

非线性随机多智能体系统的固定时间一致性

陈世明[†], 黎力超

(华东交通大学 电气与自动化工程学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 本文研究了在固定拓扑和切换拓扑下, 非线性随机多智能体系统的固定时间一致性问题. 首先针对固定拓扑, 设计了一种非线性控制协议, 利用随机Lyapunov稳定性理论和代数图论给出了实现固定时间一致性的充分条件和收敛时间的上界值, 随后将结论推广至切换拓扑, 设计的切换拓扑子图的并集只需要满足连通条件, 即可实现固定时间一致, 模型更具一般性. 最后, 两个仿真实例进一步验证了理论结果的有效性.

关键词: 多智能体系统; 固定时间一致性; 切换拓扑; 随机扰动

引用格式: 陈世明, 黎力超. 非线性随机多智能体系统的固定时间一致性. 控制理论与应用, 2021, 38(4): 540 – 546
DOI: 10.7641/CTA.2020.00527

Fixed-time consensus of nonlinear stochastic multi-agent systems

CHEN Shi-ming[†], LI Li-chao

(School of Electrical and Automation Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang Jiangxi 330013, China)

Abstract: In this paper, the fixed-time consensus problem of nonlinear stochastic multi-agent systems is investigated under fixed and switched topologies. Firstly, a novel protocol for fixed topology is proposed. The sufficient condition is provided for solving the fixed-time consensus. By using the stability theory of stochastic differential equation and algebraic graph theory, the validity of the protocol is proved. Meanwhile, the minimum upper bound of convergence time is given as well. Then, it is extended to the case of switching topology. The union of designed switching topology subgraphs merely demand to satisfy the connectivity condition, so that fixed-time consensus is achieved with more general model. Finally, two simulation examples further verify the effectiveness of the theoretical results.

Key words: multi-agent systems; fixed-time consensus; switching topologies; stochastic perturbation

Citation: CHEN Shiming, LI Lichao. Fixed-time consensus of nonlinear stochastic multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(4): 540 – 546

1 引言

近年来, 多智能体系统的协同控制在多飞行器集结^[1]、智能电网^[2]、多机器人协同编队^[3]、传感器网络^[4]等领域得到广泛应用. 一致性是协同控制的基础, 通常指的是多智能体系统中所有智能体的状态最终渐近收敛于一个相同的值.

在实际工程应用中, 尤其在要求较高精度和较快收敛速度的控制问题上, 通常需要在有限时间内达到收敛. 文献[5–6]研究了非理想环境下多智能体系统有限时间一致性. 但是, 若系统初始状态未知时, 无法计算收敛时间的上界值. 为排除系统初始状态对收敛时间的影响, 文献[7–11]解决了带有非线性动力学和不确定扰动的多智能体系统固定时间一致性问题, 使得系统全局稳定收敛时间与初始状态无关. 文献[10]基

于文献[9]做出改进, 在不使用速度信息的前提下, 使用状态观测器利用输出信息估计状态信息, 解决固定时间领导跟随一致性问题. 文献[11]考虑了更为一般的非线性模型, 实现了固定时间一致性, 为了减少能量损耗, 引入事件触发控制和间歇通信机制, 但系统无法按照期望构型收敛.

结合工程实践, 系统不可避免受通信能力的制约或外界不确定随机因素的干扰^[12]. 故由随机扰动、随机切换拓扑等因素构成的随机多智能体系统受到了广泛关注^[12–23]. 文献[13–18]研究了线性随机多智能体系统的平均一致性问题. 文献[13–14]研究了固定拓扑下随机多智能体一致性问题, 分别给出了无向拓扑和有向拓扑实现均方一致的充要条件. 文献[15–18]研究了切换拓扑下随机多智能体一致性问题, 系统中

收稿日期: 2020–08–12; 录用日期: 2020–12–30.

[†]通信作者. E-mail: c1977318@hotmail.com; Tel.: +86 791-87046179.

本文责任编辑: 左志强.

国家自然科学基金项目(61973118, 11662002), 江西省科技厅项目(20182BCB22009)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61973118, 11662002) and the Project of Science and Technology Department of Jiangxi Province (20182BCB22009).

乘性噪声的强度与智能体之间的状态差成正比. 文献[17]指出随机多智能体系统只有在适当的噪声强度下, 才能达到一致. 文献[18]设计了一种新的带有乘性噪声的一致性协议, 在该控制协议下, 收敛速度取决于Laplacian矩阵第二小特征值. 文献[19]研究了一类具有不确定非线性环节的随机多智能体系统领导跟随一致性问题. 文献[20]在文献[18]的基础上, 研究了高阶随机多智能体系统 p -阶矩稳定问题, 通过递推法设计了新型的非线性分布式虚拟控制器, 使得每个智能体设计的控制器只依赖于其自身状态变量和相邻多智能体的输出, 适用于更广泛的多智能体系统.

