

# 基于累积平方误差-总平方波动指标的模型预测控制器 性能评价及自愈

张 浩, 赵 众<sup>†</sup>

(北京化工大学 信息科学与技术学院, 北京 100029)

**摘要:** 本文针对模型预测控制器实际投运中遇到性能下降问题, 提出了一种基于累积平方误差(ISE)-总平方波动(TSV)指标的模型预测控制器性能评价及自愈方法. 先基于累积平方误差(ISE)和总平方波动(TSV)指标对模型预测控制器进行实时性能评价, 再根据无限时域模型预测控制器(MPC)的逆特性, 基于ISE-TSV指标的分析, 提出了一种MPC控制器的鲁棒自愈方法. 在二级倒立摆的模型预测控制仿真与实验结果证明了所提自愈方法的可行性及有效性.

**关键词:** 模型预测控制器; 控制器性能评价; 控制器参数自愈; 累积平方误差-总平方波动指标; 鲁棒性

**引用格式:** 张浩, 赵众. 基于累积平方误差-总平方波动指标的模型预测控制器性能评价及自愈. 控制理论与应用, 2020, 37(x): xxx - xxx

DOI: 10.7641/CTA.2020.00104

## Integral squared error-total squared variation index based model predictive controller performance assessment and self-healing

ZHANG Hao, ZHAO Zhong<sup>†</sup>

(School of Information Science and Technology, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

**Abstract:** Model predictive control (MPC) as an advanced process control method are widely applied to many industrial processes. The performance of the MPC controller may gradually decrease due to various reasons. To solve the problem that the performance of the model predictive controller decreasing in real applications, a performance assessment and self-healing method for the model predictive controller based on the integral squared error (ISE) and total squared variation(TSV) index is proposed in this work. First, the integral squared error (ISE) and total squared variation (TSV) index are proposed to evaluate the performance of model predictive controller and then the ISE-TSV indicator is converted into a linear matrix inequality form according to the process constraints. After that, a self-healing method for MPC controller based on the time domain MPC inverse property is derived to resume the MPC controller performance and improve its on-line robustness. Considering that the controlled object contains uncertain terms and the range of model mismatch is in an interval, the parameters of the MPC controller are updated with the proposed self-healing algorithm to make the optimized controller parameters have stronger robustness. The application results with the proposed method in the linear double inverted pendulum model predictive control experiments have verified its feasibility and effectiveness.

**Key words:** model predictive controller; performance assessment; self-healing; integral squared error(ISE)-total squared variation(TSV) index; robustness

**Citation:** ZHANG Hao, ZHAO Zhong. Integral squared error-total squared variation index based model predictive controller performance assessment and self-healing. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(x): xxx - xxx

### 1 引言

模型预测控制(model predictive control, MPC)作为一类先进控制方法在航空航天, 石油化工, 发电等

工业领域应用范围广, MPC控制器运行正常并保持良好的控制器性能具有非常重要的实际意义<sup>[1]</sup>.

在工业实践中, MPC在投用初期普遍满足性能要

收稿日期: xxxx-xx-xx; 录用日期: xxxx-xx-xx.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: zhaozhong@mail.buct.edu.cn; Tel.: +86 13671377301.

本文责任编辑:

2019年工业互联网创新发展工程基于工业互联网平台的生产线数字孪生系统(TC19084DY), 北京市自然科学基金(4172044), 朝阳区协同创新项目(CYXC1707)资助.

Supported by 2019 Industrial Internet Innovation Development Project Digital Twin System for Production Line Based on Industrial Internet Platform (TC19084DY), Beijing Natural Science Foundation (4172044), Chaoyang District Collaborative Innovation Project (CYXC1707).

求,而在经过一段时间的运行后,由于各种因素,MPC控制器的性能可能出现下降.为了解决这个问题,通过对MPC控制器进行实时性能评估,及时发现MPC控制器性能的变化并进行控制器参数的保性能自愈研究正成为近年来的研究热点<sup>[2]</sup>.

1989年,Harris<sup>[3]</sup>提出最小方差控制(minimum variance control, MVC)性能评价指标,基于此基准进行控制器性能评价.Desborough<sup>[4]</sup>在1993年对MVC性能指标实行了改进,计算得到实际方差与MVC指标之比,并将此作为控制器性能评价基准,当比值更接近1时,表示性能更好.Grimbl提出了广义MVC准则<sup>[5]</sup>,针对MVC没有考虑约束,难以在实际中应用的问题进行了改进.Huang B和Shah在1999年提出了线性二次高斯指标(linear quadratic Gaussian, LQG)作为MPC性能评价的基准,不考虑约束,通过选取输入输出方差的加权,得到一条性能评价曲线作为基准,对MPC控制器性能进行评价<sup>[6]</sup>.Yanting X提出了基于马氏距离(Mahalanobis distance, MDBI)及其推断基准的总体性能指标,用于MPC性能监控<sup>[7]</sup>.在以往的控制自愈研究中, Lee J H, Yu Z H通过闭环频域分析来调整控制器性能<sup>[8]</sup>.Liu W, Wang G探索了几种多目标优化技术并提出了一种于所开发的递归多目标优化算法的预测控制器自动时序程序来研究控制器性能自愈<sup>[9]</sup>.Ali E, Ai-Ghazzawi基于模糊逻辑探索开发了一种自动在线调整策略用以调整预测步长和输入输出权重矩阵,进而实现MPC自愈<sup>[10]</sup>.Peng J K, Manthanwar A M等人提出了一个基于随机的最小退避工作点选择问题,以使MPC性能自愈<sup>[11]</sup>.Stefano和Alberto通过采用控制器匹配整定MPC<sup>[12]</sup>.Francisco M, Vega P探索了MPC参数自动调整的多目标优化方法<sup>[13]</sup>.Jabbour N, Mademlis C提出了一种将模型参考自适应方法与模糊逻辑技术相结合,可以在线自动估计和微调离散时间MPC参数的新方法<sup>[14]</sup>.

