

一类机械臂系统自适应有限时间有界 H_∞ 跟踪控制

李小华^{1†}, 杨瑞芳, 刘辉, 何帅

(辽宁科技大学 电子与信息工程学院, 辽宁 鞍山 114051)

摘要: 考虑一种电机驱动的单连杆机械臂系统在受到输出约束时的自适应有限时间 H_∞ 跟踪控制问题. 一个有限时间有界 H_∞ 性能的新概念被提出, 并结合障碍Lyapunov函数(barrier Lyapunov function, BLF)、神经网络自适应技术、有限时间控制理论和 H_∞ 控制理论, 提出了一种该系统在输出受限条件下的自适应神经有限时间有界 H_∞ 跟踪控制器设计方法, 避免了许多有限时间控制文献中控制器设计时出现的奇点问题, 实现了该机械臂系统的有限时间有界 H_∞ 轨迹跟踪控制. 所设计的控制器保证了系统跟踪误差能够被约束在预先给定的范围内, 并且所有状态能在有限时间内收敛到平衡状态的邻域内, 同时对外部扰动具有 H_∞ 性能. 仿真结果验证了所设计控制器的有效性和优越性.

关键词: 电机驱动单连杆机械臂系统; 障碍Lyapunov函数(BLF); 有限时间控制; 有界 H_∞ 控制; 自适应控制; 跟踪控制

引用格式: 李小华, 杨瑞芳, 刘辉, 等. 一类机械臂系统自适应有限时间有界 H_∞ 跟踪控制. 控制理论与应用, 2020, 37(x): xxx – xxx

DOI: 10.7641/CTA.2020.00024

Adaptive finite-time bounded- H_∞ tracking control for a class of manipulator system

LI Xiao-hua^{1†}, YANG Rui-fang, LIU Hui, HE Shuai

(School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan Liaoning 114051, China)

Abstract: The adaptive finite-time H_∞ tracking control problem is considered for a motor-driven single-link manipulator system with output constraint in this paper. A new concept on finite-time bounded- H_∞ performance is proposed. And a design method for adaptive neural finite-time bounded- H_∞ tracking controller of the manipulator system with output constraint is given by combining barrier Lyapunov function, neural network adaptive technique, finite-time control theory with H_∞ control theory. The singularity problem emerged in many references with regard to finite time control is avoided when the controller is designed. The purpose of finite-time bounded- H_∞ trajectory tracking control for the manipulator system is achieved. The designed controller can guarantee that the tracking error of the system is constrained by predefined boundary, and all the system states can converge into the neighborhood of the equilibrium state within a finite time. The influence of external disturbances can be attenuated by H_∞ performance at the same time. The simulation results verify the effectiveness and superiority of the designed controller.

Key words: motor-driven single-link manipulator system; barrier Lyapunov function(BLF); finite-time control; bounded- H_∞ control; adaptive control; tracking control

Citation: LI Xiaohua, YANG Ruifang, LIU Hui, et al. Adaptive finite-time bounded- H_∞ tracking control for a class of manipulator system. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(x): xxx – xxx

1 引言

机械臂是一种高度复杂的时变耦合动力学特性的非线性系统, 存在测量或建模的不精确性, 并常常受到系统负载变化和外部扰动的影响. 目前, 对于机械臂跟踪控制问题的研究已经有了很多成果^[1-13]. 主要分

为下面几类. 其一是基于PID的跟踪控制. 文献[1-2]针对参数已知的系统模型采用PID方法研究了刚性机械臂的跟踪控制问题. 文献[3]针对系统中的未知因素研究了同类机械臂的PID自学习跟踪控制. 文献[4]为了提高机器臂轨迹跟踪控制器的工作性

收稿日期: xxxx-xx-xx; 录用日期: xxxx-xx-xx.

[†]通信作者. E-mail: lixiaohua6412@163.com; Tel.: +86 412-5929712.

本文责任编辑:

辽宁省自然科学基金项目(20180550319), 辽宁省博士启动基金项目(2019-BS-126)资助.

Supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province (20180550319) and the PhD Research Foundation of Liaoning Province (2019-BS-126).

能,提出基于增强学习的机械臂轨迹跟踪控制方法,利用PD控制器完成了基本的稳定任务后,再利用增强学习算法实现了对未知干扰因素的补偿,提升了对不同未知情况的适应能力.第二类是基于自适应方法的跟踪控制,文献[5]针对机械臂系统惯性参数及运动学参数不能准确测量进而影响轨迹跟踪性能的问题,利用神经网络自适应方法设计了系统的鲁棒控制律和自适应律,实现了一种任务空间自适应轨迹跟踪控制.文献[6]提出一种系统参数在线估计的自适应滑模跟踪控制方法,解决了系统中的参数不确定问题,保证了良好的跟踪效果.第三类是基于Backstepping技术的跟踪控制设计,采用神经网络或模糊逻辑系统对系统中未知及不确定因素进行在线逼近,去设计机械臂系统的跟踪控制器^[7-9].还有一类是基于鲁棒控制方法的机械臂跟踪控制研究^[10-13].其中文献[11]针对一类具有外部干扰的电机驱动移动机械臂系统给出了一种鲁棒动态输出反馈跟踪控制方法,实现了系统的自适应跟踪控制.文[12]提出了一种基于神经网络的 H_∞ 控制策略,该控制器能保证机械臂系统对外部干扰具有 H_∞ 干扰抑制性能.文[13]中提出了一种自适应鲁棒补偿控制算法,保证了系统存在建模误差和外部干扰时的稳定性和动态性能.

在实际机械臂应用中,许多系统要求的操作时间很短,所以控制机械臂系统在有限时间内达到控制目标是非常重要的.文[14]首次提出非线性系统李雅普诺夫有限时间稳定判据,文[15]则根据这个判据形式由Backstepping方法获得了一种非完整轮式移动机械臂的有限时间跟踪控制器.可使得系统状态在有限时间内收敛到平衡点,但这类研究在控制器设计时,一般要求的条件较为苛刻,而且设计过程也较为繁琐.而文献[16]则去掉了对系统参量的约束条件,研究了一类单输入单输出非线性系统的实际有限时间控制问题,即研究控制规律使系统在有限时间内收敛到平衡点附近的一个邻域内.该文获得了系统半全局实际有限时间稳定的李雅普诺夫判据.文献[17]则利用该判据研究了一种不确定机械臂系统的实际有限时间神经网络跟踪控制,但该系统的模型中没有考虑外部干扰的影响,且在其有限时间控制设计中虚拟控制求导时存在奇点问题.目前,尚未见到针对电机驱动的单连杆机械臂系统的实际有限时间 H_∞ 跟踪控制问题的研究报道.

为了防止机械臂运动幅度过大而导致系统损坏及一些潜在的危害,研究输出约束环境下机械臂的控制设计有着重要的实际意义.文献[18-20]研究了机械臂在输出约束下的轨迹跟踪控制.利用BLF方法,结合Backstepping技术在输出受限空间中设计了系统的自适应跟踪控制器,保证了输出在满足约束条件的前提下实现了对参考轨迹的跟踪.从以上文献可知,已

有很多成果解决了机械臂系统的输出受限控制问题,但在这些成果中未见同时解决实际有限时间输出受限的 H_∞ 控制问题的研究.