结合固定时间一致性的优势, 文献[21]研究了随机多智能体系统固定时间一致性, 提出了固定时间概率稳定的具体定义, 并导出了多智能体系统收敛时间的上界值. 文献[22]基于文献[21]讨论了Lyapunov函数有界和无界两种情况, 给出了相应的随机系统固定时间一致性判据定理. 文献[23]在文献[22]基础上分别研究了固定拓扑和切换拓扑下随机系统的固定时间一致性, 首先分析了控制协议中参数选择对收敛速度的影响. 随后讨论了不同的噪声强度对收敛时间的影响, 得出结论, 适合的噪声强度可以加速多智能体系统实现固定时间一致.

本文在文献[22]和文献[23]的基础上, 分别讨论了固定拓扑和切换拓扑下非线性随机多智能体系统的固定时间一致性的问题, 基于代数图论、随机Lyapunov稳定性理论给出了系统满足固定时间稳定的充分条件和与初始状态值无关的收敛时间的上界值. 基于文献[22]本文将通讯拓扑结构推广至切换拓扑, 控制协议更具实用性. 相较于文献[23]切换拓扑子图的并集必须是完全图, 本文只需满足连通条件; 同时考虑了系统中有非线性环节, 模型更具一般性, 更贴近于实际工程应用.

2 预备知识及问题描述

2.1 代数图论

智能体信息交流可用图 $G = (V, E, A)$ 表示, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 表示 N 个智能体的非空点集, $E \subseteq V \times V$ 表示智能体集合的边集. 在无向图中, 定义 $A = [a_{ij}]_{N \times N}$ 为加权邻接矩阵, 对角线元素 $a_{ii} = 0$, 若 $(v_i, v_j) = (v_j, v_i) \in E$, 则 $a_{ij} > 0$, 反之 $a_{ij} = 0$. 定义度矩阵 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$, 其中 $d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$. 图 G 的Laplacian矩阵可表示为 $L = [l_{ij}]_{N \times N} = D - A$, 0 是 L 的一个特征值, 其余特征值均有正实部, 有 $\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N = \lambda_{\max}$. 存在非零向量 $x \in \mathbb{R}^N$ 满足: $\min_{x \neq 0, x \perp \xi_1} \frac{x^T L_A x}{x^T x} = \lambda_2$, λ_2 被称为代数连通度.

引理 1^[22] 考虑 n 维随机微分方程满足如下形式:

$$dx = g(x)dt + h(x)dW(t), \quad (1)$$

这里: $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $W(t)$ 表示 m 维的独立布朗运动, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ 是连续函数且满足 $g(0) = h(0) = 0$, 对于任意函数 $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, 定义相关算子 $\mathcal{L}V$ 如下:

$$\mathcal{L}V = V_x \cdot g + \frac{1}{2} \text{tr}[h^T V_{xx} h]. \quad (2)$$

如果存在一个连续径向无界函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, 对于 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 算子 $\mathcal{L}V(x)$ 满足如下形式:

$$\mathcal{L}V \leq -\rho_1 V^p(t) - \rho_2 V^q(t), \quad (3)$$

则系统可达依概率固定时间一致, 其中常数 $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $0 < p < 1 < q$, 全局稳定收敛时间函数 Γ 满足

$$E(\Gamma) \leq \frac{1}{\rho_1(1-p)} + \frac{1}{\rho_2(q-1)}, \quad (4)$$

显然, $E(\Gamma)$ 满足 $0 < E(\Gamma) < \infty$, 是个随机动态变量.

引理 2^[8] 假设 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \geq 0$, $0 < p \leq 1$, $q > 1$, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \omega_i^p &\geq \left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^p, \\ \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\omega_i^p) \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\omega_i^q) \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

引理 3^[23] 对于任意无向图 $G(A)$, 存在一个实数集 $\Pi = \{y_1, y_2, \dots, y_N\} \in \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} y_i \vartheta(x_j, x_i) &= \\ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} (y_j - y_i) \vartheta(x_j, x_i), \end{aligned}$$

其中 $\vartheta(x_j, x_i) = -\vartheta(x_i, x_j)$, $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$.

2.2 问题描述

N 个智能体组成的非线性多智能体系统, 智能体动力学模型可表示为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) + f(t, x_i(t)), \quad (5)$$

其中: $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为非线性函数, 满足如下条件:

$$|f(t, x)| - |f(t, y)| \leq k|x - y|,$$

k 为任意常数, $x_i(t) \in \mathbb{R}$ 表示智能体 i 的状态, 定义向量 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_N(t)]^T \in \mathbb{R}^N$, $u_i(t) \in \mathbb{R}$ 是系统的控制输入, 系统初始状态 $x(0) = [x_1(0) \ \dots \ x_N(0)]^T \in \mathbb{R}^N$.