本文采用累积平方误差(integral squared error, ISE)和总平方波动(total squared variation, TSV)<sup>[15]</sup>相结合的性能指标作为MPC的实时评价指标,并利用无限时域MPC的逆最优特性来修正MPC控制器参数,实现MPC保性能自愈.在直线二级倒立摆的MPC控制实验结果证实了所提方法的可行性和有效性.

## 2 基于ISE-TSV指标的控制器性能评价

本文的研究对象为如下的线性不确定性离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + Bu(k) + Ew(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $A$ 为系统的状态矩阵,  $B$ 为系统的输入矩阵,  $C$ 为系统的输出矩阵:  $x(k)$ 表示状态的离散形式,

$u(k)$ 表示输入的离散形式,  $y(k)$ 表示输出的离散形式.  $E$ 代表系统噪声的传递矩阵;  $w(k)$ 是均值为0的高斯白噪声.其中 $\Delta A = DFH$ .  $D, F, H$ 是系统不确定性的表示.

控制律用状态反馈形式表示为:

$$u(k) = Kx(k), \quad (2)$$

由以上可以得到如下闭环系统:

$$x(k+1) = (A + \Delta A + BK)x(k) + Ew(k). \quad (3)$$

针对上述(3)闭环系统,使用累积平方误差(ISE)和总平方波动(TSV)分别衡量控制器抗干扰性能和控制消耗,对于性能的考虑更为综合.它们的定义<sup>[16]</sup>是:

$$\text{ISE} := \int_0^{\infty} y^2 dt \approx T_s \sum_{i=0}^{\infty} y^2(i), \quad (4)$$

$$\text{TSV} := \int_0^{\infty} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dt \approx \frac{1}{T_s} \sum_{i=0}^{\infty} u_{\Delta}^2(i). \quad (5)$$

其中 $T_s$ 是采样周期,  $u_{\Delta}(i) = u(i) - u(i-1)$ ,定义综合性能指标:

$$J := \text{ISE} + \rho \text{TSV}. \quad (6)$$

其中 $\rho \geq 0$ 是权重因子.显然,  $\rho$ 越接近于0意味着ISE(TSV)越重要(次要).ISE和TSV可以做归一化处理,将ISE和TSV除以各自的上限值,则权重系数 $\rho$ 可限定在范围 $[0, 1]$ 之内.

定义:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y} := \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N) \end{bmatrix}, \\ F := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (7)$$

$N$ 为有限个采样点,对 $\bar{u}$ 求差分,得到:

$$\bar{u}_{\Delta} = (I - F)\bar{u}, \quad (8)$$

所以,抗干扰性能为:

$$\text{ISE} = T_s \bar{y}^T \bar{y}, \quad (9)$$

以及控制消耗为:

$$\text{TSV} = \frac{1}{T_s} \bar{u}_{\Delta}^T \bar{u}_{\Delta}, \quad (10)$$

所以, 综合性能为:

$$J = \text{ISE} + \rho \text{TSV} = T_s \bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}} + \frac{\rho}{T_s} \bar{\mathbf{u}}_\Delta^T \bar{\mathbf{u}}_\Delta. \quad (11)$$

如果闭环系统稳定, 在系统达到稳态时, 状态协方差矩阵可表示为  $\Sigma_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \{E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)]\}$  [17], 那么可以得到:

$$\bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}} = NE(\bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}}) = N\Sigma_y, \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{u}} = NE(\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{u}}) = N\Sigma_u, \quad (13)$$

并且, 由  $E[(I - F)^T(I - F)] = 1$ , 可得, 综合性能指标为:

$$\begin{aligned} J &= T_s \bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}} + \frac{\rho}{T_s} \bar{\mathbf{u}}_\Delta^T \bar{\mathbf{u}}_\Delta \\ &= T_s N \Sigma_y + \frac{\rho}{T_s} N \Sigma_u. \end{aligned} \quad (14)$$

针对上述(3)闭环系统, ISE-TSV性能指标可以定义为:  $J = \text{ISE} + \rho \text{TSV} = T_s \bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}} + \frac{\rho}{T_s} \bar{\mathbf{u}}_\Delta^T \bar{\mathbf{u}}_\Delta$ , 将该指标的求解过程通过线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)解出 [18]:

如果  $\exists X > 0, \lambda > 0$  使得如下问题:

$$\text{s.t.} \quad \min_{X, W, Y_i, U_j} T_s N \sum_{i=1}^p Y_i + \frac{\rho}{T_s} N \sum_{j=1}^m U_j, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} -X & Z_1^T \\ Z_1 & -X + E\Sigma_w E^T \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_i & \phi_i C X \\ (C X)^T \phi_i^T & X \end{bmatrix} > 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_j & \phi_j Y \\ Y^T \phi_j^T & X \end{bmatrix} > 0. \quad (18)$$

有可行解, 并且  $Y = KX$ , 状态协方差  $\Sigma_x < X$ . 其中,  $Z_1 = (A + \Delta A)X + BY$ ,  $\Sigma_w$  表示高斯白噪声的协方差, 并且当  $\rho$  取一系列的值时, 可得到性能评价曲线以评价控制器的性能.

### 3 基于ISE-TSV指标的MPC控制器性能自愈

研究对象为(3)所示:  $x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + Bu(k) + Ew(k)$ . 对于系统中的输入  $u(k)$  和输出  $y(k)$ , 假定需要满足约束条件  $|y_i(k)| < \bar{y}_i^2$  以及  $|u_j(k)| < \bar{u}_j^2$ . 对于一个多变量系统而言,  $y_i(k)$  和  $u_j(k)$  则分别是  $y(k)$  和  $u(k)$  的第  $i$  或  $j$  个值. MPC 模型预测步长  $P$ , 控制步长  $M$ , 输出加权矩阵  $Q$  和输入加权矩阵  $R$  都是影响模型预测控制器性能的可调变量. 在优化性能指标  $\sum_{k=0}^{\infty} x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)$  下, 控制器调节的主要目标是求得加权矩阵  $Q$  和  $R$ , 在干扰  $w(k)$  的影响下, 设计的控制器能够满足  $|y_i(k)| < \bar{y}_i^2$  和  $|u_j(k)| < \bar{u}_j^2$  的约束条件 [19].