由于鲁棒 H_∞ 控制方法能够有效处理系统外部干扰的影响,结合有限时间控制,近年来已有很多有限时间 H_∞ 控制方面的研究成果^[21-22].文献[21-22]利用Backstepping方法,提出了一类不确定机械臂系统的有限时间 H_∞ 跟踪控制方法,实现了较高精度的轨迹跟踪.但以上方法只有在系统为渐进稳定时才能设计 H_∞ 控制器.为了使系统在有界稳定时也能对外部扰动具有较好的抑制作用,文献[23]首次提出了有界 H_∞ 控制方案,保证了受控系统在有界稳定的条件下同时对外部干扰具有 H_∞ 性能.据查,目前还没有发现对于机械臂系统在有界稳定情况下的实际有限时间 H_∞ 控制研究成果.

受上述分析启发,本文利用BLF方法结合神经网络自适应技术,实际有限时间控制理论和 H_∞ 控制理论,首次提出一种电机驱动单连杆机械臂在输出受限下的自适应神经有限时间有界 H_∞ 跟踪控制器设计方法.所设计的控制器能够在有限时间内实现机械臂对参考轨迹的实际跟踪,同时保证了系统输出限制在给定的任务空间内,并且能抑制外部扰动对系统的影响.最后,仿真例子验证了所设计控制器的有效性和优越性.

本文主要创新点为:1)首次将实际有限时间控制理论与 H_∞ 控制理论相结合,给出一个有限时间有界 H_∞ 性能的新概念,解决了机械臂系统在输出受限下的自适应神经实际有限时间 H_∞ 跟踪控制问题,并获得了该系统的自适应神经网络实际有限时间有界 H_∞ 跟踪控制器.2)本文通过一个加减项的数学技巧,并在每步虚拟控制器设计时使用神经网络处理,避免了在许多文献中有限时间控制器设计时出现的奇点问题,使实际有限时间控制设计更加合理化.本文研究发现,这样的控制器会使系统具有很强的抗外部干扰能力.3)文中同时考虑了外力及电机电压双重外部干扰对机械臂系统的影响,更具有实际意义.

2 系统描述

考虑一类电机驱动单连杆机械臂,其系统的数学模型是^[18]:

$$\begin{cases} \bar{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(q, \dot{q}) + G(q) = \tau + \tau_e, \\ \tau = K_m I, \\ L\dot{I} + RI + K_e \dot{q} = V + V_e. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\bar{M}(q)$ 是其惯性量; $C(q, \dot{q})$ 代表离心力和科氏力; $F(q, \dot{q})$ 代表摩擦力; $G(q)$ 代表重力; τ 是关节力矩; τ_e 表示外界环境施加在机械臂末端的扰动力矩; $K_m = KN$ 表示电流和产生力矩之间的系数, K 表示力矩常数, N 表示关节的减速比. q, \dot{q}, \ddot{q} 分别表示连

杆的角位置、速度和加速度; L 为电枢电感; I 为电机电流; R 为电路电阻; K_e 为电机的反电动势常数; V 为输入电压; V_e 是外部环境对电压的扰动. 注意(1)中的第1个方程代表机械臂系统模型, 其中不要求模型函数 $\bar{M}(q)$, $C(q, \dot{q})$, $F(q, \dot{q})$ 以及 $G(q)$ 已知; 第3个子系统代表直流电机驱动器模型, 不要求参数已知.

此模型的优势在于伺服控制设计中额外考虑了驱动电机的动力学模型, 可得到控制信号直接为输入电压, 因而可降低电动机力矩环控制的要求.

为了控制设计方便, 令 $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, $x_3 = I$, 则该单连杆机械臂系统模型可以描述为如下的三阶非线性系统.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{-C(x_1, x_2) - F(x_1, x_2) - G(x_1)}{\bar{M}(x_1)} + \frac{K_m}{\bar{M}(x_1)} x_3 + \frac{\tau_e}{\bar{M}(x_1)}, \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{L} V + \frac{-R x_3 - K_e x_2}{L} + \frac{1}{L} V_e. \end{cases} \quad (2)$$

为方便控制系统设计, 式(2)可以表示为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = g_2(\bar{x}_2) x_3 + f_2(\bar{x}_2) + \varpi_2, \\ \dot{x}_3 = g_3(\bar{x}_3) u + f_3(\bar{x}_3) + \varpi_3, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} f_2(\bar{x}_2) &= \frac{-C(x_1, x_2) - F(x_1, x_2) - G(x_1)}{\bar{M}(x_1)}, \\ f_3(\bar{x}_3) &= \frac{-R x_3 - K_e x_2}{L}, g_2(\bar{x}_2) = \frac{K_m}{\bar{M}(x_1)}, \\ g_3(\bar{x}_3) &= \frac{1}{L}, \varpi_2 = \frac{\tau_e}{\bar{M}(x_1)}, \varpi_3 = \frac{1}{L} V_e, \end{aligned}$$

且 $\varpi_2(t), \varpi_3(t) \in L_2[0, T]$.

假设 1 函数 $g_i(\bar{x}_i)$ ($i = 1, 2, 3$) 的符号已知, 并且存在未知正常数 b_m 使得 $0 < b_m \leq |g_i(\bar{x}_i)|$. 不失一般性, 假设 $g_i(\bar{x}_i) > 0$.

假设 2 参考输入 y_r 及其各阶导数是已知函数而且连续有界.

3 预备知识

为了得到本文的结果, 先给出如下定义和引理.

定义 1^[24] 考虑如下非线性系统

$$\dot{x} = f(x). \quad (4)$$

其中 x 是状态向量; $f(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个在平衡点的开邻域 Ω 上连续的函数, 并且满足 $f(0) = 0$. 如果当 $t \geq T(x_0)$ 时, 对任何初始条

件 $x(0) = x_0$ 都有 $\|x\| \leq \beta_1$, 其中 $\beta_1 > 0$ 是一个常数, $0 \leq T(x_0) < \infty$ 为系统的停息时间, 则系统(4)是半全局实际有限时间稳定(semi-global practical finite-time stability, SGPFS)的.

引理 1^[25] 对于 $l_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 和实数 $\gamma \in (0, 1)$, 下面不等式成立.

$$(|l_1| + \dots + |l_n|)^\gamma \leq |l_1|^\gamma + \dots + |l_n|^\gamma. \quad (5)$$

引理 2^[16] 考虑非线性系统(4). 假设存在定义在 $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 初始邻域内的 C^1 函数 $V(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 和实数 $\varphi > 0$, $0 < \lambda < 1$, $0 < \beta < \infty$, 如果 $V(x)$ 和 $V(0) = 0$ 在 Ω 上是正定的, 下列不等式成立.

$$\dot{V}(x) \leq -\varphi V^\lambda(x) + \beta. \quad (6)$$

则系统(4)的轨迹是SGPFS的. 其停息时间满足

$$T(x_0) = \frac{1}{(1-\lambda)\theta_0\varphi} [V^{1-\lambda}(x(0)) - \left(\frac{\beta}{(1-\theta_0)\varphi}\right)^{(1-\lambda)/\lambda}]. \quad (7)$$

其中 $0 < \theta_0 \leq 1$ 是一个常数.

推论 1 考虑非线性系统(4), 对于任意给定的正定、径向无界、连续的Lyapunov函数 $V(x) \in C^2$, 若存在辅助函数 $\bar{V}(x) = V(x) + k_0$, 其中 $k_0 > 0$, 且有

$$\dot{\bar{V}}(x) \leq -\varphi \bar{V}^\lambda(x) + \beta.$$

则系统(4)是SGPFS的.