定义 1^[5] 引入 $\bar{x}$ 表示智能体的状态平均值, 若给定智能体任意状态初值 $x_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 有

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - \bar{x}(t)| = 0, i = 1, 2, \dots, N\} = 1, \quad (6)$$

则称闭环系统满足以概率1渐近时间平均一致性.

定义2^[22] 对于控制输入 $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 若给定智能体任意状态初值 $x_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, N$ 都可得一个与初始状态无关的常数 T , 而且 $E(T) \leq T$, 有

$$P\{\lim_{t \rightarrow T} |x_i(t) - \bar{x}(t)| = 0, i = 1, 2, \dots, N\} = 1, \quad (7)$$

则称闭环系统满足依概率固定时间平均一致性, T 被称为最大全局稳定收敛时间.

3 固定拓扑下多智能体系统的固定时间一致性

考虑多智能体系统(5)在固定拓扑下固定时间一致性问题, 智能体控制协议如下:

$$u_i(t) = \psi(t) - k_3 \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}(x_i(t) - x_j(t))\dot{W}(t), \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & -k_1 \left[\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)) \right]^{[1-\alpha]} - \\ & k_2 \left[\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)) \right]^{[1+\alpha]}, \\ & i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

$0 < \alpha < 1$, k_1, k_2, k_3 是正实数, $s^{[k]} = \text{sgn } s |s|^k$, 其中 $s \in \mathbb{R}$, $\text{sgn}()$ 是符号函数. 这里选取的 $W(t)$ 是在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的一维布朗运动. σ_{ij} 是智能体 i, j 之间的噪声强度, 当且仅当 $a_{ij} > 0$ 时, $\sigma_{ij} > 0$, 反之, $\sigma_{ij} = 0$. 在同一信道中智能体 i, j 之间的噪声强度通常被认为是相同的, 噪声强度矩阵 $\Theta = [\sigma_{ij}]_{N \times N}$, 满足 $\Theta = \Theta^T$. a_{ij} 受随机扰动影响可改写为: $a_{ij} \rightarrow a_{ij}(t) = a_{ij} + \sigma_{ij}\dot{W}(t)$.

定义智能体 i 在 t 时刻的状态误差

$$e_i(t) = x_i(t) - \bar{x}(t), \quad (9)$$

$e(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ \dots \ e_N(t)]^T$ 是群分歧向量, 根据式(1)(5)(8)可得Itô型随机方程

$$\begin{aligned} dx_i = & (f(t, x_i(t)) + \psi(t))dt - \\ & k_3 \sum_{j=0}^N \sigma_{ij}(x_i(t) - x_j(t))dW(t). \end{aligned} \quad (10)$$

由式(9)可以转化为误差动力系统

$$\begin{aligned} de_i = & (f(t, e_i(t)) - \psi'_i(t))dt + \\ & k_3 \sum_{j=0}^N \sigma_{ij}(e_j(t) - e_i(t))dW(t), \end{aligned} \quad (11)$$

其中:

$$\psi'_i(t) = k_1 \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}(e_i(t) - e_j(t)) \right]^{[1-\alpha]} +$$

$$k_2 \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}(e_i(t) - e_j(t)) \right]^{[1+\alpha]}.$$

图 $G(A)$ 和 $G(\Theta)$ 的Laplacian矩阵分别为 L_A, L_Θ , 把非线性项线性化, 式(11)可改写为向量形式:

$$\begin{aligned} de(t) = & [\eta e(t) + H(e(t))]dt - \\ & k_3 L_\Theta e(t)dW(t), \end{aligned} \quad (12)$$

其中:

$$H_i(e(t)) = -k_1 [a_{ij}(x_i(t) - x_j(t))]^{[1-\alpha]} -$$

$$k_2 [a_{ij}(x_i(t) - x_j(t))]^{[1+\alpha]},$$

$$H(e(t)) = [H_1(e(t)) \ H_2(e(t)) \ \dots \ H_N(e(t))]^T, \eta \text{ 是常数.}$$

定理1 考虑系统(5)在控制协议(8)作用下满足如下充分条件:

$$k_3^2 \lambda_{\max}^2(L_\Theta) \leq -2\eta. \quad (13)$$

系统(5)在任何初始条件下均可达依概率固定时间一致. $\lambda_{\max}(L_\Theta)$ 是矩阵 L_Θ 最大特征值, 最大收敛时间满足:

$$\begin{aligned} E(T_1) \leq & \frac{1}{\alpha k_1 2^{-\alpha} \lambda_2^{\frac{2-\alpha}{2}}(L_P)} + \\ & \frac{1}{\alpha k_2 N^{-\frac{\alpha}{2}} 2^\alpha \lambda_2^{\frac{2+\alpha}{2}}(L_Q)}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中: $P = [a_{ij}^{\frac{2}{2-\alpha}}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $Q = [a_{ij}^{\frac{2}{2+\alpha}}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, L_P, L_Q 分别是图 $G(P), G(Q)$ 的Laplacian矩阵.