由式(4)-(14)可得, 将指标的目标函数作为一个考虑输入输出方差的综合指标:

$$\text{s.t.} \quad \min_{\Sigma_x} T_s N \sum_i^p \Sigma_{y_i} + \frac{\rho}{T_s} N \sum_j^m \Sigma_{u_j}, \quad (19)$$

$$(A + \Delta A + BK)\Sigma_x(A + \Delta A + BK)^T + E\Sigma_w E^T = \Sigma_x, \quad (20)$$

$$\Sigma_{y_i} = \varphi_i C \Sigma_x C^T \varphi_i^T, \quad (21)$$

$$\Sigma_{u_j} = \varphi_j K \Sigma_x K^T \varphi_j^T, \quad (22)$$

$$\Sigma_{y_i} < \bar{y}_i^2, i = 1, \dots, p, \quad (23)$$

$$\Sigma_{u_j} < \bar{u}_j^2, j = 1, \dots, m. \quad (24)$$

其中,  $\Sigma_{y_i}$  是稳态输出协方差矩阵  $\Sigma_y$  的对角线上的第  $i$  个元,  $\Sigma_{u_j}$  是稳态输入协方差矩阵  $\Sigma_u$  的对角线上的第  $j$  个元.

这里主要解决: 存在标称模型偏差, 在性能指标  $\min_{\Sigma_x} T_s N \sum_i^p \Sigma_{y_i} + \frac{\rho}{T_s} N \sum_j^m \Sigma_{u_j}$  下, 同时满足稳态状态协方差约束(19), 输入方差约束(24)以及输出方差约束(23)时, 求取过程反馈  $u(k) = Kx(k)$ . 而 ISE-TSV 问题可以通过转化为线性矩阵不等式来解出, 即:

**定理 1** 如果  $\exists X, W \geq 0$ , 以下优化问题有解:

$$\text{s.t.} \quad \min_{X, W, Y_i, U_j} T_s N \sum_{i=1}^p Y_i + \frac{\rho}{T_s} N \sum_{j=1}^m U_j, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} -X & Z_2^T \\ Z_2 & -X + E\Sigma_w E^T \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} Y_i & \varphi_i C X \\ (C X)^T \varphi_i^T & X \end{bmatrix} > 0, \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} U_j & \varphi_j W \\ W^T \varphi_j^T & X \end{bmatrix} > 0, \quad (28)$$

$$Y_i < \bar{y}_i^2, i = 1, \dots, p, \quad (29)$$

$$U_j < \bar{u}_j^2, j = 1, \dots, m. \quad (30)$$

其中,  $Z_2 = (A + \Delta A)X + BW$ . 那么  $u = Kx(k) = WX^{-1}x(k)$  为系统(3)的一个最小方差控制律, 并且状态协方差  $\Sigma_x$  需满足  $\Sigma_x < X$  的条件.

**证** 假设系统(3)稳定, 在系统达到稳态的情况下, 可以将状态协方差矩阵表示为如下形式  $\Sigma_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \{E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)]\}$ , 且  $\Sigma_x$  满足以下方程:

$$\begin{aligned} (A + \Delta A + BK)\Sigma_x(A + \Delta A + BK)^T - \\ \Sigma_x + E\Sigma_w E^T = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

根据输出, 输入方差的定义, 需分别满足:  $\Sigma_{y_i} = \varphi_i C \Sigma_x C^T \varphi_i^T$ ,  $\Sigma_{u_j} = \varphi_j K \Sigma_x K^T \varphi_j^T$ .

方差约束上界分别为  $\Sigma_{y_i} < \bar{y}_i^2$ ,  $\Sigma_{u_j} < \bar{u}_j^2$ , 若要

使得离散闭环系统稳定, 那么存在  $\Sigma_x < X$ , 使得:

$$\begin{aligned} & (A + \Delta A + BK)X(A + \Delta A + BK)^T - \\ & X + E\Sigma_w E^T < 0, \end{aligned} \quad (32)$$

并令  $Y = KX$ , 得:

$$\begin{aligned} & (AX + \Delta AX + BY)X^{-1}(A + \Delta A + BK)^T - \\ & X + E\Sigma_w E^T < 0, \end{aligned} \quad (33)$$

令:

$$\varphi_j C X C^T \varphi_j^T < Y_i, i = 1, \dots, p, \quad (34)$$

$$\varphi_j K X K^T \varphi_j^T < U_j, j = 1, \dots, m. \quad (35)$$

根据(34), (35), 可保证:  $T_s N \sum_i^p \Sigma_{y_i} + \frac{\rho}{T_s} N \sum_j^m \Sigma_{u_j}$

$$\leq T_s N \sum_{i=1}^p Y_i + \frac{\rho}{T_s} N \sum_{j=1}^m U_j.$$

因此,  $T_s N \sum_{i=1}^p Y_i + \frac{\rho}{T_s} N \sum_{j=1}^m U_j$  的最小化将保证  $T_s N \sum_i^p \Sigma_{y_i} + \frac{\rho}{T_s} N \sum_j^m \Sigma_{u_j}$  的最小化. 最终问题描述为:

$$\text{s.t.} \quad \min_{x, W, Y_i, U_j} T_s N \sum_{i=1}^p Y_i + \frac{\rho}{T_s} N \sum_{j=1}^m U_j, \quad (36)$$

$$(26), (27), (28), (29), (30).$$

使用Schur补<sup>[20]</sup>, 并且令  $W = KX$ , 可以得到ISE-TSV问题的LMI形式, 证毕.

从定理1中可以看出控制器的状态反馈解  $K^*$  可以通过  $K^* = W^* X^{*-1}$  来解出. 但若是遇到问题出现无可解的情况时, 可以适当调节输入与输出的方差上界  $\bar{u}_j^2$  和  $\bar{y}_i^2$ . MPC需要修正目标函数中的加权以提升控制器的鲁棒性能, 而ISE-TSV指标具有MPC逆最优特性, 成为了解决MPC控制器参数鲁棒自愈问题的一个新途径.

### 3.1 ISE-TSV问题与无限时域MPC

本文这里将无限时域的MPC问题等同于求解目标函数为  $\min_{u(k)} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^T \bar{Q} x(k) + u(k)^T R u(k)$ <sup>[18]</sup>.