证 由 $\dot{\bar{V}}(x) \leq -\varphi \bar{V}^\lambda(x) + \beta$, 可得到

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}}(x) &= (V(x) + k_0)' = \dot{V}(x), \\ &\leq -\varphi(V(x) + k_0)^\lambda + \beta. \end{aligned}$$

根据引理1进一步有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -\varphi V^\lambda(x) - \varphi k_0^\lambda + \beta, \\ &\leq -\varphi V^\lambda(x) + \beta. \end{aligned}$$

因此, 满足引理2, 即推论条件成立时系统是SGPFS的.

证毕

定义 2 对于非线性系统(3), 如果: 1) 对于任意的初始状态, 存在一个连续可导函数 $V(x(0)) > 0$ 满足 $\dot{V}(x) \leq -\varphi V^\lambda(x) + \beta$; 2) 不等式(8)成立,

$$\int_0^t \|z_1(s)\|^2 ds \leq V(x(0)) + \gamma^2 \int_0^t \|\varpi(s)\|^2 ds. \quad (8)$$

则系统(3)满足有限时间有界H_∞性能指标. (8)式即为判据指标. 其中 φ, β 均为正实数; z_1 表示系统跟踪误差, $\varpi(t) \in L_2[0, T]$ 是非零外部干扰, γ 为干扰抑制系数.

引理 3^[27] 对于任意实数 $\varepsilon > 0$, 下面不等式成立.

$$xy \leq \frac{\varepsilon^p}{p} |x|^p + \frac{1}{q\varepsilon^q} |y|^q, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (9)$$

其中 $p > 1, q > 1$ 为常数且满足 $(p-1)(q-1) = 1$.

引理 4^[16] 对于任意实数 m, n 和任意实向量 ϕ, ψ , 下列不等式成立.

$$|\phi|^m |\psi|^n \leq \frac{m}{m+n} w |\phi|^{m+n} + \frac{n}{m+n} w^{-m/n} |\psi|^{m+n}. \quad (10)$$

引理 5^[20] 若 $|x| < a, a > 0$, 则 $\ln \frac{a^2}{a^2 - x^2} \leq \frac{x^2}{a^2 - x^2}$.

引理 6^[26] (Gronwall不等式) 假设 x, ψ, χ 在 $t \in [a, b]$ 上是实连续函数, 且 $\chi(t) \geq 0$, 如果

$$x(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)x(s)ds. \quad (11)$$

则有

$$x(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{\int_s^t x(\mu)d\mu} ds. \quad (12)$$

在本文中, 利用RBF神经网络(RBFNN)在线逼近未知非线性函数 $f(Z)$, 即:

$$f(Z) = W^T S(Z). \quad (13)$$

其中 $Z \in \Xi \subset \mathbb{R}^m$ 为紧集 Ξ 上的输入向量; m 为输入维数; $W = [W_1, W_2, \dots, W_l]^T \in \mathbb{R}^l$ 是神经网络的权向量; $l > 1$ 是神经网络节点数; $S(Z) = [s_1(Z), s_2(Z), \dots, s_l(Z)]^T \in \mathbb{R}^l$ 是基函数向量, $s_i(Z)$ 被选为高斯函数. 即

$$s_i(Z) = \exp \left[-\frac{(Z - \mu_i)^T (Z - \mu_i)}{v_i^2} \right]. \quad (14)$$

其中 $\mu_i (i = 1, 2, \dots, l)$ 为基函数的中心, v_i 为高斯函数的宽度. 只要采用足够多的节点数 l , RBFNN能够逼近在紧集 $\Xi \subset \mathbb{R}^m$ 上任意连续函数 $f(Z)$. 即

$$f(Z) = W^{*T} S(Z) + \delta(Z), \forall Z \in \Xi \subset \mathbb{R}^m. \quad (15)$$

其中 W^{*T} 是理想的常数权向量, 它被定义为

$$W^* = \arg \min_{W \in \mathbb{R}^l} \left\{ \sup_{Z \in \Xi} |f(Z) - W^T S(Z)| \right\}.$$

$\delta(Z)$ 是逼近误差且满足 $|\delta| \leq \varepsilon$, 这里 ε 为有界正常数.

本文的控制目标是: 针对一种电机驱动的单连杆机械臂系统, 用Backstepping方法设计一种具有输出受限的自适应有限时间有界 H_∞ 跟踪控制器, 使得: 1) 在模型参数不确定的情况下实现机械臂的末端关节在受限空间中对目标轨迹的准确跟踪; 2) 保证系统的跟踪误差能够在有限时间内收敛到平衡点附近, 并且所有信号是SGPFS的; 3) 机械臂系统(3)满足有限时

间有界 H_∞ 性能指标.

为了简化推导过程, 函数 $f_i(\bar{x}_i), g_i(\bar{x}_i)$ 以及一些相关的函数被简写为 f_i, g_i 等.

4 控制器设计

下面给出机械臂系统输出受限下的自适应有限时间有界 H_∞ 控制器的设计过程. 取如下的坐标变换:

$$z_i(t) = x_i(t) - \alpha_{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_r^{(i-1)}, \hat{\theta}_i). \quad (16)$$

其中 $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ 是系统的虚拟控制律, $\alpha_0 = y_r(t), \bar{y}_r^{(i-1)} = [y_r(t), \dot{y}_r(t), \dots, y_r^{(i-1)}(t)]^T, \hat{\theta}_i$ 是未知参数 θ_i 的估计值, θ_i 被定义为

$$\theta_1 = \|W_1^*\|^2. \quad (17)$$

$$\theta_i = \frac{1}{b_m} \|W_i^*\|^2, i = 2, 3. \quad (18)$$

步骤 1 根据坐标变换(16), 可得系统(3)的第1个误差子系统

$$\dot{z}_1 = x_2 - \dot{y}_r.$$

选择Lyapunov函数为

$$V_1 = \frac{b_m}{2} \ln \frac{k_{b1}^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} + \frac{b_m}{2r_1} \tilde{\theta}_1^2. \quad (19)$$

其中 $r_1 > 0$ 为设计参数. 对 V_1 求导

$$\dot{V}_1 = \frac{b_m z_1}{k_{b1}^2 - z_1^2} (z_2 + \alpha_1 - \dot{y}_r) - \frac{b_m}{r_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\theta}_1. \quad (20)$$

根据引理3, 有

$$\frac{b_m}{k_{b1}^2 - z_1^2} z_1 z_2 \leq \frac{b_m z_1^2}{2(k_{b1}^2 - z_1^2)} + \frac{b_m z_2^2}{2(k_{b1}^2 - z_1^2)}. \quad (21)$$

将式(21)代入式(20), 并且通过两个加减项可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & \frac{b_m z_1}{k_{b1}^2 - z_1^2} (\bar{f}_1(Z_1) + \alpha_1) + \frac{b_m z_2^2}{2(k_{b1}^2 - z_1^2)} - \\ & \frac{b_m}{r_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\theta}_1 - c_1 \frac{z_1^{2\lambda}}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^\lambda} - z_1^2. \end{aligned} \quad (22)$$

其中 c_1 为任意正实数, 函数

$$\bar{f}_1(Z_1) = \frac{1}{2} z_1 - \dot{y}_r + \frac{c_1 z_1^{2\lambda-1}}{b_m (k_{b1}^2 - z_1^2)^{\lambda-1}} + \frac{(k_{b1}^2 - z_1^2)}{b_m} z_1.$$

其中 $Z_1 = [z_1, \dot{y}_r]^T$. 这里采用RBF神经网络对 $\bar{f}_1(Z_1)$ 进行估计. 根据式(15)有

$$\bar{f}_1(Z_1) = W_1^{*T} S_1(Z_1) + \delta_1(Z_1), |\delta_1(Z_1)| \leq \varepsilon_1.$$

注 1 这里 $\bar{f}_1(Z_1)$ 这样处理是由于在后面进行有限时间控制设计时可避免在虚拟控制律 α_1 中出现 $c_1 \frac{z_1^{2\lambda-1}}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^{\lambda-1}}$, 从而在对其求导时会出现奇点问题.