证 考虑如下Lyapunov函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^2(t) = \frac{1}{2} e^T(t)e(t), \quad (15)$$

微分算子 $\{\mathcal{L}\}$ 作用在 $V(t)$ 上, 结合式(11)得

$$\mathcal{L}V = \eta e^T e + \sum_{i=1}^N e_i \sum_{j \in N_i} \psi'(t) + \frac{1}{2} k_3^2 e^T L_\Theta^2 e. \quad (16)$$

由引理2和引理3, 有

$$\begin{aligned} k_1 \sum_{i=1}^N e_i \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}(e_j(t) - e_i(t)) \right]^{[1-\alpha]} = \\ - \frac{k_1}{2} \sum_{(i,j) \in E} (a_{ij}^{\frac{1}{2-\alpha}} |e_j(t) - e_i(t)|)^{|2-\alpha|} \leq \\ - \frac{k_1}{2} \sum_{(i,j) \in E} (a_{ij}^{\frac{2}{2-\alpha}} |e_j(t) - e_i(t)|^2)^{\frac{|2-\alpha|}{2}}, \end{aligned} \quad (17)$$

令 $P = [a_{ij}^{\frac{2}{2-\alpha}}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 那么 P 可认为是图 $G(P)$ 的邻接矩阵, 令 $G(P)$ 的Laplacian矩阵为 L_P , $\lambda_2(L_P)$ 是图 $G(P)$ 的代数连通度, 根据引理2有

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in E} (a_{ij}^{\frac{2}{2-\alpha}} |e_j(t) - e_i(t)|^2) = \\ [2\lambda_2(L_P) e^T e]^{\frac{2-\alpha}{2}} \geq \end{aligned}$$

$$2^{\frac{2-\alpha}{2}} \lambda_2^{\frac{2-\alpha}{2}} (L_P) V^{\frac{2-\alpha}{2}}(t), \quad (18)$$

结合式(17)–(18)

$$k_1 \sum_{i=1}^N e_i \left[\sum_{j=0}^N a_{ij} (e_j(t) - e_i(t)) \right]^{[1-\alpha]} \leq -2^{\frac{1-\alpha}{2}} k_1 \lambda_2^{\frac{2-\alpha}{2}} (L_P) V^{\frac{2-\alpha}{2}}(t), \quad (19)$$

同理, 根据引理2对 $\psi'(t)$ 第2项变形得

$$k_2 \left[\sum_{j=0}^N a_{ij} (e_j(t) - e_i(t)) \right]^{[1+\alpha]} = -\frac{k_2}{2} \sum_{(i,j) \in E} (a_{ij}^{\frac{1}{2+\alpha}} |e_j - e_i|)^{2+\alpha}.$$

根据引理2, 有

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in E} (a_{ij}^{\frac{1}{2+\alpha}} |e_j - e_i|)^{2+\alpha} &= \\ N \left(\frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in E} (a_{ij}^{\frac{1}{2+\alpha}} |e_j - e_i|)^{2+\alpha} \right) &\geq \\ N \left(\frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in E} (a_{ij}^{\frac{1}{2+\alpha}} |e_j - e_i|)^2 \right)^{\frac{2+\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

类似地, 令 $Q = [a_{ij}^{\frac{2}{2+\alpha}}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 定义 $G(Q)$ 的代数连通度为 $\lambda_2(L_Q)$ 根据引理2–3, 可以得到

$$\begin{aligned} N \left[\frac{1}{N} \sum_{(i,j) \in E} (a_{ij}^{\frac{1}{2+\alpha}} |e_j - e_i|)^2 \right]^{\frac{2+\alpha}{2}} &\geq \\ N \left(\frac{1}{N} 2\lambda_2(L_Q) e^T e \right)^{\frac{2+\alpha}{2}} &= \\ N^{-\frac{\alpha}{2}} 2^{1+\alpha} \lambda_2^{\frac{2+\alpha}{2}} (L_Q) V^{\frac{2+\alpha}{2}}(t), \end{aligned}$$

因此

$$k_2 \left[\sum_{j=0}^N a_{ij} (e_j(t) - e_i(t)) \right]^{[1+\alpha]} \leq -k_2 N^{-\frac{\alpha}{2}} 2^{1+\alpha} \lambda_2^{\frac{2+\alpha}{2}} (L_Q) V^{\frac{2+\alpha}{2}}(t). \quad (20)$$

