*, 2018, 7: 5853 – 5864.
- [17] GAO F, ZHU X, WU Y, et al. Reduced-order observer-based saturated finite-time stabilization of high-order feedforward nonlinear systems by output feedback. *ISA Transactions*, 2019, 93: 70 – 79.
- [18] YIN J L, KHOO S Y, MAN Z H. Finite-time stability theorems of homogeneous stochastic nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 2017, 100: 6 – 13.
- [19] CHENG Yingying, DU Haibo, HE Yigang. Finite-time attitude stabilization of rigid spacecraft under input saturation. *Control and Decision*, 2015, 30(8): 1386 – 1392.
(程盈盈, 都海波, 何怡刚. 输入饱和受限下的刚体飞行器姿态系统的有限时间镇定. 控制与决策, 2015, 30(8): 1386 – 1392.)
- [20] HONG Y, HUANG J, XU Y. On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(2): 305 – 309.
- [21] HONG Y. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems. *Systems & Control Letters*, 2002, 46(2): 231 – 236.
- [22] ZHAO Y, DUAN Z, WEN G. Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with saturated control protocols. *IET Control Theory and Applications*, 2014, 9(3): 312 – 319.
- [23] GAO T, HUANG J, ZHOU Y, et al. Finite-time consensus control of second-order nonlinear systems with input saturation. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2016, 38(11): 1381 – 1391.
- [24] SU Y, ZHENG C, MERCORELLI P. Global Finite-time stabilization of planar linear systems with actuator saturation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2017, 64(8): 947 – 951.
- [25] FU J, WEN G, YU W. Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with input saturation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2018, 65(11): 1758 – 1762.
- [26] ZHANG Z, ZUO Z, WANG Y. Finite-time consensus of neutrally stable multi-agent systems in the presence of input saturation. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(2): 894 – 907.

作者简介:

孙新勇 硕士研究生, 目前研究方向为多智能体协同控制, E-mail: sunxinyo@163.com;

吴杰 博士, 副教授, 目前研究方向为车辆噪声与振动控制, E-mail: jiewu@scut.edu.cn;

侯至丞 博士, 高级工程师, 目前研究方向为分布式多机器人系统建模、仿真与控制, E-mail: zc.hou@giat.ac.cn;

张弓 博士, 高级工程师, 目前研究方向为机电液混合驱动技术, E-mail: gong.zhang@giat.ac.cn;

杨文林 博士, 高级工程师, 目前研究方向为移动机器人机构优化与设计, E-mail: wl.yang@giat.ac.cn;

韩彰秀 教授, 韩国工程院院士, 目前研究方向为工业机器人及医疗康复机器人, E-mail: cshan@hanyang.ac.kr.