#### 3.1.1 无限时域MPC

线性系统中的无限时域MPC的解可以等同于LQR控制问题<sup>[21]</sup>. 可表示为:

$$\text{s.t.} \quad \min_{u(k)} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^T \bar{Q} x(k) + u(k)^T R u(k), \quad (37)$$

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (38)$$

其中, 令  $\bar{Q} = C^T D C$  ( $D = \sum_{i=1}^p q_i \varphi_i \varphi_i^T$ , 其中,  $q_i \geq 0$ ,  $\varphi_i$  为单位列向量), 反馈控制器为  $u(k) = Kx(k)$ , 且

满足:

$$K = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P (A + \Delta A). \quad (39)$$

其中, 矩阵  $P$  满足:  $P = (A + \Delta A)^T P (A + \Delta A) - (A + \Delta A)^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P (A + \Delta A) + \bar{Q}$ .

#### 3.1.2 LQG控制

LQG控制问题<sup>[22]</sup>可以表示为:

$$\text{s.t.} \quad \min_{u(k)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T E[y(k)^T Q y(k) + u(k)^T R u(k)], \quad (40)$$

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + Bu(k) + Ew(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (41)$$

其中, 状态反馈控制器  $K = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P (A + \Delta A)$  中的  $P, Q$  的定义与(39)一样<sup>[23]</sup>.

#### 3.1.3 ISE-TSV控制问题

考虑以下ISE-TSV控制问题:

$$\text{s.t.} \quad \min_{x, W, Y_i, U_j} T_s N \sum_{i=1}^p Y_i + \frac{\rho}{T_s} N \sum_{j=1}^m U_j, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & ((A + \Delta A) + BK)\Sigma_x((A + \Delta A) + BK)^T + \\ & E\Sigma_w E^T = \Sigma_x, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\varphi_i C \Sigma_x C^T \varphi_i^T = Y_i, i = 1, \dots, p, \quad (44)$$

$$\varphi_j K \Sigma_x K^T \varphi_j^T = U_j, j = 1, \dots, m. \quad (45)$$

ISE-TSV问题的主要目标就是要在目标函数  $T_s N \sum_{i=1}^p Y_i + \frac{\rho}{T_s} N \sum_{j=1}^m U_j$  最小化时, 求解状态反馈  $K$ .

在以上3个问题中, 全部假定满足以下假设<sup>[18]</sup>:

**假设 1**  $R > 0, Q \geq 0$ .

**假设 2**  $(A + \Delta A, B)$  稳定.

**假设 3**  $(A + \Delta A, Q)$  能观.

**假设 4**  $(A + \Delta A, E\Sigma_w E^T)$  能控.

当假设1-4全部成立时, ISE-TSV问题(42)与无限时域MPC(37)具有一样的状态反馈解.

当假设1-4全部成立时, ISE-TSV问题(25)与具有相应的加权矩阵  $Q, R$  的无限时域MPC问题(37)有相同的状态反馈解  $K$ .

从此可得, 对于ISE-TSV问题中解得的状态反馈  $K$ , 总存有相应的无穷时域MPC的解与其对应. 可由给定的状态反馈  $K$  来求取无穷时域MPC的加权矩阵  $Q$  和  $R$ , 再根据Riccati方程更新  $K$ <sup>[24]</sup>.

### 3.2 MPC逆最优问题求解

逆最优定义: 已知系统\$(A, B)\$, 给定一个状态反馈增益\$K\$, 求加权矩阵\$Q\$和\$R\$, 使\$K\$成为系统\$(A, B)\$对应于性能指标(14)的最优反馈.

**定理 2** 考虑存在模型偏差, 如果\$\exists P \geq 0, Q \geq 0, R > 0, P\_1 > 0\$和对称矩阵\$T\_1, T\_2\$, 以下优化问题:

$$\text{s.t.} \quad \min_{P, P_1, T_1, T_2, Q, R} \rho_1 + \rho_2, \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 & S_1 \\ S_1^T & I_1 \end{bmatrix} > 0, \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} T_2 & S_2 \\ S_2^T & I_2 \end{bmatrix} > 0, \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} Q + P_1 & A + \Delta A \\ (A + \Delta A)^T & P_1^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad (49)$$

$$T_1 < \rho_1 I_1, \quad (50)$$

$$T_2 < \rho_2 I_2. \quad (51)$$

有解, 那么LQR逆最优问题可以解出\$Q, R\$. 其中, \$S\_1 = (A + \Delta A)^T P(A + \Delta A) - P - K^T R K - K^T B^T P B K + Q, S\_2 = R K + B^T P B K + B^T P(A + \Delta A)\$.

**证** LQR逆最优问题, 在文献 [25]中表述为: \$\exists Q \geq 0, R > 0, P \geq 0\$ 和 \$P\_1 > 0\$, 使得:

$$\begin{aligned} (A + \Delta A)^T P(A + \Delta A) - P - K^T R K - \\ K^T B^T P B K + Q = 0, \end{aligned} \quad (52)$$

$$R K + B^T P B K + B^T P(A + \Delta A) = 0, \quad (53)$$

$$(A + \Delta A)^T P_1(A + \Delta A) - P_1 < Q, \quad (54)$$

成立.

其中, 条件\$(A + \Delta A)^T P\_1(A + \Delta A) - P\_1 < Q\$可保证\$(A + \Delta A, Q)\$可测.

注意到, 方程(52)式和条件\$Q \geq 0\$, 可转化为不等式:

$$\begin{aligned} (A + \Delta A)^T P(A + \Delta A) - P - K^T R K - \\ K^T B^T P B K \leq 0. \end{aligned} \quad (55)$$

文献 [26]中因为方程(52)的求解, 不可转化为利用LMI求解的标准形式, 所以利用Schur补引理将式(55)变为标准LMI形式, 进行如下变形:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} T_1 & S_1 \\ S_1^T & I_1 \end{bmatrix} > 0, T_1 \leq \rho_1 I_1, \\ S_1 = (A + \Delta A)^T P(A + \Delta A) - P - \\ K^T R K - K^T B^T P B K. \end{cases} \quad (56)$$

\$T\_1\$表示对称矩阵, \$I\_1\$表示单位阵, \$\rho\_1\$表示标量. 利

用Schur补引理, 能够使得\$T\_1 - S\_1 S\_1^T > 0\$转化为\$\begin{bmatrix} T\_1 & S\_1 \\ S\_1^T & I\_1 \end{bmatrix} > 0\$. 然后通过式(56), 就可以解出(52)中的\$R\$和\$P\$.

