

# 测量受限线性多智能体系统一致性迭代学习控制

魏永东, 李宗刚<sup>†</sup>, 杜亚江, 陈引娟

(兰州交通大学 机电工程学院, 甘肃 兰州 730070; 兰州交通大学机器人研究所, 甘肃 兰州 730070)

**摘要:** 本文针对通讯拓扑同时沿时间轴和迭代轴切换且存在测量受限的情形, 研究了基于迭代学习控制方法的连续线性多智能体系统输出一致性跟踪问题. 在系统通信拓扑始终含有以虚拟领航者为根节点的生成树, 以及所有智能体初态在每次迭代均可重置的条件下, 针对跟随者能够获得的局部信息而设计了测量受限分布式输出一致性协议. 然后, 利用 $\lambda$ 范数的方法和圆盘定理给出了所有跟随者的输出收敛到虚拟领导者输出的两个充分性条件, 其中之一可实现时变迭代学习增益的分布式计算. 最后, 仿真结果验证了所得结论的有效性.

**关键词:** 多智能体系统; 输出一致性; 测量受限; 迭代学习控制; 分布式协议; 切换拓扑

**引用格式:** 魏永东, 李宗刚, 杜亚江, 等. 测量受限线性多智能体系统一致性迭代学习控制. 控制理论与应用, 2021, 38(7): 963–970

DOI: 10.7641/CTA.2021.00751

## Iterative learning control for consensus of measurement-constrained linear multi-agent systems

WEI Yong-dong, LI Zong-gang<sup>†</sup>, DU Ya-jiang, CHEN Yin-juan

(School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070, China;  
Robotics Institute of Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070, China)

**Abstract:** In this paper, aiming at the situation where the communication topology is switched along the time axis and iterative axis, and with measurement restricted, the output consensus tracking problem of the continuous linear multi-agent system based on the iterative learning method is studied. Under the condition that the system communication topology always contains a spanning tree with the virtual leader as the root node, and the initial state of all agents can be reset in each iteration, a measurement-constrained distributed output consensus protocol designed for the local information that followers can obtain. And then, using  $\lambda$  norm method and the disc theorem give two sufficient conditions for the output of all followers to converge to the virtual leader's output, one of which can realize distributed real-time calculation of time-varying iterative learning gain. Finally, the corresponding simulation results verify the strategy effectiveness.

**Key words:** multi-agent system; output consensus; measurement restricted; iterative learning control; distributed protocol; switching topology

**Citation:** WEI Yongdong, LI Zonggang, DU Yajiang, et al. Iterative learning control for consensus of measurement-constrained linear multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(7): 963–970

## 1 引言

近年来, 由于在智能电网、多机器人系统协同等复杂网络化系统建模与控制中的广泛应用, 多智能体系统(multi-agent system, MAS)协同控制得到了深入研究, 并取得了丰硕的成果<sup>[1–5]</sup>.

在多智能体系统的研究中, 人们采用了多种经典控制方法, 包括在给定时间区间内能快速跟踪期望轨迹的迭代学习(iterative learning control, ILC)方

法<sup>[6–9]</sup>. 对于连续的系统, 文献[10]建立相应分布式ILC控制律, 保证输入输出型线性系统的MAS在给定时间区间达成一致性. 文献[11]研究了具有不确定性和存在扰动情形下的二阶多智能体系统ILC一致性问题. 文献[12]基于给出的初态可学习分布式ILC协议, 研究了固定拓扑结构下非线性多智能体系统的一致性问题. 而对于离散的系统, 文献[13]中的拓扑结构在有限区间的时间轴和无限增加的迭代轴双变化, 根据

收稿日期: 2020–10–27; 录用日期: 2021–03–17.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: lizongg@126.com; Tel.: +86 15117263527.

本文责任编辑: 侯忠生.

国家自然科学基金项目(61663020), 甘肃省高等学校科研项目成果转化项目(2018D–10), 兰州交通大学“百人计划”项目资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61663020), the Gansu Provincial University Research Project Achievement Transformation Project (2018D–10) and the Lanzhou Jiaotong University's "Hundred Talents Program" Project.

