局部新冠肺炎时滞模型及再生数的计算

刘可伋^{1,3}, 江 渝¹, 严 阅¹, 陈文斌^{2†}

(1. 上海财经大学 数学学院, 上海 200433;

2. 复旦大学 数学科学学院, 上海 200433;

3. 上海财经大学 上海市金融信息技术研究重点实验室, 上海 200433)

摘要: 2019年末的新型冠状病毒肺炎(简称: 新冠肺炎,又称COVID-19, novel coronavirus pneumonia, NCP, 2019nCoV)疫情得到了全球的广泛关注. 文献[1-2]提出了一类新的时滞动力学系统的新冠肺炎传播模型(a time delay dynamic model for NCP,简称TDD-NCP模型)来描述疫情的传播过程.本文将这个模型用于研究部分省市的疫情传 播问题,通过增加模型的源项用于模拟外来潜伏感染者对于当地疫情的影响.基于全国各级卫健委每日公布的累计 确诊数与治愈数,本文有效地模拟并预测了各地疫情的发展.提出了基于TDD模型的再生数的两种计算方法,并做 了估计与分析.发现疫情暴发初期再生数较大,但随着各级政府防控力度的加大而逐渐减小.最后,分析了返程潮 对上海疫情发展的影响,并建议上海市政府继续加大防控力度,以防疫情二次暴发.

关键词:时滞;输入源项;数学模型;再生数;新型冠状病毒肺炎疫情预测

引用格式: 刘可伋, 江渝, 严阅, 等. 局部新冠肺炎时滞模型及再生数的计算. 控制理论与应用, 2020, 37(3): 453-460

DOI: 10.7641/CTA.2020.00068

A time delay dynamic model with external source and the estimation of reproductive number for the outbreak of novel coronavirus pneumonia

LIU Ke-ji^{1,3}, JIANG Yu¹, YAN Yue¹, CHEN Wen-bin^{2†}

(1. School of Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China;

2. School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China;

3. Shanghai Key Laboratory of Financial Information Technology,

Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

Abstract: In late 2019, the spread of novel coronavirus pneumonia (NCP, COVID–19, or 2019–nCoV) has attracted much attention around the world. In [1–2], a time delay dynamic model (TDD–NCP) was proposed to simulate the outbreak of NCP. In this paper, we add the external source in TDD–NCP to describe the influence of exterior suspected people, and the local outbreak of NCP for some provinces/cities of China are studied. From the number of cumulative confirmed people and cumulative cured people of the Health Commission, we effectively simulate and predict the outbreak of NCP for many districts of China. Moreover, we propose two approaches to calculate the reproductive number. We find that the reproductive number is relatively large initially, and it would decrease as the measures of government enhanced. Finally, we analyze the influence of external returned people for the outbreak of NCP in Shanghai, and we suggest that the local government should apply some more strict measures, otherwise the local cumulative confirmed people of NCP might be out of control.

Key words: time delay; external source; mathematical model; reproductive number; prediction for outbreak of novel coronavirus pneumonia

Citation: LIU Keji, JIANG Yu, YAN Yue, et al. A time delay dynamic model with external source and the estimation of reproductive number for the outbreak of novel coronavirus pneumonia. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(3): 453 – 460

收稿日期: 2020-02-12; 录用日期: 2020-03-19.

[†]通信作者. E-mail: wbchen@fudan.edu.cn; Tel.: +86 21-55665142.

本文责任编委:赵千川.

国家自然科学基金项目(11671098,91630309,11971121),上海科学技术委员会"上海青年科技启明星计划"(19QA1403400)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11671098, 91630309, 11971121) and the Science and Technology Commission of Shanghai Municipality under the "Shanghai Rising-Star Program" (19QA1403400).