利用引理3和式(17)有

$$\begin{aligned} \frac{b_m z_1}{k_{b1}^2 - z_1^2} \bar{f}_1(Z_1) &= \frac{b_m z_1}{k_{b1}^2 - z_1^2} (W_1^{*T} S_1(Z_1) + \delta_1), \\ &\leq \frac{b_m}{2a^2 (k_{b1}^2 - z_1^2)^2} z_1^2 \theta_1 S_1^T(Z_1) S_1(Z_1) + \end{aligned}$$

$$\frac{b_m}{2}a^2 + \frac{b_m}{2\bar{\gamma}^2} \left(\frac{z_1}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^2 + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2\varepsilon_1^2. \quad (23)$$

其中 $\bar{\gamma} > 0$, $a > 0$ 为设计参数. 选择虚拟控制律为:

$$\alpha_1 = -k_1 \frac{z_1}{(k_{b1}^2 - z_1^2)} - \frac{1}{2a^2(k_{b1}^2 - z_1^2)} z_1 \hat{\theta}_1 S_1^T S_1 - \frac{z_1}{2\bar{\gamma}^2(k_{b1}^2 - z_1^2)}. \quad (24)$$

将式(23), (24)代入(22)并整理, 则式(25)成立.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -k_1 b_m \frac{z_1^2}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} - c_1 \left(\frac{z_1^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - z_1^2 + \\ & \frac{b_m}{2}a^2 + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2\varepsilon_1^2 + \frac{b_m}{2a^2(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} z_1^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 + \\ & \frac{b_m z_1^2}{2(k_{b1}^2 - z_1^2)} - \frac{b_m}{r_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\theta}_1. \end{aligned} \quad (25)$$

步骤 2 利用坐标变换方程 $z_2 = x_2 - \alpha_1$, 则系统(3)的第2个子系统为

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= g_2 x_3 + f_2 + \varpi_2 - \dot{\alpha}_1, \\ &= g_2 z_3 + g_2 \alpha_2 + f_2 + \varpi_2 - \dot{\alpha}_1. \end{aligned}$$

其中 $\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\theta}_1 + \sum_{j=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r^{(j)}} y_r^{(j+1)}$. 选取Lyapunov函数为

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{b_m}{2r_2} \tilde{\theta}_2^2. \quad (26)$$

其中 $r_2 > 0$ 为设计参数. 对 V_2 求导并结合式(25)有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -k_1 b_m \frac{z_1^2}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} - c_1 \left(\frac{z_1^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - \\ & z_1^2 + \frac{b_m}{2}a^2 + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2\varepsilon_1^2 + \frac{b_m z_1^2}{2(k_{b1}^2 - z_1^2)} - \\ & \sum_{j=1}^2 \frac{b_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\theta}_j + \frac{b_m}{2a^2(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} z_1^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 + \\ & z_2(g_2 z_3 + g_2 \alpha_2 + f_2 + \varpi_2 - \dot{\alpha}_1). \end{aligned} \quad (27)$$

根据引理3有

$$z_2 g_2 z_3 \leq \frac{1}{2}g_2 z_2^2 + \frac{1}{2}g_2 z_3^2. \quad (28)$$

$$z_2 \varpi_2 \leq \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} z_2^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_2^2. \quad (29)$$

将式(28), (29)代入(27)并整理有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -k_1 b_m \frac{z_1^2}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} - c_1 \left(\frac{z_1^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - z_1^2 + \\ & \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2\varepsilon_1^2 + \frac{b_m}{2a^2(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} z_1^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 + \\ & \frac{1}{2}a^2 + z_2(g_2 \alpha_2 + \bar{f}_2(Z_2)) - c_2 z_2^{2\lambda} + \\ & \frac{1}{2}g_2 z_3^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_2^2 - \sum_{j=1}^2 \frac{b_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\theta}_j. \end{aligned} \quad (30)$$

其中 c_2 为任意正实数, 函数

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(Z_2) &= f_2 + \frac{1}{2}g_2 z_2 - \dot{\alpha}_1 + \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} z_2 + \\ & \frac{b_m z_2}{2(k_{b1}^2 - z_1^2)} + c_2 z_2^{2\lambda-1}. \end{aligned}$$

其中 $Z_2 = [z_1, z_2, \hat{\theta}_1, \dot{y}_r, \ddot{y}_r]^T$. 利用神经网络对其进行估计, 类似式(23), 可知

$$\begin{aligned} z_2 \bar{f}_2(Z_2) &= z_2 (W_2^{*T} S_2(Z_2) + \delta_2) \\ &\leq \frac{b_m}{2a^2} z_2^2 \theta_2 S_2^T S_2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{b_m}{2\bar{\gamma}^2} z_2^2 + \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_2^2. \end{aligned} \quad (31)$$

选择虚拟控制律为:

$$\alpha_2 = -k_2 z_2 - \frac{1}{2\bar{\gamma}^2} z_2 - \frac{1}{2a^2} z_2 \hat{\theta}_2 S_2^T S_2. \quad (32)$$

利用假设1和引理3有

$$z_2 g_2 \alpha_2 \leq -k_2 b_m z_2^2 - \frac{1}{2\bar{\gamma}^2} z_2^2 - \frac{1}{2a^2} b_m z_2^2 \hat{\theta}_2 S_2^T S_2. \quad (33)$$

将式(31), (33)代入(30)并整理, 有式(34)成立.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -k_1 b_m \frac{z_1^2}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} - c_1 \left(\frac{z_1^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - k_2 b_m z_2^2 - \\ & c_2 z_2^{2\lambda} - z_1^2 + \frac{b_m}{2a^2(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} z_1^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 + \\ & \frac{b_m + 1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_2^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_2^2 - \\ & \sum_{j=1}^2 \frac{b_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\theta}_j + \frac{b_m}{2a^2} z_2^2 \hat{\theta}_2 S_2^T S_2 + \frac{1}{2}g_2 z_3^2. \end{aligned} \quad (34)$$

步骤 3 利用坐标变换方程 $z_3 = x_3 - \alpha_2$, 则系统(3)的第3个子系统为

$$\dot{z}_3 = g_3 u + f_3 + \varpi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \varpi_2 - \eta_2.$$

其中 $\eta_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (g_2 x_3 + f_2) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}_j} \dot{\theta}_j + \sum_{j=0}^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r^{(j)}} y_r^{(j+1)}$. 选择一个辅助Lyapunov函数为

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2}z_3^2 + \frac{b_m}{2r_3} \tilde{\theta}_3^2 + k_0. \quad (35)$$

这里 $k_0 > 0$ 为任意常数.

注 2 选择辅助参数 k_0 的目的是为了保证系统函数 $V_3 > 0$, 从而保证系统的H_∞性能的证明. 这里 k_0 不参与系统控制器的设计.

注 3 根据推论1可知这样选择Lyapunov函数不影响最后的分析结果.