同理可得:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} T_2 & S_2 \\ S_2^T & I_2 \end{bmatrix} > 0, T_2 \leq \rho_2 I_2, \\ S_2 = R K + B^T P B K + B^T P(A + \Delta A). \end{cases} \quad (57)$$

对条件(54), 利用Schur补引理将式(54), 转变为标准LMI形式, 变形得到\$\begin{bmatrix} Q + P\_1 & A + \Delta A \\ (A + \Delta A)^T & P\_1^{-1} \end{bmatrix} > 0\$, 保证\$(A + \Delta A, Q)\$可测.

通过以上步骤, LQR逆最优问题转化为LMI形式, 即\$\exists P \geq 0, Q \geq 0, R > 0, P\_1 > 0\$和对称矩阵\$T\_1, T\_2\$以下优化问题:

$$\text{s.t.} \quad \min_{P, P_1, T_1, T_2, Q, R} \rho_1 + \rho_2, \quad (58)$$

$$(47), (48), (49), (50), (51).$$

矩阵\$Q\$可通过(52)来求解, 证毕.

### 3.3 MPC自愈步骤

对于一个MPC控制器, 从根据ISE-TSV指标的性能监测及评价, 到调节MPC控制器参数, 整个工作过程如下图1所示.

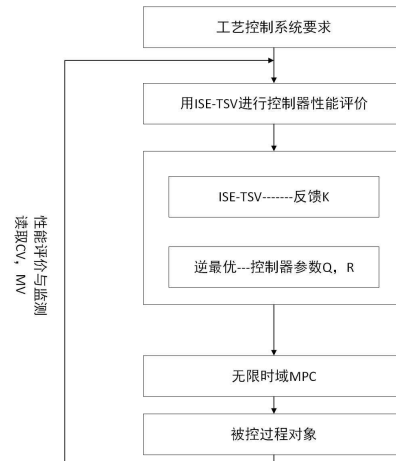


图 1 MPC控制器性能自愈流程图

Fig. 1 MPC controller performance self-healing flowchart

## 4 实验研究

使用直线二级倒立摆来进行仿真与实验研究, 本文实验研究使用的倒立摆装置是固高公司的GIP-100-L系列直线二级倒立摆 [27].

它是状态为6维的单输入三输出系统, 倒立摆模型结构如图2所示:

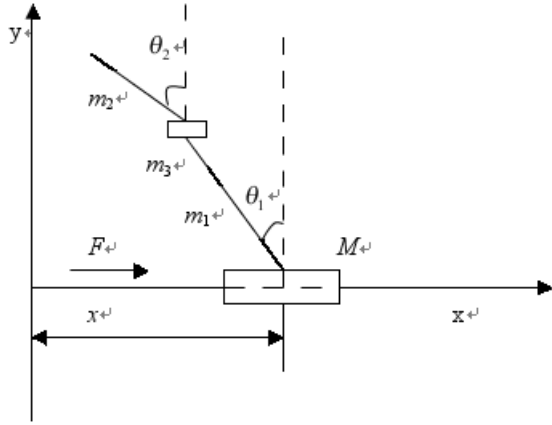


图2 直线二级倒立摆模型

Fig. 2 Linear double inverted pendulum model

倒立摆参数定义如下:

- $M$  小车质量 1.096 kg  
 $m_1$  摆杆1的质量 0.05 kg  
 $m_2$  摆杆2的质量 0.13 kg  
 $m_3$  质量块的质量 0.236 kg  
 $l_1$  摆杆1中心到转动中心的距离 0.0775 m  
 $l_2$  摆杆2中心到转动中心的距离 0.25 m  
 $\theta_1$  摆杆1与竖直方向的夹角  
 $\theta_2$  摆杆2与竖直方向的夹角  
 $F$  作用在系统上的外力  
 $x$  小车的位置

通过对直线二级倒立摆系统进行受力以及运动分析<sup>[27]</sup>, 并进行线性化可以得到如下状态空间表达式:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \end{cases} \quad (59)$$

其中:  $u$  为系统的输入外力  $F$ ,  $x, \theta$  定义同前. 在上式(59)中,  $a_1 = 86.69, a_2 = -21.62, a_3 = -40.31, a_4 = 39.45, b_1 = 1, b_2 = 6.64, b_3 = -0.088$ .

求解得系统特征根为(-10.0438 -5.0262 10.0438 5.0262 0 0), 出现了正根和零根, 系统不稳定. 用MATLAB 编程得到系统为完全能控系统和完全能

观系统.

根据主导极点原则, 选择所需的配置后的极点  $P = (-13, -13, -2 + 2i, -2 - 2i, -3 - 3)$ , 在MATLAB中输入矩阵  $A, B$  的值, 矩阵  $A, B$  分别是式(59)中的第1个式子的两个矩阵, 然后使用  $K = \text{acker}(A, B, P)$ , 得到反馈镇定律:

$$K = \begin{bmatrix} 4.7747 & 87.5320 & -115.3759 & & & \\ 6.3051 & 4.2308 & -18.2114 & & & \end{bmatrix}. \quad (60)$$

包含镇定器的广义系统矩阵如下:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' & a_5' & a_6' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \end{cases} \quad (61)$$

其中,  $a_1' = -12168, a_2' = -16068, a_3' = -9185, a_4' = -2840, a_5' = -470, a_6' = -36, b_1' = 1, b_2' = 6.64, b_3' = -0.088$ .

由于本文研究的是MPC自愈的问题, 需要人为构造使控制器性能下降的情况. 假设直线二级倒立摆装置在运行一段时间后其部分参数发生变化. 在装置运行初期,  $m_1 = 0.05, m_2 = 0.13, m_3 = 0.236, l_1 = 0.0775, l_2 = 0.25, g = 9.8$ , 为了人为构造模型失配的情况, 假设  $l_2 = 0.24, m_2 = 0.1152$ .