1 引言

2019年12月,新型冠状病毒肺炎(novel coronavirus pneumonia,简称:新冠肺炎,NCP,又称COVID-19,2019-nCoV)疫情从武汉开始暴发,几天内迅速传 播到全国乃至海外.截至2020年2月11日,全国已有四 万余人感染新冠肺炎,死亡一千余人.疫情暴发突然, 又正值春运,大规模的人口流动加重了疫情.2020年 1月下旬,各地政府均采取了一系列强有力的防控措 施来控制疫情的蔓延.

从数学的角度,建立有效的数学模型来模拟疫情 的传播并预测疫情发展趋势,对疫情的防控具有重要 的现实意义. 描述传染病传播的经典数学模型有SIR 模型^[3]、SEIR模型^[3]和SEIJR模型^[4]等,这些模型将 研究对象选为易感者S潜、伏者E、传染者I、确诊者J 与康复者R等群体,并通过动力学方程组来描述人群 之间相互转移的传播学机制. 2003年SARS(severe acute respiratory syndrome, 严重急性呼吸综合征, 又 称非典)疫情过后,对于SARS, MERS(middle east respiratory syndrome, 中东呼吸综合征)等冠状病毒传播 规律的数学模型研究日益增多^[4-6],如文献[4]将SEI JR模型简化为线性的SIJR模型,得到累计病例数与时 间的关系,并通过该关系与累计确诊病例的实际数据 进行拟合,重现了SARS的发展趋势.此次新冠肺炎疫 情暴发后,对于疫情的模型研究与数据预测也逐渐丰 富[1-2,7-9]. 其中文献[1-2]构建了全局型的时滞动力 系统模型并分别模拟和预测了全国和不同防控力度 下的疫情发展趋势,而文献[8]针对含外部输入病例的 情形,构建了局部型时滞动力系统模型并模拟和预测 了部分城市的疫情发展趋势.

具体地, 文献[1-2]受到文献[4]的启发, 提出了新 冠肺炎疫情的时滞动力学模型(TDD-NCP模型)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta \tilde{I}(t), \\ \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \gamma \int_0^t h_1(t - \tau_1, t')\beta \tilde{I}(t')\mathrm{d}t', \\ \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \ell \tilde{I}(t) - \int_0^t h_2(t - \tau_1', t')G(t')\mathrm{d}t', \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \kappa \int_0^t h_3(t - \tau_1 - \tau_2, t')\beta \tilde{I}(t')\mathrm{d}t'. \end{cases}$$
(1)

在上述模型中: I(t)表示t时刻感染者的累计总数; J(t)表示t时刻确诊者的累计总数; G(t)表示t时刻已 感染, 仍处于潜伏期, 但已隔离的人群的实时总数; R(t)表示 t 时刻康复者的累计总数; $\tilde{I}(t) := I(t) - J(t) - G(t)$ 表示t时刻具有传染性的实时人数; γ 是新 型冠状病毒的致病率; β 表示每个感染者在单位时间 内的平均传染人数, 即传染率; ℓ 代表政府防控力度的 隔离率. 在此模型中, 假设: 1) 感染者在出现明显症状 前会经历 τ_1 天的潜伏期, 一旦出现发热咳嗽等症状, 感染者将寻求治疗,从而转为确诊病例;2)基于政府 的防控隔离措施,某些感染者在潜伏期内尚未出现症 状已被隔离,在被隔离了平均 τ'_1 天后出现症状成为确 诊病例.由于隔离者与确诊者都处于隔离状态,因此 他们不会将病毒传染给其他人;3)确诊者都在 τ_2 天后结束治疗,他们中有 κ 的比例被治愈,另外1 – κ 的比例死亡.