个体智能体所能获得的局部信息建立的分布式ILC更新律保证了线性系统MAS完成编队. 文献[14]考虑了存在时间延时和拓扑结构变化的情况, 根据局部信息建立的分布式ILC能够保证所有线性系统智能体达成输出一致性. 文献[15]在面对拓扑结构改变、初态漂移和存在扰动情况, 使用分布式ILC的方法仍能使非线性系统的MAS完成编队. 值得注意的是, 将ILC代入到MAS中, 很多变量将会是沿时间轴和迭代轴双变化的, 这增加了保证MAS达成一致性对通信拓扑结构的要求. 若在此情况下, 若通信拓扑也是沿时间轴和迭代轴双变化的, 这很自然的使整个MAS变成了一个二维(2D)的动态变化系统<sup>[14]</sup>. 此外, 在变拓扑条件下ILC学习增益的求解大都要求系统通讯拓扑结构的变化规律已知<sup>[12-15]</sup>. 在实际应用中, 传感器测量范围有限在某些情形下也对多智能体系统能否求解一致性问题带来了挑战, 针对这一问题也取得了一些成果. 文献[16]研究了具有固定拓扑且存在输入饱和的一阶多智能体一致性问题. 文献[17]研究固定和变化的无向拓扑结构下输入饱和的情况. 文献[18]研究了固定无向拓扑结构下, 个体动态特性为离散系统且存在输入饱和的情况. 文献[19]研究了在无向拓扑结构下, 存在输出饱和且基于事件触发机制下多智能体一致性问题. 此外, 文献[20]考虑了测量受限与存在测量噪声的影响, 用饱和函数对测量受限进行建模, 给出了实际测量值与输出之间的函数关系, 建立了通讯拓扑仅沿时间轴切换时的一致性可解条件.

受文献[20]启发, 本文考虑连续正则线性多智能体系统测量受限一致性问题, 其中智能体之间的通信拓扑沿时间轴和迭代轴两个维度变化, 给出此类系统可解一致性的条件. 与文献[18]和文献[20]所考虑的离散线性系统相比, 由于测量受限的存在而引入了非光滑的饱和函数, 这为分析连续系统带来相关困难. 此外, 与单一变化或是固定无向拓扑结构相比, 本文采用分布式迭代学习控制方法且拓扑结构沿时间轴和迭代轴双变化, 这也为达成一致性增加了困难. 而且, 与文献[16-20]相比, 连续的正则线性系统中在状态和输出两处都由输入引入了测量值而非实时的真实值, 这为所探索的问题进一步的增加了困难.

## 2 问题描述

多智能体系统中个体之间的通讯拓扑利用有向图表示, 记为 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ , 其中:  $n$ 为智能体的个数,  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为顶点集合,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为边集,  $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ 为邻接矩阵,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $a_{ii} = 0$ . 当 $a_{ij} > 0$ 时,  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , 表明智能体 $i$ 能够接收到智能体 $j$ 的相关信息.  $\mathcal{N}_i = \{v_l \in \mathcal{V} : (v_l, v_i) \in \mathcal{E}\}$ 表示智能体 $v_i$ 的邻居集. 取 $d_i = \sum_{l=1}^n a_{il}$ , 图 $\mathcal{G}$ 的度矩阵表示为 $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ .  $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$ 为图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯

矩阵. 如果图 $\mathcal{G}$ 中至少存在一个顶点 $v_i$ , 对图中任一其他节点 $v_j$ , 总存在首尾相连的一组边 $(v_i, v_{i_1}), (v_{i_1}, v_{i_2}), \dots, (v_{i_{l-1}}, v_j)$ , 则称图 $\mathcal{G}$ 含有生成树. 此外,  $I$ 表示单位矩阵,  $A > 0 (A \geq 0)$ 表示矩阵 $A$ 的所有元素都为正(非负),  $\ell_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $A \otimes B$ 表示矩阵 $A$ 和 $B$ 的kronecker积.  $\text{diag}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 表示以 $x_i$ 为元素的对角矩阵.  $N_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $1_n = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^n$ .