类似于第2步,则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -k_1 b_m \frac{z_1^2}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} - c_1 \left(\frac{z_1^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - \\ & k_2 b_m z_2^2 - c_2 z_2^{2\lambda} + \frac{b_m}{2a^2(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} z_1^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 + \\ & \frac{b_m + 1}{2} a^2 - z_1^2 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_2^2 - \\ & \sum_{j=1}^3 \frac{b_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\theta}_j + \frac{b_m}{2a^2} z_2^2 \tilde{\theta}_2 S_2^T S_2 + \frac{1}{2} g_2 z_3^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_2^2 + \\ & z_3 (g_3 u + f_3 + \varpi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \varpi_2 - \eta_2). \end{aligned} \quad (36)$$

根据引理1有

$$-z_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \varpi_2 \leq \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} z_3^2 \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right)^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_2^2. \quad (37)$$

$$z_3 \varpi_3 \leq \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} z_3^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_3^2. \quad (38)$$

将式(37), (38)代入(36)并整理得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -k_1 b_m \frac{z_1^2}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} - c_1 \left(\frac{z_1^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - \\ & k_2 b_m z_2^2 - c_2 z_2^{2\lambda} + a^2 - z_1^2 + 2\bar{\gamma}^2 \varpi_2^2 + \\ & \frac{b_m}{2a^2(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} z_1^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_1^2 + \\ & \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_2^2 - \sum_{j=1}^3 \frac{b_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\theta}_j + \frac{b_m}{2a^2} z_2^2 \tilde{\theta}_2 S_2^T S_2 + \\ & z_3 (g_3 u + \bar{f}_3(Z_3)) - c_3 z_3^{2\lambda} + \bar{\gamma}^2 \varpi_3^2. \end{aligned} \quad (39)$$

其中 c_2 为任意正实数,函数

$$\begin{aligned} \bar{f}_3(Z_3) = & \frac{1}{2} g_2 z_3 + \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} z_3 \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right)^2 + \\ & \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} z_3^2 - \eta_2 + c_3 z_3^{2\lambda-1}. \end{aligned}$$

其中 $Z_3 = [z_1, z_2, z_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dot{y}_r, \ddot{y}_r, y_r^{(3)}]^T$. 利用神经网络对其进行估计,类似式(23),可知

$$\begin{aligned} z_3 \bar{f}_3(Z_3) = & z_3 (W_3^{*T} S_3(Z_3) + \delta_3) \\ \leq & \frac{b_m}{2a^2} z_3^2 \theta_3 S_3^T S_3 + \frac{1}{2} a^2 + \frac{b_m}{2\bar{\gamma}^2} z_3^2 + \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_3^2. \end{aligned} \quad (40)$$

选择实际控制律为:

$$u = -k_3 z_3 - \frac{1}{2a^2} z_3 \hat{\theta}_3 S_3^T S_3 - \frac{1}{2\bar{\gamma}^2} z_3. \quad (41)$$

由假设1得

$$z_3 g_3 u \leq -k_3 b_m z_3^2 - \frac{b_m}{2a^2} z_3^2 \hat{\theta}_3 S_3^T S_3 - \frac{b_m}{2\bar{\gamma}^2} z_3^2. \quad (42)$$

将式(40), (42)代入(39)并整理,有式(43)成立.

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -k_1 b_m \frac{z_1^2}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} - c_1 \left(\frac{z_1^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - \\ & b_m \sum_{j=2}^3 k_j z_j^2 - \sum_{j=2}^3 c_j z_j^{2\lambda} - z_1^2 + \\ & \frac{b_m}{2a^2(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} z_1^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 + \frac{b_m}{2a^2} \sum_{j=2}^3 z_j^2 \tilde{\theta}_j S_j^T S_j + \\ & \frac{b_m + 2}{2} a^2 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \sum_{j=2}^3 \varepsilon_j^2 - \\ & \sum_{j=1}^3 \frac{b_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\theta}_j + 2\bar{\gamma}^2 \varpi_2^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_3^2. \end{aligned} \quad (43)$$

分别取自适应律

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \frac{r_1}{2a^2(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} z_1^2 S_1^T S_1 - \sigma_1 \hat{\theta}_1. \quad (44)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \frac{r_i}{2a^2} z_i^2 S_i^T S_i - \sigma_i \hat{\theta}_i (i = 2, 3). \quad (45)$$

其中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 均为正的设计参数. 将式(44), (45)代入式(43)中,可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -k_1 b_m \frac{z_1^2}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} - c_1 \left(\frac{z_1^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - \\ & b_m \sum_{j=2}^3 k_j z_j^2 - \sum_{j=2}^3 c_j z_j^{2\lambda} - z_1^2 + \frac{b_m + 2}{2} a^2 + \\ & \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \sum_{j=2}^3 \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \\ & 2\bar{\gamma}^2 \varpi_2^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_3^2. \end{aligned} \quad (46)$$

至此,可给出本文的主要结果如下:

定理 1 对于满足假设1和2的机械臂系统(3),如果虚拟控制律、实际控制律及自适应律按照(24), (32), (41), (44)和(45)选取,则系统满足: 1) 系统输出被限制在设定范围内; 2) 闭环系统中所有信号是SGPFS的; 3) 系统对外界干扰具有有界 H_∞ 干扰抑制性能.

证 1) 系统输出受限的证明

因为 $y(t) = z_1(t) + y_r(t)$,而由上面的推导可知 $|z_1(t)| < k_{b1}$,又 $|y_r(t)| \leq A_0$, A_0 为一正常数,所以 $|y(t)| < k_{b1} + A_0$,因此系统输出被限制.

2) SGPFS的证明

考虑系统稳定性分析,令外部扰动 $\varpi_2 = \varpi_3 = 0$. 选择总的Lyapunov函数

$$V = V_3$$

$$= \frac{b_m}{2} \ln \frac{k_{b1}^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} + \sum_{j=2}^3 \frac{1}{2} z_j^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{b_m}{2r_j} \tilde{\theta}_j^2 + k_0. \quad (47)$$

由式(46)知

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -k_1 b_m \frac{z_1^2}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} - c_1 \left(\frac{z_1^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - \\ & b_m \sum_{j=2}^3 k_j z_j^2 - \sum_{j=2}^3 c_j z_j^{2\lambda} + \frac{b_m + 2}{2} a^2 + \\ & \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \sum_{j=2}^3 \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j. \end{aligned} \quad (48)$$

令 $c_{\min} = \min_{1 \leq i \leq 3} \{c_i\}$ 并且根据引理1和引理5可得

$$\begin{aligned} & -c_1 \left(\frac{z_1^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - \sum_{j=2}^3 c_j z_j^{2\lambda} \leq \\ & -c_{\min} \left(\left(\frac{z_1^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda + \sum_{j=2}^3 z_j^{2\lambda} \right) \leq \\ & -\bar{C}_1 \left(\frac{b_m}{2} \ln \frac{k_{b1}^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - \bar{C} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 z_j^2 \right)^\lambda. \end{aligned} \quad (49)$$

其中 $\bar{C}_1 = \left(\frac{b_m}{2} \right)^\gamma c_{\min}$, $\bar{C} = 2^\gamma c_{\min}$. 将式(49)代入式(48)中, 并令 $\sigma_{\min} = \min_{1 \leq i \leq 3} \{\sigma_i\}$, 式(50)成立.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\bar{C}_1 \left(\frac{b_m}{2} \ln \frac{k_{b1}^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \right)^\lambda - \bar{C} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 z_j^2 \right)^\lambda + \\ & \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \sum_{j=2}^3 \varepsilon_j^2 - k_1 b_m \frac{z_1^2}{(k_{b1}^2 - z_1^2)^2} - \\ & b_m \sum_{j=2}^3 k_j z_j^2 - \sigma_{\min}^\lambda \left(\sum_{j=1}^3 \frac{b_m}{2r_j} \tilde{\theta}_j^2 \right)^\lambda + \\ & \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{2r_j} \tilde{\theta}_j^2 \right)^\lambda + \\ & \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_1^2 + \frac{b_m + 2}{2} a^2, \\ \leq & -\varphi V^\lambda + \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{2r_j} \tilde{\theta}_j^2 \right)^\lambda + \\ & \frac{b_m + 2}{2} a^2 + \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_j^2. \end{aligned} \quad (50)$$