在时滞项中, $h_i(\hat{t}, t')(i = 1, 2, 3)$ 是延迟天数的概率分布, 满足归一化条件

$$\int_0^t h_i(\hat{t}, t') \mathrm{d}t' = 1, \ \hat{t} \in (0, t), \ i = 1, 2, 3.$$

假 设 $h_i(\hat{t}, t')$ 是 一 个 正 态 分 布, 即 $h_i(\hat{t}, t') = c_{i1}e^{-c_{i2}(\hat{t}-t')^2}$, 其 中 c_{i1} 与 c_{i2} 是 常 数. 在TDD-NCP模型(1)的基础上, 文献[8]提出了TDD-NCP模型中的隔 离人群G(t)的另一种表述:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \ell \tilde{I}(t) - \ell \int_0^t h_2(t - \tau_1', t') \tilde{I}(t') \mathrm{d}t'. \quad (2)$$

此外, 文献[8]进一步考虑了输入源的影响, 将在下一节介绍.

基于2020年1月23日至2月2日各地卫健委发布的 疫情数据,本文利用模型(1)对新冠肺炎的疫情发展做 了准确的模拟和预测.由于这段时间各地均加了大防 控措施,人员流动相对较少,因此模型(1)的模拟效果 较好.然而,随着春节假期的结束,各单位陆续复工, 各类学校也即将陆续复学,2月8日前后的返工潮与 2月20日前后的返学潮不可避免.因此,本文将在文 献[8]的基础上,进一步模拟和预测重点省市的疫情发 展,分析返校潮对上海的影响,并且给出再生数的估 计.

2 带源项的时滞动力学模型TDD-NCPs

在TDD-NCP模型(1)的基础上, 文献[8]进一步考虑了输入源的影响, 在此作简单介绍. 假设有A和B两个地区, 假设人口从A地区单向地流向B地区, 并采用 *I*a, *J*a, *G*a, *R*a, *D*a与*I*b, *J*b, *G*b, *R*b, *D*b分别表示A地与B地的感染者、确诊者、隔离者、康复者、死亡者. 基于以上假设, A和B两地的感染者由发病至治疗结束的整个过程可由图1描述.

本文将基于流程图1,通过以下两个部分,分别叙述感染者(即源项)的出发地A和感染者的到达地B的 模型.

1) 对于出发地A,采用如下带时滞的动力学系统 (3)描述其疫情发展趋势.其中Ĩ_a(t)表示单位时间A 地新增的感染人数:

$$\tilde{\mathcal{I}}_{\mathrm{a}}(t) = (\beta_{\mathrm{a}} - \nu(t)\theta)(I_{\mathrm{a}}(t) - G_{\mathrm{a}}(t) - J_{\mathrm{a}}(t))$$

上式中: A地感染人数的变化由两个因素构成: 一是 由于A地有传染性的感染者, 即

$$I_{\mathrm{a}}(t) - G_{\mathrm{a}}(t) - J_{\mathrm{a}}(t),$$

接触健康人导致感染人数增加; 二是由于A地有传染 性的感染者迁移至B地, 从而导致A地的感染人数减 少. 这里, β_a 是A地的传染率; θ 是A地至B地的输入率, 它表示A地迁出的人口中最多有 θ 的比例进入B地; $\nu(t)$ 是一个时间相关的分布, 由若干个正态分布构成, 笔者用它来模拟从A地迁至B地的人数在时间上的高 峰与低谷. 在模型(3)中, $\tilde{\mathcal{G}}_a(t)$ 表示A地在单位时间内 新增的隔离人数:

$$\mathcal{G}_{\mathrm{a}}(t) = \ell_{\mathrm{a}}(I_{\mathrm{a}}(t) - G_{\mathrm{a}}(t) - J_{\mathrm{a}}(t)),$$

它是由t时刻被新隔离的感染者所组成,其中ℓ_a为A 地的隔离率.

$$\begin{cases} \frac{dI_{a}}{dt} = \tilde{\mathcal{I}}_{a}(t), \\ \frac{dJ_{a}}{dt} = \gamma \int_{0}^{t} h_{1}(t - \tau_{1}, t') \tilde{\mathcal{I}}_{a}(t') dt', \\ \frac{dG_{a}}{dt} = \tilde{\mathcal{G}}_{a}(t) - \int_{0}^{t} h_{2}(t - \tau_{1}', t') \tilde{\mathcal{G}}_{a}(t') dt', \\ \frac{dR_{a}}{dt} = \kappa \int_{0}^{t} h_{3}(t - \tau_{1} - \tau_{2}, t') \tilde{\mathcal{I}}_{a}(t') dt'. \end{cases}$$
(3)