综上所述, 得到 $\mathcal{LV}$ 的上界

$$\begin{aligned} \mathcal{LV} &\leq 2\eta V(t) + k_3^2 \lambda_{\max}^2(L_\Theta) V(t) - \\ &2^{\frac{1-\alpha}{2}} k_1 \lambda_2^{\frac{2-\alpha}{2}} (L_P) V^{\frac{2-\alpha}{2}}(t) - \\ &k_2 N^{-\frac{\alpha}{2}} 2^{1+\alpha} \lambda_2^{\frac{2+\alpha}{2}} (L_Q) V^{\frac{2+\alpha}{2}}(t). \end{aligned}$$

显然, 若满足式(13), 则

$$\mathcal{LV} \leq -2^{\frac{1-\alpha}{2}} k_1 \lambda_2^{\frac{2-\alpha}{2}} (L_P) V^{\frac{2-\alpha}{2}}(t) - k_2 N^{-\frac{\alpha}{2}} 2^{1+\alpha} \lambda_2^{\frac{2+\alpha}{2}} (L_Q) V^{\frac{2+\alpha}{2}}(t). \quad (21)$$

基于引理1, 系统(5)在控制协议(8)的作用下满足依概率固定时间平均一致性的全局稳定收敛时间的期望 $E(T_1)$ 符合不等式(14). 证毕.

4 切换拓扑下多智能体系统的固定时间一致性

本节考虑切换拓扑下多智能体系统(5)的固定时间一致性, 令 $\Lambda = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 是有限个无向连通

图的集合, $G_r = G(V_r, E_r, A_r)$, 切换信号 $\delta(t): [0, +\infty) \rightarrow I_\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{R}^+$. 智能体控制协议如下:

$$u_i = \psi^{\delta(t)}(t) + k_3 \sum_{j \in N_i(t)} \sigma_{ij}^{\delta(t)} (x_i(t) - x_j(t)) \dot{W}(t), \quad (22)$$

其中: 当 $a_{ij}^{\delta(t)} \geq 0$, 则 $\sigma_{ij}^{\delta(t)} = \sigma_{ij} \geq 0$, 反之, $\sigma_{ij}^{\delta(t)} = 0$, 噪声强度矩阵满足 $\Theta_{\delta(t)} = \Theta_{\delta(t)}^T$,

$$\begin{aligned} \psi_i^{\delta(t)}(t) &= -k_1 \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}^{\delta(t)} (x_i(t) - x_j(t)) \right]^{[1-\alpha]} - \\ &k_2 \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}^{\delta(t)} (x_i(t) - x_j(t)) \right]^{[1+\alpha]}. \end{aligned}$$

定理2 假设 G_r 是无向连通图, 考虑具有切换拓扑 G_r 的系统(5), 满足以下充分条件:

$$k_3^2 \tilde{\lambda}^2 \leq -2\tilde{\eta}, \quad (23)$$

其中 $\tilde{\eta}$ 是常数, 系统(5)对于任意的初始状态 x_0 和切换信号 $\delta(t): [0, +\infty) \rightarrow I_\Lambda$ 都能满足依概率固定时间一致性, 且收敛时间 $E(T_2)$ 满足

$$E(T_2) \leq \frac{1}{\alpha k_1 2^{-\alpha} \bar{\lambda}_1^{\frac{2-\alpha}{2}}} + \frac{1}{\alpha k_2 2^\alpha N^{-\frac{\alpha}{2}} \bar{\lambda}_2^{\frac{2+\alpha}{2}}}, \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \min\{\lambda_2(L_{P_r}), P_r = [a_{ij}^{\frac{2}{2-\alpha}}(r)], G_r \in \Lambda\}, \\ \bar{\lambda}_2 &= \min\{\lambda_2(L_{Q_r}), Q_r = [a_{ij}^{\frac{2}{2+\alpha}}(r)], G_r \in \Lambda\}, \\ \tilde{\lambda} &= \max\{\lambda_{\max}(L_{\Theta_r}), G_r \in \Lambda\}. \end{aligned}$$

证 因为 G_r 在任何切换信号 $\delta(t)$ 都是无向连通图, 类似于定理1的证明误差动力系统可写成如下形式:

$$\begin{aligned} de_i &= (f(t, e_i(t)) - \bar{\psi}_i^{\delta(t)}(t))dt + \\ &k_3 \sum_{j=0}^N \sigma_{ij}^{\delta(t)} (e_j(t) - e_i(t))dW(t), \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_i^{\delta(t)}(t) &= k_1 \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}^{\delta(t)} (e_j(t) - e_i(t)) \right]^{[1-\alpha]} + \\ &k_2 \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}^{\delta(t)} (e_j(t) - e_i(t)) \right]^{[1+\alpha]}. \end{aligned}$$