其中 $\varphi = \min \{ \bar{C}_1, \bar{C}, \sigma_{\min}^\lambda \}$. 下面针对式(50)中第二项和第三项进行处理. 根据引理2可知 $\tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j \leq -\frac{1}{2} \tilde{\theta}_j^2 + \frac{1}{2} \theta_j^2$, 故式(50)中第二项可处理为

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j \leq -\sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{2r_j} \tilde{\theta}_j^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{2r_j} \theta_j^2. \quad (51)$$

对于式(50)中第三项, 根据引理4, 令其中的 $\phi = 1, \psi = \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{2r_j} \tilde{\theta}_j^2, m = 1 - \lambda, w = e^{(\lambda/(1-\lambda)) \ln \lambda}, n = \lambda$, 有

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{2r_j} \tilde{\theta}_j^2 \right)^\lambda \leq \\ & (1 - \lambda) e^{(\lambda/(1-\lambda)) \ln \lambda} + \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{2r_j} \tilde{\theta}_j^2. \end{aligned} \quad (52)$$

将式(51)、(52)代入(50)中, 式(50)能被写为

$$\dot{V} \leq -\varphi V^\lambda + \beta. \quad (53)$$

其中 $\beta = \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{2r_j} \theta_j^2 + (1 - \lambda) e^{(\lambda/(1-\lambda)) \ln \lambda} + \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_1^2 + \frac{b_m + 2}{2} a^2 + \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \sum_{j=2}^3 \varepsilon_j^2$.

因此由引理2和推论1可知闭环系统(3)是SGPFS的.

3) 有界H_∞性能的证明

在系统是SGPFS的前提下, 我们来证明系统具有有界H_∞性能. 考虑系统总的Lyapunov函数V是关于 $Z_0 = [z_1, z_2, z_3, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3]^T$ 的函数, 且由式(46)与式(51)知

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z_0) \leq & -z_1^2 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \sum_{j=2}^3 \varepsilon_j^2 + \\ & \frac{b_m + 2}{2} a^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{2r_j} \theta_j^2 + 2\bar{\gamma}^2 \|\varpi\|^2. \end{aligned} \quad (54)$$

其中 $\varpi = [0, \varpi_2, \varpi_3]^T$. 定义一个辅助函数

$$H = \dot{V}(Z_0) + z_1^2 - 2\bar{\gamma}^2 \|\varpi\|^2. \quad (55)$$

将式(54)代入式(55)可得

$$H \leq \zeta. \quad (56)$$

其中 $\zeta = \frac{b_m + 2}{2} a^2 + \frac{1}{2b_m} \bar{\gamma}^2 \sum_{j=2}^3 \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j b_m}{2r_j} \theta_j^2 + \frac{\bar{\gamma}^2 \varepsilon_1^2}{2}$. 因为 $V(Z_0) > 0$ 且 ζ 有界, 所以必存在未知常数 $\rho > 0$, 使得

$$H = \dot{V}(Z_0) + z_1^2 - 2\bar{\gamma}^2 \|\varpi\|^2 \leq \zeta \leq \rho V(Z_0). \quad (57)$$

对式(57)两边积分可得

$$0 < V(Z_0(t)) < \psi(t) + \int_0^t \chi(s) V(Z_0(s)) ds. \quad (58)$$

根据引理6, 其中 $\chi(s) = \rho, \psi(t) = \int_0^t (2\bar{\gamma}^2 \|\varpi(s)\|^2 - \|z_1(s)\|^2) ds + V(Z_0(0))$, 则

$$V(Z_0(t)) < \psi(t) + \int_0^t \rho \psi(s) e^{\rho(t-s)} ds. \quad (59)$$

下面用反证法思想来证明 $\psi(t) > 0$. 假设

$$\psi(t) \leq 0. \quad (60)$$

则有

$$\int_0^t \rho \psi(s) e^{\rho(t-s)} ds \leq 0. \quad (61)$$

将式(60)和(61)代入式(59)中, 可得 $V(Z_0(t)) \leq 0$. 这与 $V(Z_0) > 0$ 矛盾. 所以假设不成立, $\psi(t) > 0$ 得证. 即式(62)成立.

$$\int_0^t \|z_1(s)\|^2 ds < \int_0^t 2\bar{\gamma}^2 \|\varpi(s)\|^2 ds + V(Z_0(0)). \quad (62)$$

这意味着下式成立.

$$\int_0^t \|z_1(s)\|^2 ds < \gamma^2 \int_0^t \|\varpi(s)\|^2 ds + V(Z_0(0)). \quad (63)$$

其中 $\gamma = \sqrt{2\bar{\gamma}}$. 即系统(3)满足有限时间有界 H_∞ 性能指标. 从而定理1得证.

证毕

5 仿真研究

为了验证所提方法的有效性, 考虑采用文献[28]中的电机驱动的单连杆机械臂系统进行仿真研究. 其数学模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\bar{M}} x_3 + \frac{-N \sin x_1 - Bx_2}{\bar{M}} + \frac{\tau_e}{\bar{M}}, \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{L} V + \frac{-Rx_3 - K_e x_2}{L} + \frac{1}{L} V_e. \end{cases} \quad (64)$$

该系统输出为 $y = x_1$. 在状态方程中,

$$\bar{M} = \frac{Md^2}{K_\tau} + \frac{J}{K_\tau} + \frac{md^2}{3K_\tau} + \frac{2M\delta^2}{5K_\tau},$$

$$B = \frac{B_0}{K_\tau}, N = \frac{mdg}{2K_\tau} - \frac{Mdg}{K_\tau}.$$

这里各参数物理意义可见文[28], 具体参数值为: $J = 1.625 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $m = 0.506 \text{ kg}$, $d = 0.305 \text{ m}$, $M = 0.434 \text{ kg}$, $B_0 = 16.25 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$, $\delta = 0.023 \text{ m}$, $L = 25 \times 10^{-3} \text{ H}$, $K_e = 0.9 \text{ V} \cdot \text{s/rad}$, $K_\tau = 0.9 \text{ N} \cdot \text{m/A}$. 该系统具有式(3)的模型形式, 其中 $f_2 = (-N \sin x_1 - Bx_2)/\bar{M}$, $g_2 = 1/\bar{M}$, $\varpi_2 = \tau_e/\bar{M}$, $g_3 = 1/L$, $f_3 = (-Rx_3 - K_B x_2)/L$, $\varpi_3 = V_e/L$. 这里考虑系统受到外部干扰为 $\varpi_2 = 25 \cos(5\pi t) e^{-0.5t}$ 和 $\varpi_3 = 5 \sin(4\pi t) e^{-0.5t}$, 期望输出 $y_r = \frac{\pi}{2} \sin(t)(1 - e^{-0.1t^2})$. 按照定理1设计该系统的控制器. 其初始状态和设计参数分别为: $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^T = [0, 0.1, 0.1]^T$; $[\hat{\theta}_1(0), \hat{\theta}_2(0), \hat{\theta}_3(0)]^T = [0.1, 0.3, 0.5]^T$; $k_1 = 0.5$; $k_2 = 1$; $k_3 = 200$; $a = 1$; $\bar{\gamma} = 0.3$; $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.05$; $r_1 =$