Fig. 1 The demonstration of the time delay dynamic model with external source

对于模型中的时滞项,做出如下说明:

i) 无论确诊者就医前是否被隔离, 在t时刻确诊者 累计总数均由t - τ₁时刻的新增感染者构成.

ii) *t* - τ₁'时刻的新增隔离者在*t*时刻将从隔离人群中转移至确诊人群.

iii) 一旦被感染, 需经历τ₁天的潜伏期与τ₂天的治 疗期才能结束治疗.

2) 对于到达地B,以下带时滞的动力学系统(5)将 描述其疫情发展动态.其中 $\tilde{\mathcal{I}}_{b}(t)$ 表示单位时间内B地 新增的感染人数:

$$\tilde{\mathcal{I}}_{\mathrm{b}}(t) := \beta_{\mathrm{b}}(I_{\mathrm{b}}(t) - G_{\mathrm{b}}(t) - J_{\mathrm{b}}(t)) + \tilde{\mathcal{I}}_{\mathrm{inB}}(t),$$

t \oplus

其中

$$\mathcal{I}_{\rm inB} = \nu(t)\theta(I_{\rm a}(t) - G_{\rm a}(t) - J_{\rm a}(t))$$
(4)

表示由 A 地进入 B 地的感染人数, 即外地输入源. $\tilde{\mathcal{G}}_{b}(t)$ 代表单位时间B地新增的隔离人数:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\mathrm{b}}(t) = \ell_{\mathrm{b}}(I_{\mathrm{b}}(t) - G_{\mathrm{b}}(t) - J_{\mathrm{b}}(t)),$$

其中参数 $\beta_{\rm b}$ 与 $\ell_{\rm b}$ 分别表示B地的传染率与隔离率.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\mathcal{I}}_{\mathrm{b}}(t), \\ \frac{\mathrm{d}J_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}t} = \gamma \int_{0}^{t} h_{1}(t - \tau_{1}, t') \tilde{\mathcal{I}}_{\mathrm{b}}(t') \mathrm{d}t', \\ \frac{\mathrm{d}G_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\mathcal{G}}_{\mathrm{b}}(t) - \int_{0}^{t} h_{2}(t - \tau'_{1}, t') \tilde{\mathcal{G}}_{\mathrm{b}}(t') \mathrm{d}t', \\ \frac{\mathrm{d}R_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}t} = \kappa \int_{0}^{t} h_{3}(t - \tau_{1} - \tau_{2}, t') \tilde{\mathcal{I}}_{\mathrm{b}}(t') \mathrm{d}t'. \end{cases}$$

$$(5)$$

3 模型求解与参数反演方法

这一节本文将介绍模型(3)与模型(5)的数值求解 与参数反演方法.注意到求解A地模型(3)并不需要B 地模型(5)中的任何信息,即模型(3)的计算可完全独 立于模型(5).因此,在实际计算时,可以先求解模型 (3),然后将计算所得的*I*_a(*t*),*J*_a(*t*)与*G*_a(*t*)代入模型 (5)中并求解模型(5).特别的,输入源项中的*v*(*t*)是一 个时间相关的分布:

$$\nu(t) = \frac{1}{M} (e^{-0.1(t-t_1)^2} + e^{-0.1(t-t_2)^2}),$$

其中: *M*是归一化常数, *t*₁与*t*₂分别表示返工与返学两个高峰的时间, 在此本文分别取为2月8日与2月20日. 数值计算中, 笔者使用MATLAB程序来求解TDD – NCPs模型(3)与模型(5).