此时, 二级倒立摆装置的模型变为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \end{cases} \quad (62)$$

其中,  $h_1 = 84.51, h_2 = -19.41, h_3 = -40.93,$

$h_5 = 39.75, h_6 = 1, h_7 = 6.64, h_8 = -0.012$ .

利用特征值进行稳定性判断,发现该系统不稳定,利用上述反馈增益 $K$ ,此时稳定后的对象为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_1' & h_2' & h_3' & h_4' & h_5' & h_6' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_7' \\ h_8' \\ h_9' \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \end{cases} \quad (63)$$

其中,  $h_1' = -12246, h_2' = -16171, h_3' = -10128, h_4' = -3032, h_5' = -463, h_6' = -35, h_7' = 1, h_8' = 6.64, h_9' = -0.088$ . 此时,系统稳定,满足条件.

#### 4.1 MPC自愈参数

针对上述极点配置后的直线二级倒立摆装置,利用标称模型(61)来计算MPC控制器运行时加权参数 $Q, R$ . 然后对 $l_2 = 0.24, m_2 = 0.1152$ 的失配模型进行性能评价,然后根据ISE-TSV指标具有MPC逆最优特性得到失配后的自愈加权参数 $Q, R$ .

针对系统(61),选取输出方差上限 $\bar{y} = 0.3$ ,输入方差上限 $\bar{u} = 0.8$ ,以及扰动方差 $\Sigma_w = 0.01$ ,通过编程可以得到MPC控制器参数 $R = 0.0192, Q = \text{diag}\{32.4535 \ 10.4296 \ 6.7847 \ 0.3372 \ 0.0465 \ 0.0013\}$ . 把此参数用作控制器初始投运参数,将此参数下获得的控制器性能当作标称性能<sup>[28]</sup>.

将MPC控制器中的对象模型人为构造失配,使用ISE-TSV性能评价方法评价并监测控制器性能,当控制器性能降低到一定程度,在存在输入输出的方差约束及扰动方差的情况下,在ISE-TSV指标中,选取具有更强鲁棒性的目标函数,更新MPC控制器参数 $Q, R$ ,从而提高MPC控制器的鲁棒性.得到自愈后的MPC控制器的加权参数为 $R = 0.0253, Q = \text{diag}\{30.5573 \ 4.1953 \ 10.9698 \ 0.5986 \ 0.0355 \ 0.0004\}$ . 把自愈后的MPC参数投运,发现性能得到恢复.

通过MATLAB编程发现,当控制器性能下降在0.35%到0.36%之间时,MPC控制器参数 $R$ 的调节范围变化在0.0058到0.0137之间, $Q$ 的变化在 $\text{diag}\{7.5568 \ 2.4115 \ 1.5073 \ 0.0740 \ 0.0101 \ 0.0003\}$ 与 $\text{diag}\{11.8625 \ 3.7742 \ 2.3247 \ 0.1119 \ 0.0152 \ 0.0004\}$ 之间.

#### 4.2 基于ISE-TSV的性能评价及自愈仿真

设计一个满足目标函数(14)的MPC控制器(37),仿真回路如下图3所示:

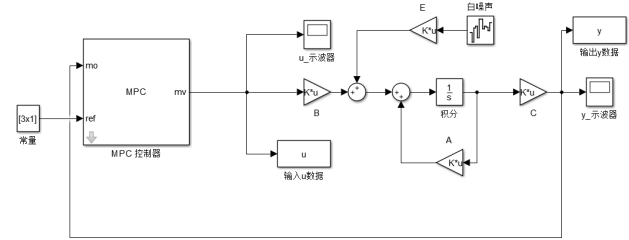


图3 MPC控制器仿真模型

Fig. 3 MPC controller simulation model

在以上simulink搭建的MPC控制器中,采用初始标称模型及初始MPC控制器参数,失配后的模型及初始MPC控制器参数,失配模型及自愈后的MPC控制器参数分别进行实验.将得到的数据使用MATLAB进行编程,得到如下图4的自愈前后曲线,其中good、bad、tuned分别表示模型失配前、失配后、自愈后的曲线,angle1、angle2、pos分别代表摆杆1的角度、摆杆2的角度、小车的位移.

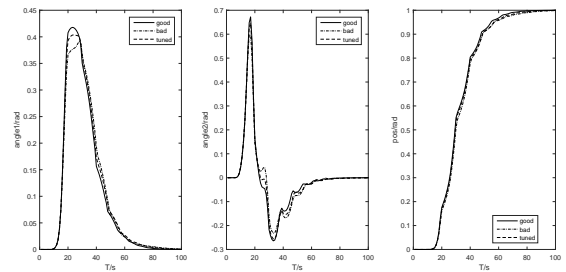


图4 自愈前后对比曲线

Fig. 4 Comparison curve before and after self-healing

从上图可以看出,当模型失配后,仍然使用初始控制器参数将会造成输出偏差增大,利用ISE-TSV自愈方法调整控制器参数后,减小了偏差,更接近失配之前的控制精度,并且控制器性能恢复到一定程度,这种自愈算法是可行且有效的.

利用ISE-TSV性能评价指标作为评价基准,可以得到系统的ISE-TSV性能评价<sup>[29]</sup>曲线如图5,可以明显看出系统的性能在进行自愈后得到一定程度的恢复,此自愈算法可行有效.