Lyapunov函数(13)与拓扑结构无关, 故在切换拓扑下同样适用, $\mathcal{LV}$ 的上界是

$$\begin{aligned} \mathcal{LV} &\leq 2\tilde{\eta} - k_1 2^{2-\alpha} \bar{\lambda}_1^{\frac{2-\alpha}{2}} V^{\frac{2-\alpha}{2}}(t) - \\ &k_2 N^{-\frac{\alpha}{2}} 2^{2+\alpha} \bar{\lambda}_2^{\frac{2+\alpha}{2}} V^{\frac{2+\alpha}{2}}(t) + k_3^2 \tilde{\lambda}^2 V(t). \end{aligned} \quad (26)$$

当满足式(23)时, 有不等式

$$\mathcal{LV} \leq -k_1 2^{2-\alpha} \bar{\lambda}_1^{\frac{2-\alpha}{2}} V^{\frac{2-\alpha}{2}}(t) -$$

$$k_2 N^{\frac{\alpha}{2}} 2^{2+\alpha} \bar{\lambda}_2^{\frac{2+\alpha}{2}} V^{\frac{2+\alpha}{2}}(t). \quad (27)$$

根据引理1即可导出式(24), 故满足定理2时, 系统(5)可在切换拓扑下实现依概率固定时间一致性.

证毕.

5 仿真分析

考虑8个多智能体组成的系统, 智能体连接关系如图1所示.

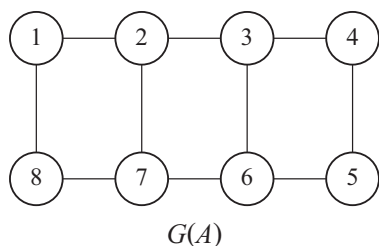


图1 总拓扑图

Fig. 1 Total topology

图1的Laplacian矩阵 L_A

$$L_A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

设定 $x(0) = [-3.5 \ -2.5 \ -1.5 \ -1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$. 根据定理1, 设定系统控制参数选择 $\alpha=0.8$, $\eta=-0.3$, $k_1=0.4$, $k_2=0.7$, $\sigma=1$, $f(t, x_i(t)) = -0.3 \times x_i(t)$, 智能体状态轨迹如图2所示.

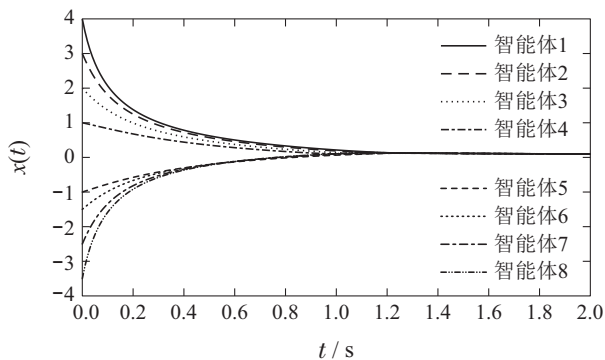


图2 固定拓扑下智能体状态轨迹

Fig. 2 State trajectories of agents under fixed topology

根据式(14)可以计算出系统在固定拓扑下固定收敛时间的上界 $E(T_1) \leq T_1 = 3.1 \text{ s} > 1.1 \text{ s}$, 在控制协议(8)作用下, 系统依概率达到固定时间一致.

图3给出的是智能体输入曲线, 可以看出智能体在达到固定时间一致后保持输入稳定. 图4给出的是随机噪声变化图.

考虑8个智能体的切换拓扑, 他们在一个切换周期下的拓扑集合 Ω 如图5所示. 图 G_r 的代数连通度 $\lambda_2(G_r) = 0.20155$.