在求解模型之前, 需要知道参数{ $\beta, \gamma, \kappa, \ell, \tau_1, \tau'_1$, τ_2 }的值以及各变量的初始条件. 设初始时刻 t_0 为第一 批感染者出现的时刻, 并且A和B两地初始均感染5人, 初始当天没有被确诊/隔离/康复的人, 即 $I_a(t_0) =$ $I_b(t_0) = 5$, 其余的变量初值均为0. 利用全国各级卫 健委公开的数据和疫情相关信息, 可以确定部分参数 的信息, 具体详见表1.

对于传染率参数β和隔离率参数ℓ,本文采用全国 各级卫健委公布的累计确诊病例数J_{数据}与累计治愈 人数R_{数据}来反演,即求解如下最小二乘问题:

$$\min_{\beta,\ell} \|J(\beta,\ell) - J_{\text{数}_{\text{H}}}\|_2.$$
(6)

数值计算中,可采用L-M(Levenberg-Marquad)方法

或马尔科夫链蒙特卡洛(Markov chain Monte Carlo, MCMC)方法^[10–11]来求解该最小二乘问题(6), 从而反 演得到参数最优解 β^* 与 ℓ^* .最后,可以根据参数信息 和前述的数值求解方法,分别模拟和预测新型冠状病 毒在区域A和B内的疫情发展趋势.当然,当 $\theta \neq 0$,即 有输出/输入源的时候,需要先对地区A求解最小二乘 问题(6)得到(β_a^*, ℓ_a^*),进而求解式(3)得到式(4)中的输 入源,之后再对地区 B 求解最小二乘问题 (6) 得到 (β_b^*, ℓ_b^*).

表1 部分参数值

Table 1 Values for some parameters

γ	κ	$ au_1$	τ'_1	$ au_2$
0.99	0.97	7	4	12

4 模型实证与疫情分析

4.1 再生数等模型参数的反演与分析

全国疫情分析: 对于全国来说, 没有海外输入源, 因此取输入率 $\theta = 0$ 来进行疫情分析. 注意到对于地 区A或B, 当 $\theta = 0$ 时模型(3)与模型(5)就退化为之前 在文献[2]中提出的不带源项的TDD-NCP模型(1). 采 用2020年1月23日至2月9日官方公布的全国累计确诊 人数与累计治愈人数, 利用第3节提到的模型求解与



参数反演方法,推断出传染率β与隔离率ℓ的估计值. 为了更好地分析模型,分别使用:

1) 1月23日-1月29日; 2) 1月23日-2月5日; 3) 1月 23日-2月9日的历史数据进行参数反演,反演的参数 估计值见表2.

表 2 不同时间段对应的 β 和 ℓ 的参数估计值 Table 2 Estimations of β and ℓ in different periods

历史数据时间段	传染率β	隔离率ℓ
1月23日-1月29日	0.2999	0.3597
1月23日2月5日	0.2917	0.3259
1月23日2月9日	0.2933	0.3778

将表2中反演的参数值代入模型,进而"预测"历 史数据时间段次日的全国累计确诊人数,以及 2020年2月10日的全国累计确诊人数(见图2左列),具 体预测人数见表3.在图2左列中,圆圈与方形分别为 官方公布的累计感染人数与累计治愈人数,实线与虚 线分别为累计感染人数与累计治愈人数的数值模拟 结果,点划线为正在医院治疗人数的数值模拟结果. 为方便对比,分别将历史数据时间段次日以及2月10 日的全国累计确诊人数的实际数据也列入表3中.