$r_2 = r_3 = 0.05$; $k_{b1} = 0.04$. 神经网络 $W_1^T S_1(Z_1)$ 包含 7^2 个节点, 宽度2, 中心平均分配在区间 $[-3, 3] \times [-3, 3]$ 上; 神经网络 $W_2^T S_2(Z_2)$ 包含 7^5 个节点, 宽度为2, 中心平均分配在区间 $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ 上; 神经网络 $W_3^T S_3(Z_3)$ 包含 7^8 个节点, 宽度为2, 中心平均分配在区间 $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ 上. 该控制器的仿真结果如图1-6所示. 图1-6分别给出系统的输出跟踪效果、跟踪误差、系统状态 x_2 和 x_3 、自适应律 $\hat{\theta}_1$ 、 $\hat{\theta}_2$ 和 $\hat{\theta}_3$ 以及控制输入 u 的响应曲线. 为了更好地显示系统对外部干扰的抑制性能, 图中同时给出了系统受到和未受到外部干扰的控制效果. 为了证明本文方法的优越性, 这里与文[28]中的方法进行了比较研究. 在同样的初始条件、外部干扰及同样的输出受限条件下, 并与文[28]中基本相同的控制参数, 得到的仿真结果如图7-9所示. 图7-9分别给出两种控制方法的输出跟踪效果、跟踪误差及控制输入 u 的响应曲线.

从图1-6可以看出: 本文方法设计的控制律及自适应律可以保证机械臂系统的输出能够在有限时间内很好地跟踪期望轨迹, 并能将系统输出约束在设定范围内. 当存在外部干扰时, 本文方法的系统控制效果基本没有影响, 验证了所提出的控制方法对外部干扰具有较好的抑制性能.

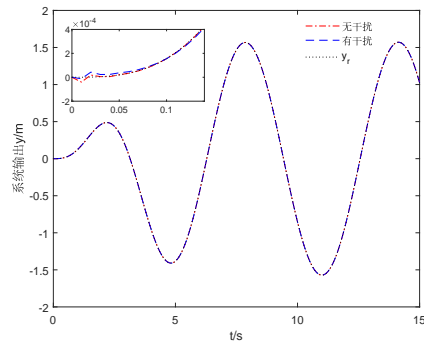


图1 连杆角位置 x_1 和期望轨迹 y_r

Fig. 1 Angular position x_1 and the desired trajectory y_r

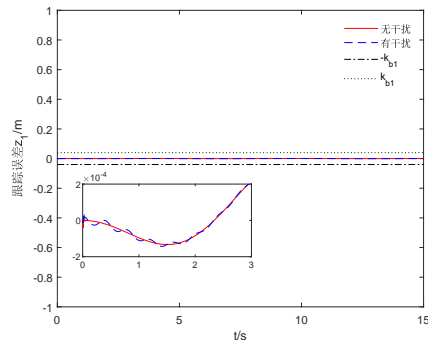


图2 跟踪误差 z_1

Fig. 2 Tracking error z_1

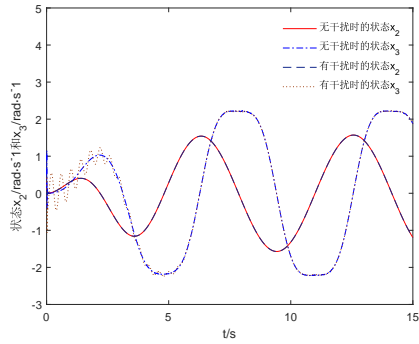


图3 状态 x_2, x_3 响应曲线

Fig. 3 Response curves of the states x_2, x_3

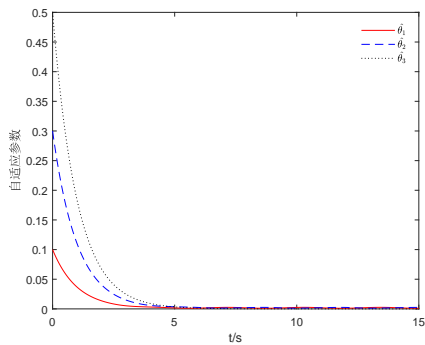


图4 无干扰时自适应参数 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ 响应曲线

Fig. 4 Response curves of the adaptive parameters $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ without external disturbances

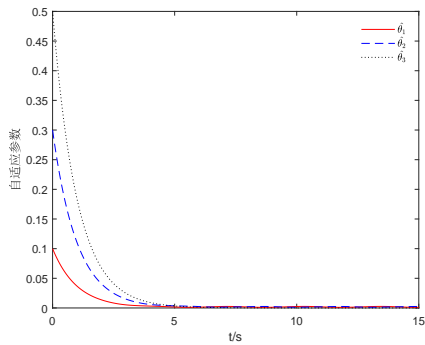


图5 有干扰时自适应参数 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ 响应曲线

Fig. 7 Response curves of the adaptive parameters $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ with external disturbances

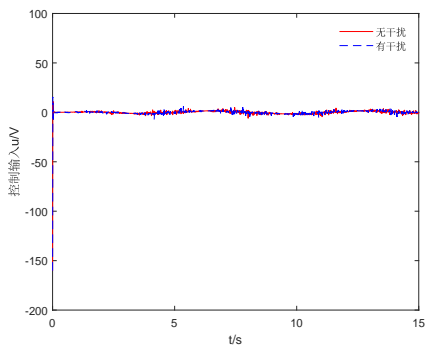


图6 控制输入 u

Fig. 6 Control input u

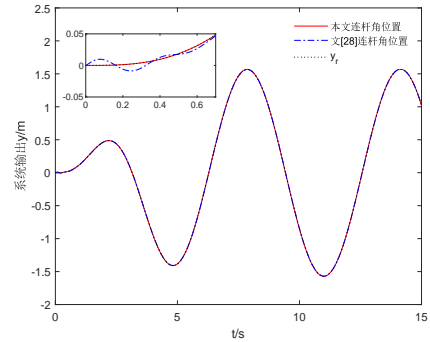


图7 存在外部扰动时连杆角位置 x_1

Fig. 7 Angular position x_1 with external disturbances

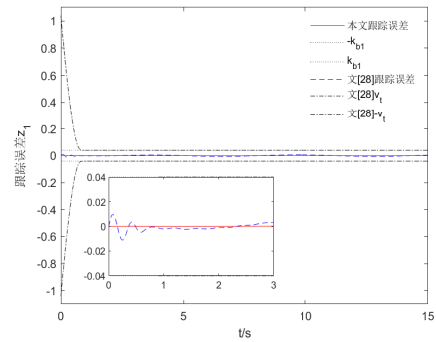


图8 存在外部扰动跟踪误差 z_1

Fig. 8 Tracking error z_1 with external disturbances

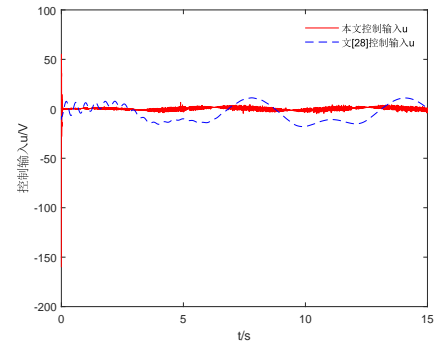


图9 存在外部扰动时的控制输入 u

Fig. 9 Control input u with external disturbances

从图7-9可知, 当存在前述较大的外部扰动时, 本文控制方法仍能使被控系统具有较好的动态性能, 而文[28]方法的控制效果则受到较大影响, 说明了本文方法的优越性.