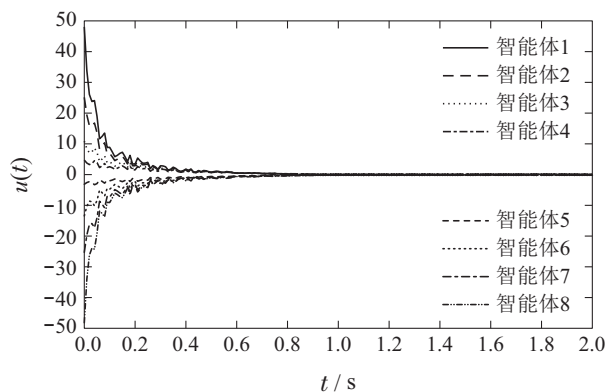


图3 固定拓扑下智能体控制输入

Fig. 3 Control input of agents under fixed topology

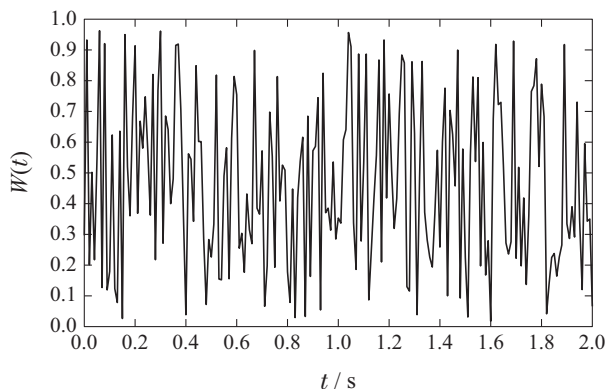
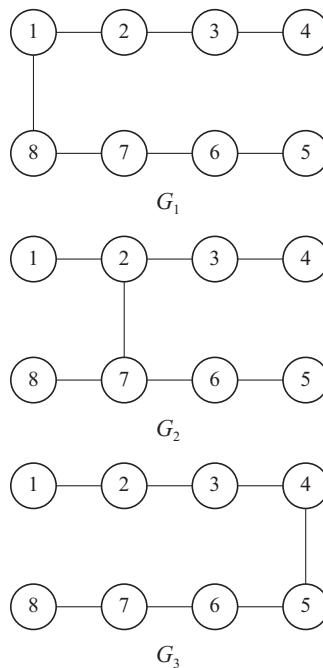


图4 随机噪声变化图

Fig. 4 Stochastic noise variation diagram



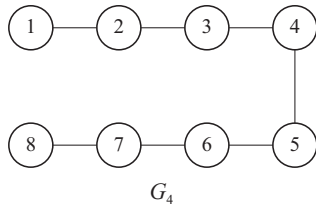


图5 切换拓扑图

Fig. 5 Switching topologies

根据定理2, 设置参数如下: 选择

$$f(t, x_i(t)) = -0.3 \times x_i(t), \alpha = 0.8, \\ k_1 = 2.6, k_2 = 3.7, k_3 = 1, \sigma = 1.$$

设定驻留时间 τ 为0.01 s, 0.1 s和0.5 s, 选取系统初始状态 $x(0) = [-4 \ -3 \ -2 \ -1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$. 根据式(24)可以计算出系统在切换拓扑下固定收敛时间的上界 $E(T_2) \leq T_2 = 3.28$ s. τ 为0.01 s, 0.1 s和0.5 s时, 智能体状态轨迹分别如图6上、中、下3个部分所示, 系统实际收敛时间均小于最大值, 故系统达到依概率固定时间一致. 图7是智能体输入曲线, 可以看出智能体在达到固定时间一致后保持输入稳定.

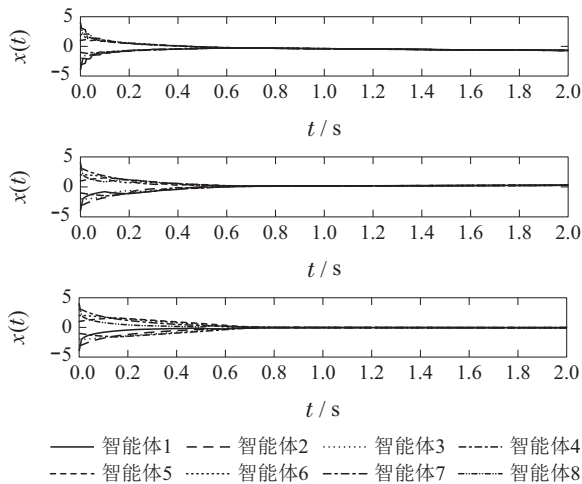


图6 切换拓扑下智能体状态轨迹

Fig. 6 State trajectories of agents under switching topologies

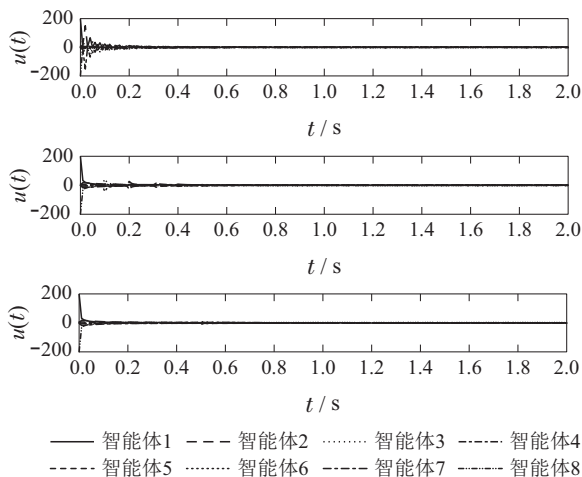


图7 切换拓扑下智能体控制输入

Fig. 7 Control input of agents under switching topologies

6 结论

本文研究了在固定拓扑和切换拓扑下, 带有自身非线性动力学的随机多智能体系统的固定时间一致性问题. 首先针对固定拓扑提出了一种控制协议, 结合随机Lyapunov稳定性理论和代数图论给出了实现固定时间一致性的充分条件并导出收敛时间的上界值, 进而把结论推广至切换拓扑, 本文切换拓扑子图的并集只需是连通图, 研究对象是带有非线性项的多智能体系统, 模型更具一般性. 下一步对基于事件触发非线性随机多智能体系统的固定时间一致性展开研究.