表 3 不同时间段对应的全国累计确诊人数的 预测值和真实值

Table 3 Predictions and public data of cumulativeconfirmed cases in China for

different periods

历史数据时间段	预测次日 (实际数据)	预测2月10日 (实际数据)
1月23日1月29日	10110 (9692)	51280 (42638)
1月23日2月5日	31460 (31420)	46240
1月23日2月9日	43610 (42638)	43610 (42638)

基于这些图表,作出如下分析:

 1)从表3中可以看出,模型对于数据时间段次日 的预测都是比较准确的,而对于多日后的预测则有所 偏差.主要原因是本文假设模型的参数均为常数,故 而反演得到的参数反映的是使用的历史数据时间段 内的局部平均信息.当使用这些参数值进行预测时, 需要假设防控措施力度不变.但实际上各地防控措施 力度是不断加强的,因此这些参数也需要不断调整, 这在表2中也得到了体现.

2) 在图2左列的疫情发展曲线图中,有一点值得 注意:随着疫情发展,计算中的实际数据不断增加,使 得模型的参数不断优化.在参数优化的过程中,虽然 预测疫情的"平台期"都将在2月末3月初出现,但是 预测的最终累计确诊人数却是随着实际数据的增多 而下降的.这也从侧面显示了政府防控措施十分有效, 并且很好地控制了疫情的发展.

对于传染病的传播, 医学界常关心基本再生数指标*R*₀. 该指标的意义为在没有防控措施且无人免疫的条件下, 每个感染者在平均患病周期内传染的人数.

基本再生数能够反映自然状态下传染病的传播能力, 但由于病毒自然条件下的传染状态人们无法获取,所 以本文定义两种新的再生数-防控再生数.他们描述 了病毒在传播过程中受外界(政府防控)影响下的传播 能力.

方法1 实时防控再生数:

$$R_{\rm f}(t) = \frac{I(t+\tau_1)}{J(t)},$$

即,对每个时刻t,计算每个确诊者在潜伏期内传染的人数.

方法2 历史防控再生数:

$$\widetilde{R}_0 := 1 + \beta T_c,$$

其中: 传染率β是由一段时间内的数据反演而得, T_c为 传播链中连续病例的发病间隔, 根据文献[7], T_c可 取为7.5. 历史防控再生数的计算方法可参考文献 [12–13].

利用不同时间段的历史数据可以得到对于再生数的估计(见表4和图2右列).这里需要说明的是,计算得到的*R*_f(*t*)在疫情初期大于5,因此未在图中显示.

表 4 不同时间段对应的再生数

Table 4	Reproductive	numbers i	n different	periods
				r · · · · · · ·

历史数据时间段	\widetilde{R}_0	$R_{ m f}(t)$		
	- *0	1月29日	2月5日	2月9日
1月23日1月29日	3.249	10.373	2.847	1.880
1月23日2月5日	3.188	10.298	2.977	1.974
1月23日2月9日	3.200	9.414	2.651	1.783

表4中计算得到的再生数与发表在《新英格兰医学 杂志》^[7]中的数值是吻合的.历史防控再生数 \tilde{R}_0 反映的是数据时间段内的再生数平均值;实时防控再 生数 $R_f(t)$ 可以反映防控措施下疫情发展的变化.从 表中可以看到, $R_f(t)$ 已经从1月29日的10左右下降到

再生数*R*_f(*t*)曲线, 详见图3. 由于各地对于人员流动的防控十分严格, 各地都对外地人员实行了"劝返",

因此本文同样也取输入率θ=0来进行疫情分析.模

型反演得到的参数和再生数见表5.

2月9日的2左右,说明了政府的防控措施是十分有效 的.

主要省市疫情分析:基于1月23日至2月9日的历 史数据得到各重点省市的疫情发展曲线和实时防控



Fig. 3 Left: Epidemic evolution in selected districts in China; Right: The corresponding $R_{\rm f}(t)$

表	5 王要省市的模型参数和冉生数
Table 5	Parameters and reproductive numbers of
	selected districts in China

重点省市	β	l	\widetilde{R}_0		$R_{\rm f}(t)$	
	1-	÷		1月29日	2月5日	2月9日
武汉	0.4333	0.4949	4.250	24.896	3.790	2.170
湖北	0.4026	0.4810	4.020	14.498	2.962	1.813
上海	0.2039	0.5988	2.529	4.136	1.874	1.532
浙江	0.2014	0.7807	2.511	4.125	1.877	1.551

*本文使用的是1月23日至2月9日的数据得到的各项参数,反演得到的传染率β差异较大.截止3月上旬的数据表明,β现已趋于稳定.