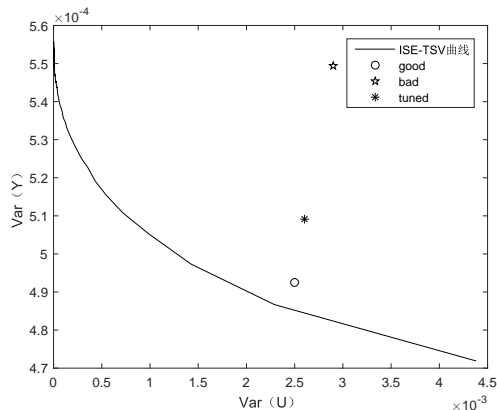


图5 ISE-TSV性能评价trade-off曲线

Fig. 5 ISE-TSV performance evaluation trade-off curve

利用ISE-TSV性能评价指标,计算3种情况下的性能指标.选择 $\rho = 1$ 时为基准点,此时 $J_{\text{ISE-TSV}} = 3.395 \times 10^{-3}$ ,那么:

$$\eta_1 = \frac{J_{\text{ISE-TSV}}}{J_{\text{good}}} = 0.9692, \quad (64)$$

$$\eta_2 = \frac{J_{\text{ISE-TSV}}}{J_{\text{bad}}} = 0.821, \quad (65)$$

$$\eta_3 = \frac{J_{\text{ISE-TSV}}}{J_{\text{tuned}}} = 0.9158. \quad (66)$$

其中, $J_{\text{good}}$ 、 $J_{\text{bad}}$ 、 $J_{\text{tuned}}$ 分别表示系统在good、bad、tuned时的稳态偏差, $\eta_1$ 、 $\eta_2$ 、 $\eta_3$ 表示相对应的性能指标.

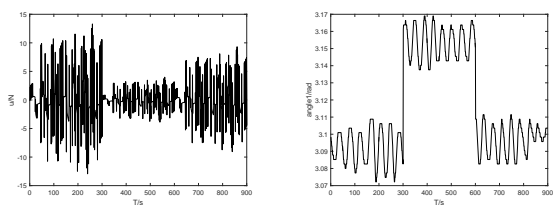
由此可以看出,在模型准确时,使用设计好的控制器,控制器性能达到要求;当模型失配,控制器性能就会下降;根据指标要求,调节控制器参数后,控制器性能得到一定的恢复.

### 4.3 实际运行

使用固高直线二级倒立摆装置MATLAB实时控制平台建立了如图6的时控模型. MPC控制器参数设置为根据初始标称模型(61)获得的参数<sup>[30]</sup>.

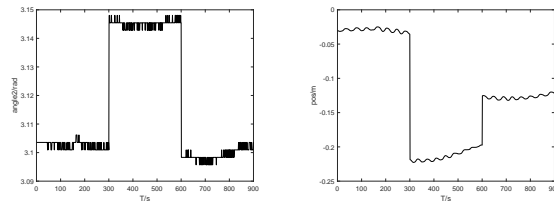
依次使用初始标称模型及初始MPC控制器参数,失配模型及初始MPC控制器参数,失配模型及自愈后的MPC控制器参数运行,获取三种情况下的数据.

按照自愈流程调节控制器参数,对输入 $u$ 限幅滤波<sup>[31]</sup>,可以得到如图7:



(a) 输入的外力u

(b) 摆杆1的角度angle1



(c) 摆杆2的角度angle2

(d) 小车位移pos

图7 MPC控制器自愈运行曲线

Fig. 7 MPC controller self-healing operation curve

通过MATLAB编程来计算自愈前后控制器输入与输出的稳态方差,并且得到自愈前后稳态方差对比的柱状图如图8,可以看出系统性能有一定恢复,此自愈算法有效.

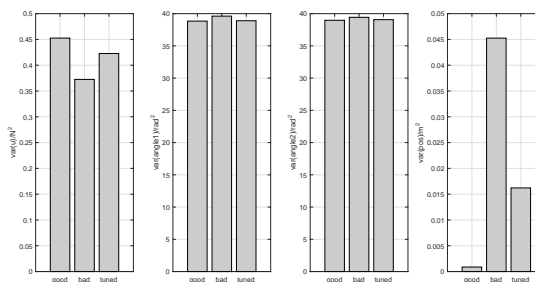


图8 稳态方差对比柱状图

Fig. 8 Histogram of steady-state variance before and after self-healing

## 5 结论

本文一种提出了基于ISE-TSV指标的模型预测控制器的性能评估和自愈方法.首先,使用累积平方误差(ISE)和总平方波动(TSV)指标来评估模型预测控制器的性能.然后,提出了一种基于无限时域MPC逆最优特性的MPC控制器参数鲁棒自愈方法,以提高控制器的在线鲁棒性.并且考虑被控对象含有不确定项的情况,当模型失配的范围在一个区间时,用自愈算法更新控制器的参数,这样得到的参数使得优化的控制器鲁棒性<sup>[32]</sup>更好.直线二级倒立摆装置的仿真与实验结果证明了该方法真实可行有效.

## 参考文献:

- [1]XI Yugeng. *Predictive Control*. Beijing: National Defense Industry Press, 1993: 10-18.  
(席裕庚. 预测控制. 北京: 国防工业出版社, 1993: 10-18.)
- [2]GE Baoming, LIN Fei, LI Guoguo. *Advanced Control Theory And Application*. Beijing: Machinery Industry Press, 2008: 5-12.  
(葛宝明, 林飞, 李国国. 先进控制理论及其应用. 北京: 机械工业出版社, 2008: 5-12.)
- [3]HARRIS T J. Assessment of control loop performance. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 2010, 67(5): 856-861.
- [4]DESBOROUGH L, HARRIS T. Performance assessment measures for univariate feedforward/feedback control. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1993, 71(4): 605-616.