参考文献:

- [1] ANDERSEN H, SHEN X, ENG Y H, et al. Connected cooperative control of autonomous vehicles during unexpected road situations. *Mechanical Engineering*, 2017, 139(12): S3 – S7.
- [2] XU Y, ZHANG W, CHOW M, et al. A distributed model-free controller for enhancing power system transient frequency stability. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, 15(3): 1361 – 1371.
- [3] CHU X, PENG Z, WEN G, et al. Distributed formation tracking of multi-robot systems with nonholonomic constraint via event-triggered approach. *Neurocomputing*, 2018, 275: 121 – 131.
- [4] XIA Y Q, NA X T, SUN Z Q. Formation control and collision avoidance for multi-agent systems based on position estimation. *ISA Transactions*, 2016, 61: 287 – 296.
- [5] ZHENG Y, CHEN W, WANG L, et al. Finite-time consensus for stochastic multi-agent systems. *International Journal of Control*, 2011, 84(10): 1644 – 1652.
- [6] ZHANG Z, ZHANG Z, ZHANG H, et al. Finite-time stability analysis and stabilization for uncertain continuous-time system with time-varying delay. *Journal of The Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics*, 2015, 352(3): 1296 – 1317.
- [7] HONG H, YU W, WEN G, et al. Distributed robust fixed-time consensus for nonlinear and disturbed multiagent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 47(99): 1464 – 1473.
- [8] LIU J, YU Y, WANG Q, et al. Fixed-time event-triggered consensus control for multi-agent systems with nonlinear uncertainties. *Neurocomputing*, 2017, 260: 497 – 504.
- [9] WANG H, YU W, WEN G, et al. Fixed-time consensus of nonlinear multi-agent systems with general directed topologies. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 66(9): 1587 – 1591.
- [10] WEI X, YU W, WANG H, et al. An observer based fixed-time consensus control for second-order multi-agent systems with disturbances. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 66(2): 247 – 251.
- [11] LIU J, ZHANG Y, YU Y, et al. Fixed-time event-triggered consensus for nonlinear multiagent systems without continuous communications. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 49(11): 2221 – 2229.
- [12] LI T, ZHANG J. Mean square average-consensus under measurement noises and fixed topologies: Necessary and sufficient conditions. *Automatica*, 2009, 45(8): 1929 – 1936.
- [13] HUANG M, MANTON J H. Coordination and consensus of networked agents with noisy measurements: stochastic algorithms and asymptotic behavior. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 48(1): 134 – 161.

- [14] LI T, WU F, ZHANG J. Multi-agent consensus with relative-state-dependent measurement noises. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(9): 2463 – 2468.
- [15] LI T, ZHANG J. Consensus conditions of multi-agent systems with time-varying topologies and stochastic communication noises. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(9): 2043 – 2057.
- [16] CHENG L, HOU Z G, TAN M, et al. necessary and sufficient conditions for consensus of double-integrator multi-agent systems with measurement noises. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(8): 1958 – 1963.
- [17] SUN Y, WANG Y, ZHAO D. Flocking of multi-agent systems with multiplicative and independent measurement noises. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2015, 440: 81 – 89.
- [18] WANG Y, CHENG L, REN W, et al. Seeking consensus in networks of linear agents: communication noises and markovian switching topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(5): 1374 – 1379.
- [19] QIAN Y, WU X, LU J, et al. Consensus of second-order multi-agent systems with nonlinear dynamics and time delay. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(1): 495 – 503.
- [20] HUA C, LI Y, GUAN X, et al. Leader-following consensus for high-order nonlinear stochastic multiagent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2017, 47(8): 1882 – 1891.
- [21] YU J, YU S, LI J, et al. Fixed time consensus of stochastic multi-agent systems under undirected graph. *IECON 2017 — 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Beijing: IEEE, 2017: 5541 – 5545.
- [22] YU J, YU S, LI J, et al. Fixed-time stability theorem of stochastic nonlinear systems. *International Journal of Control*, 2019, 92(9): 2194 – 2200.
- [23] ZHAO L, SUN Y, DAI H, et al. Stochastic fixed-time consensus problem of multi-agent systems with fixed and switching topologies. *International Journal of Control*, 2020, DOI: 10.1080/00207179.2020.1736640.

作者简介:

陈世明 博士,教授,目前研究方向为复杂网络理论、机器人系统、优化算法, E-mail: c1977318@hotmail.com;

黎力超 硕士研究生,目前研究方向为多智能体协同控制, E-mail: Llichao2019@163.com.