基于这些图表,本文对各重点省市的再生数有如 下分析:

1) 通过分析历史防控再生数,发现武汉的疫情的确比较严重.此外,防控措施严格且执行到位的省市,如浙江省,则能够较好控制疫情.

2) 通过分析实时防控再生数,发现重点省市的 数值都已从疫情初期的5左右(或以上)逐渐降低至现 在的1.5左右.该数值与学术界的普遍估计水平相符. 武汉的疫情在初期是比较严重的,但随着国家主导的 各项防控措施的有效落实,目前的疫情也控制在较好 的状态.而对于其他重点省市,数据显示目前疫情已 有变缓的趋势,因此各级政府应至少保持目前的防控 措施.

4.2 返校开学潮对上海的影响

这一小节将分析返校开学潮对上海疫情发展产生的影响.假设人口迁移的到达地B为上海,出发地A为全国除去上海之外的地区,并假设相对于各省市输入上海的人数,上海向外输出的人数可忽略不计.假设返校高潮出现在2月底,利用全国除去上海的疫情预测数据,取输入率分别为0分别为1%,5%和10%,求解模型(3),从而得到预计进入上海的感染者人数分



布,如图4所示.

为了对比有输入人群和无输入人群对上海产生的 影响,先考虑无输入的情形,即利用1月23日至2月9日 (返程输入之前)的历史数据得到传染率与隔离率(见 表5).保持上述传染率与隔离率不变,取输入率θ分别 为0%,1%,5%,10%,求解模型(5),预测结果如图5所 示.



图 4 返程高峰期间进入上海的感染者人数



可以看到,随着输入率θ的增加,原本稳定的疫情 发展将随之发生改变.外部输入人群将使得累计确诊 人数增加,疫情将有可能二次暴发.不同输入率对应 的疫情分析数据见表6.

表 6 不同输入率下的疫情分析 Table 6 Predictions of infectious people under

different i	input	rates
-------------	-------	-------

输入率 θ	预测3月初的累计感染人数
0%	500人以下
1%	1000人左右
5%	3000人左右
10%	5000人左右





图 5 返程潮对上海的影响



笔者发现在维持原有防控措施(即隔离率ℓ)不变的 情况下,返程输入将对上海市的疫情产生显著的影响. 因此,建议上海市政府在返程潮期间加大防控力度, 从而更好地控制上海疫情的发展.

5 总结

针对新型冠状病毒肺炎疫情,本文在文献[2]提出 的一类时滞动力学模型(TDD-NCP模型)的基础上, 通过引入输入源项来模拟春运后的返程潮对疾病传 播的影响.数值实验显示,疫情暴发初期再生数相对 较大,而后随着政府防控力度的增加而逐渐减小.此 外,本文还分析了不同输入量对上海市疫情发展的影 响:随着输入量的递增,上海市的感染人数将显著上 升.因此,建议上海市政府在返程潮期间,进一步加强 防控措施,避免造成疫情的二次暴发.近日,各地疫情 受到海外输入病例的影响,这种输入型病例亦符合本 文的模型,但由于其官方数据暂时无法获取,将在后 续研究中加入这方面的模拟和预测.

致谢

感谢上海财经大学计算科学与金融数据研究中心 提供的支持.感谢复旦大学汤善健教授、陆帅教 授、邵年同学、上海财经大学陈瑜博士、许伯熹博 士、罗心悦同学、浙江大学徐翔研究员、东南大学钟 敏副教授、中泰证券边敬云女士的帮助.特别感谢复 旦大学程晋教授对本文的指导.