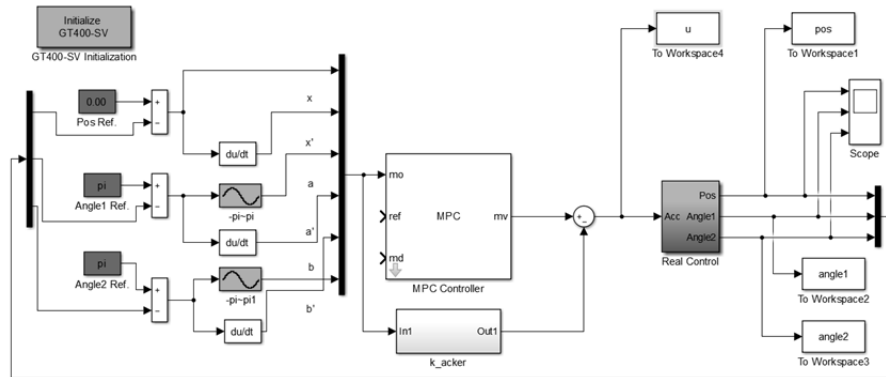


图 6 直线二级倒立摆装置MPC控制回路

Fig. 6 Linear secondary inverted pendulum device MPC control loop

- [5] GRIMBLE, M. J. A control weighted minimum-variance controller for non-minimum phase systems. *International Journal of Control*, 1981, 33(4): 751-762.
- [6] POUR N D, HUANG B, SHAH S L. Consistency of noise covariance estimation in joint input - output closed-loop subspace identification with application in LQG benchmarking. *Journal of Process Control*, 2009, 19(10): 1649-1657.
- [7] XU Yanting, ZHANG Guangming, LI Ning, et al. Data-driven performance monitoring for model predictive control using a mahalanobis distance based overall index. *Asian Journal of Control*, 2018, 21(2): 891-907.
- [8] LEE J H, YU Z H. Tuning of model predictive controllers for robust performance. *Computers & Chemical Engineering*, 1994, 18(1):15-37.
- [9] LIU W, WANG G. Auto tuning procedure for model based predictive controller. *2000 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. Nashville: IEEE, 2000, 5: 3421-3426.
- [10] ALI E, AI-GHAZZAWI A. On-line tuning of model predictive controllers using fuzzy logic. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 2003, 81(5):1041-1051.
- [11] PENG J K, MANTHANWAR A M, Chmielewski D J. On the tuning of predictive controller: the minimum back-off operating point selection problem. *Industrial Engineering Chemistry Research*, 2005, 44(20):7814-7822.
- [12] STEFANO D C, ALBERTO B. Model predictive control tuning by controller matching. *IEEE Transactions Automatic Control*. 2010, 55(1): 185-190.
- [13] FRANCISCO M, VEGA P. Automatic tuning of model predictive controllers based on multi-objective optimization. *Latin American Applied Research*, 2010, 40(3): 255-265.
- [14] Jabbour N, Mademlis C. Online parameters estimation and auto-tuning of a discrete-time model predictive speed controller for induction motor drives. *IEEE Transactions on Power Electronics*. 2018, 34(2): 1548-1559.
- [15] SKOGESTAD S. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Modeling, Identification and Control*, 2003, 13(4):291-309.
- [16] YU Z, WANG J. Performance assessment of static lead-lag feedforward controllers for disturbance rejection in PID control loops. *ISA Transactions*, 2016, 64(1):67-76.
- [17] YU Li, *Robust Control—Linear Matrix Inequality Approach*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002, 122-130.  
(俞立, 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法. 北京: 清华大学出版社, 2002, 122-130.)
- [18] CHMIELEWSKI D J, MANTHANWAR A M. On the tuning of predictive controllers: inverse optimality and the minimum variance covariance constrained control problem. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2004, 43(24):7807-7814.
- [19] PRASAD L B, TYAGI B, GUPTA H O. Optimal control of nonlinear inverted pendulum dynamical system with disturbance input using PID controller & LQR. *2011 IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineer*. Penang: IEEE, 2011: 540-545.
- [20] HUANG Weihong. *Properties and applications of matrix Schur complement*. Nanjing: Nanjing University of Information Science & Technology, 2008.  
(黄卫红. 矩阵Schur补的性质及其应用. 南京: 南京信息工程大学, 2008.)
- [21] HUANG J, LI X, YONG J. A linear-quadratic optimal control problem for mean-field stochastic differential equations in infinite horizon. *Mathematical Control and Related Fields (MCRF)*, 2015, 5(1):97-139.
- [22] BERNSTEIN D S, HADDAD W M. LQG control with an H.infinity performance bound: a riccati equation approach. *American Control Conference*. Georgia: IEEE, 1989: 293-305.
- [23] KADALI R, HUANG B. Controller performance analysis with LQG benchmark obtained under closed loop conditions. *ISA Transactions*, 2002, 41(4):521-537.
- [24] BASIN M, RODRIGUEZ-GONZALEZ J, FRIDMAN L. Optimal and robust control for linear state-delay systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2007, 344(6):830-845.
- [25] VLADIMIR B, Larin. About the inverse problem of optimal control. *Application Computer. Math*. 2003,2(2): 90-97.
- [26] LI J, WANG H, NIEMANN S. Relations between LMI and ARE with their applications to absolute stability criteriap. *Robustness Analysis and Optimal Control Automatica*, 1996, 32(10): 1361-1379.
- [27] GUGO High-tech Co, Ltd. *Inverted Pendulum And Automatic Control Principle Experiment*. Shenzhen: Googol Technology LTD, 2005: 135-154.  
(固高科技公司. 倒立摆与自动控制原理实验. 深圳: 固高科技有限公司, 2005: 135-154.)
- [28] LI Xuebing, MA Li, DING Shihong. A new second-order sliding mode control and its application to inverted pendulum. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(1): 194-203.  
(李雪冰, 马莉, 丁世宏. 一类新的二阶滑模控制方法及其在倒立摆控制中的应用. 自动化学报, 2015, 41(1): 193-202.)
- [29] HUANG H J, JENG J C. Monitoring and assessment of control performance for single loop systems. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2002, 41(5): 1297-1309.

- [30]ZHANG J L , ZHANG W . LQR self-adjusting based control for the planar double inverted pendulum. *Physics Procedia*, 2012, 24(part C):1669-1676.
- [31]BARABANOV A E . Limiting optimal adaptive filtering with unknown disturbance covariance. *Vestnik St Petersburg University Mathematics*, 2011, 44(4):244-251.
- [32]HUA C , ZHANG L , GUAN X , et al. Robust control of time-delay system with unknown control direction. *Robust Control for Nonlinear*

*Time-Delay Systems*. Singapore: Springer, 2018: 247-270.

作者简介:

张浩 硕士研究生, 目前研究方向为控制器性能评价及自愈,  
E-mail: zhhjessica@outlook.com;

赵众 教授, 目前研究方向为先进控制,过程监测,工业控制系统集成等, E-mail: zhaozhong@mail.buct.edu.cn.