6 结论

本文研究了一种输出约束下的单连杆机械臂系统自适应有限时间有界 H_∞ 跟踪控制问题, 首次将实际有限时间控制理论和 H_∞ 控制理论相结合, 提出了有限时间有界 H_∞ 性能的概念, 并针对此类系统提出了一种新的有限时间有界 H_∞ 控制方法. 利用此方法设

计了系统输出受限条件下的自适应神经有限时间有界 H_∞ 跟踪控制器. 所设计的控制器能够保证机械臂系统输出约束在设定范围内, 并且在有限时间内准确跟随给定的期望轨迹. 同时, 外部扰动对系统的影响能够被 H_∞ 性能抑制. 该方法避免了有限时间控制器设计时的奇点问题, 改进了有限时间控制设计的合理性, 同时提高了机械臂系统对各类外部干扰的抑制能力, 为机械臂的精确控制提供了一个新思路.

参考文献:

- [1] Rafael K. A tuning procedure for stable PID control of robot manipulators. *Robotica*, 1995, 13(2): 141-148.
- [2] Cervantes I, Alvarez-Ramirez J. On the PID tracking control of robot manipulators. *Systems & Control Letters*, 2001, 42(1): 37-46.
- [3] Kuc T Y, Han W G. An adaptive PID learning control of robot manipulators. *Automatica*. 2000, 36(5): 717-725.
- [4] LIU Weipeng, XING Guansheng, CHEN Haiyong, et al. Robotic trajectory tracking control method based on reinforcement learning. *Control and Decision*, 2018, 24(08): 1996-2004.
(刘卫朋, 邢关生, 陈海永, 等. 基于增强学习的机械臂轨迹跟踪控制. 计算机集成制造系统, 2018, 24(08): 1996-2004.)
- [5] YANG Liang, CHEN Yong, LIU Zhi. Adaptive trajectory tracking control for manipulator with uncertain dynamics and kinematics. *Control and Decision*, 2019, 34(11): 2485-2490.
(杨亮, 陈勇, 刘治. 基于参数不确定机械臂系统的自适应轨迹跟踪控制. 控制与决策, 2019, 34(11): 2485-2490.)
- [6] DONG Mingyu, YU Li, ZHU Junwu. Adaptive sliding mode tracking control for mobile manipulators. *Control Engineering of China*, 2019, 26(1): 43-49.
(董玉明, 俞立, 朱俊威. 基于自适应滑模的移动机械臂跟踪控制. 控制工程, 2019, 26(1): 43-49.)
- [7] Nikdel N, Badamchizadeh M A, Azimirad V, et al. Adaptive backstepping control for an n-degree of freedom robotic manipulator based on combined state augmentation. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2017, 44(2017): 129-143.
- [8] Chang W, Li Y, Tong S. Adaptive fuzzy backstepping tracking control for flexible robotic manipulator. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2018, DOI: 10.1109/JAS.2017.7510886.
- [9] Wang H, Kang S. Adaptive neural command filtered tracking control for flexible robotic manipulator with input dead-zone. *IEEE Access*, 2019, 7(2019): 22675-22683.
- [10] LIU Fucui, GAO Juanjuan, WANG Fang. Adaptive robust control for the space application of manipulator aligned on ground. *Control Theory & Applications*. 2013, 30(01):69-76.
(刘福才, 高娟娟, 王芳. 地面装调的空间机械臂在空间应用时的自适应鲁棒控制. 控制理论与应用, 2013, 30(01):69-76.)
- [11] Karray A, Feki M. Adaptive tracking control of a mobile manipulator actuated by DC motors. *Int. J. Modelling, Identification and Control*, 2014, 21(2): 193-201.
- [12] Zuo Y, Wang Y, Liu X, et al. Neural network robust H_∞ tracking control strategy for robot manipulators. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34(7): 1823-1838.
- [13] WANG Sanxiu, YU Li, XU Jianming, et al. Adaptive robust tracking control for robotic manipulators. *Control Engineering of China*, 2015, 22(12): 241-245.
(王三秀, 俞立, 徐建明, 等. 机械臂自适应鲁棒轨迹跟踪控制. 控制工程, 2015, 22(12): 241-245.)
- [14] Bhat S P, Bernstein D S. Lyapunov analysis of finite-time differential equations. *Proceedings of 1995 American Control Conference-ACC.95*, Washington, USA, IEEE, 1995, 1831-1832.
- [15] Wang Z, Li S, Fei S. Finite-time tracking control of a nonholonomic mobile robot. *Asian Journal of Control*, 2009, 11(3): 344-357.
- [16] Wang H, Chen B, Lin C, et al. Adaptive finite-time control for a class of uncertain high-order non-linear systems based on fuzzy approximation. *IET Control Theory Applications*, 2017, 11(5): 677-684.
- [17] Xue C, Yu X, He W, et al. Finite-Time neural impedance control for an uncertain robotic manipulator. *2019 34rd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC)*, Jinzhou, China, IEEE, 2019: 42-46.
- [18] Tang Z L, Ge S S, Tee K P, et al. Adaptive neural control for an uncertain robotic manipulator with joint space constraints. *International Journal of Control*, 2016, 89(7): 1428-1446.
- [19] He W, David A O, Yin Z, et al. Neural network control of a robotic manipulator with input dead zone and output constraint. *IEEE Transactions on Systems Man, and Cybernetics: Systems*. 2015, 46(6): 759-770.
- [20] He W, Huang H, Ge S S. Adaptive neural network control of a robotic manipulator with time-varying output constraints. *IEEE transactions on cybernetics*, 2017, 47(10): 3136-3147.
- [21] Liu H, Tian X, Wang G, et al. Finite-time H_∞ control for high-precision tracking in robotic manipulators using backstepping control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(9): 5501-5513.
- [22] Liu H, Tian X, Wang G, et al. Robust H_∞ finite-time stability control of a class of nonlinear systems. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(7-8): 5111-5122.
- [23] Liu H, Li X H, Liu X P, et al. Adaptive neural network prescribed performance bounded- H_∞ tracking control for a class of stochastic nonlinear systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, DOI: 10.1109/TNNLS.2019.2928594.
- [24] Zhu Z, Xia Y, Fu M. Attitude stabilization of rigid spacecraft with finite-time convergence. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(6): 686-702.
- [25] Huang J, Wen C, Wang W, et al. Design of adaptive finite-time controllers for nonlinear uncertain systems based on given transient specifications. *Automatica*, 2016, 69(2016): 395-404.
- [26] Drogomir S. *Some Gronwall Type Inequalities and Applications*, New York: Nova Science Publisher, 2003.
- [27] LI Xiaohua, LIU Hui, LIU Xiaoping. Adaptive H_∞ tracking control for a class of stochastic nonlinear systems with completely unknown functions. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(09):1431-1441.
(李小花, 刘辉, 刘晓平. 一类函数完全未知的随机非线性系统自适应 H_∞ 跟踪控制. 控制理论与应用. 2019, 36(09):1431-1441.)
- [28] Liu Y, Liu X, Jing Y. Adaptive neural networks finite-time tracking control for non-strict feedback systems via prescribed performance. *Information Sciences*, 2018, 468(2018): 29-46.

作者简介:

李中华 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂系统结构与控制、非线性系统控制理论以及工业过程建模与控制等, E-mail: lixiaohua6412@163.com;

杨瑞芳 硕士研究生, 目前研究方向为非线性系统控制、智能控制等, E-mail: 952505548@qq.com;

刘辉 博士研究生, 目前研究方向为随机非线性系统控制研究等, E-mail: 18741273790@163.com;

何帅 硕士研究生, 目前研究方向为非线性大系统控制研究等, E-mail: heshuai9555@163.com.