参考文献:

- CHEN Y, CHENG J, JIANG Y, et al. A time delay dynamical model for outbreak of 2019-ncov and the parameter identification. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2020, DOI: 10.1515/jiip-2020-0010.
- [2] YAN Yue, CHEN Yu, LIU Keji, et al. Modeling and prediction for the trend of outbreak of NCP based on a time-delay dynamic system. *Scientia Sinica Mathematica*, 2020, 50(3): 1 – 8, DOI: 10.1360/SSM-2020-0026.

(严阅, 陈瑜, 刘可伋, 等. 基于一类时滞动力学系统对新型冠状病毒 肺炎疫情的建模和预测. 中国科学: 数学, 2020, 50(3): 1-8, DOI: 10.1360/SSM-2020-0026.)

[3] MA Zhien, ZHOU Yicang. Mathematical Modeling and Research on the Dynamics of Infectious Diseases. Beijing: Science Press, 2004. (马知恩,周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究. 北京: 科学出版.) 社,2004.

- [4] LIU Chang, DING Guanghong, GONG Jianqiu, et al. Mathematical modeling on the prediction and warning of SARS. *Chinese Science Bulletin*, 2004, 49(21): 2245 2251.
 (刘畅, 丁光宏, 龚剑秋, 等. SARS爆发预测和预警的数学模型研究. 科学通报, 2004, 49(21): 2245 2251.)
- [5] XIA C, WANG Z, ZHENG C, et al. A new coupled disease-awareness spreading model with mass media on multiplex networks. *Information Sciences*, 2019, 471: 185 – 200.
- [6] WANG Z, GUO Q, SUN S, et al. The impact of awareness diffusion on SIR-like epidemics in multiplex networks. *Applied Mathematics* and Computation, 2019, 349: 134 – 147.
- [7] LI Q, GUAN X, WU P, et al. Early transmission dynamics in Wuhan, China, of novel coronavirus infected pneumonia. *The New England Journal of Medicine*, 2020, DOI: 10.1056/NEJMoa2001316.
- [8] CHEN Y, CHENG J, JIANG Y et al. A time delay dynamic system with external source for the local outbreak of 2019-nCoV. *Applicable Analysis*, 2020, DOI: 10.1080/00036811.2020.1732857.
- [9] YANG Z, ZENG Z, WANG K, et al. Modified SEIR and AI prediction of the epidemics trend of COVID–19 in China under public health interventions. *Journal of Thoracic Disease*, 2020, DOI: 10.21037/jtd.2020.02.64.
- [10] KALTENBACHER B, NEUBAUER A, SCHERZER O. Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-posed Problems. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2008.
- [11] SOMERSALO E, KAIPIO J. Statistical and Computational Inverse Problems. Translated by LIU Yikan, XU Dinghua, CHENG Jin. Beijing: Science Press, 2018.
 (SOMERSALO E, KAIPIO J. 统计与计算反问题. 刘逸侃, 徐定华, 程晋(译). 北京: 科学出版社, 2018.)
- [12] SHAO N, CHENG J, CHEN W. The reproductive number R_0 of COVID–19 based on estimate of a statistical time delay dynamical system. https://www.medrxiv.org/content/early/2020/02/20/2020.02.17.20023747.1.
- [13] WALLINGA J, LIPSITCH M. How generation intervals shape the relationship between growth rates and reproductive numbers. *Proceedings of the Royal Society B*, 2007, 274(1609): 599 – 604.

作者简介:

刘可伋研究员,目前研究方向为反问题的理论与算法,E-mail: liu.keji@sufe.edu.cn;

江 渝 副教授,目前研究方向为数学物理反问题,E-mail: jiang.yu@mail.shufe.edu.cn;

严 阅 讲师,目前研究方向为偏微分方程数值解,E-mail: yan.yue@mail.shufe.edu.cn;

陈文斌教授,目前研究方向为偏微分方程数值解, E-mail: wbchen@fudan.edu.cn.