考虑由 $n$ 个跟随着和1个虚拟领导者组成的多智能体系统一致性问题, 其跟随着 $v_i$ 的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k}(t) = A(t)x_{i,k}(t) + B(t)u_{i,k}(t), \\ y_{i,k}(t) = C(t)x_{i,k}(t) + D(t)u_{i,k}(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $i \in \ell_n$ ,  $k \in N_+$ 和 $t \in [T_1, T_2] (0 \leq T_1 < T_2)$ 分别表示迭代次数和时间区间;  $u_{i,k}(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $x_{i,k}(t) \in \mathbb{R}^n$ 和 $y_{i,k}(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别表示输入变量、状态变量和输出变量, 且有 $m \geq p$ .  $A(t), B(t), C(t), D(t)$ 为适准时变系统矩阵,  $D(t)$ 行满秩.

所考虑系统中的虚拟领导者 $v_0$ 的动力学方程形如系统(1), 系统矩阵仍为 $A(t), B(t), C(t), D(t)$ , 相应的期望输入为 $u_d(t)$ , 期望状态为 $x_d(t)$ , 期望输出为 $y_d(t)$ . 需要说明的是, 在本文所考虑的多智能体系统中, 只有部分跟随着能够获得虚拟领导者信息的情形. 当跟随着 $v_i (i \in \ell_n)$ 接收到虚拟领导者 $v_0$ 的信息时, 取 $q_{i,k}(t) = 1$ , 否则 $q_{i,k}(t) = 0$ . 令

$$\begin{cases} Q_k(t) = \text{diag}\{q_{1,k}(t), q_{2,k}(t), \dots, q_{n,k}(t)\}, \\ q_k(t) = [q_{1,k}(t) \ q_{2,k}(t) \ \dots \ q_{n,k}(t)]^T \end{cases} \quad (2)$$

表示 $t$ 时刻跟随着与虚拟领导者的关系矩阵. 则包含领导者和跟随着的多智能体系统通信拓扑可表示为 $\bar{\mathcal{G}}_k(t) = (\mathcal{V} \cup \{v_0\}, \bar{\mathcal{E}}_k(t), \bar{\mathcal{A}}_k(t))$ . 其中,  $\bar{\mathcal{E}}$ 为图 $\bar{\mathcal{G}}_k(t)$ 的边集, 图 $\bar{\mathcal{G}}_k(t)$ 的邻接矩阵为

$$\bar{\mathcal{A}}_k(t) = \left[ \begin{array}{c|c} A_k(t) & q_k(t) \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array} \right].$$

其中 $A_k(t) = [a_{ij,k}(t)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 此外, 跟随着 $v_i$ 的入度为 $\bar{d}_{i,k}(t) = \sum_{l=1}^n a_{il,k}(t) + q_{i,k}(t)$ , 图 $\bar{\mathcal{G}}_k(t)$ 度矩阵为 $\bar{\mathcal{D}}_k(t) = \text{diag}\{\bar{d}_{1,k}(t), \bar{d}_{2,k}(t), \dots, \bar{d}_{n,k}(t), 0\}$ , 相应的拉普拉斯矩阵为

$$\bar{\mathcal{L}}_k(t) = \bar{\mathcal{D}}_k(t) - \bar{\mathcal{A}}_k(t) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{L}_k(t) + Q_k(t) & -q_k(t) \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array} \right]. \quad (3)$$

跟随着 $v_i$ 的邻居集为

$$\bar{\mathcal{N}}_{i,k}(t) = \{v_l \in \mathcal{V} : (v_l, v_i) \in \bar{\mathcal{E}}_k(t), i \in 0 \cup \ell_n\}.$$

考虑跟随着智能体测量受限时由式(1)给出的多智能体系统一致性问题. 为此设 $r_0 > 0$ 为一给定常数, 领导者智能体的输出 $y_d(t)$ 的元满足 $\max_i |y_d^i| \leq r_0$ ,  $i$

$= 1, \dots, m$ . 跟随者智能体传感器的量程为  $[-r_0, r_0]$ . 智能体  $v_i$  与其邻居之间的通信方式如图 1 所示.

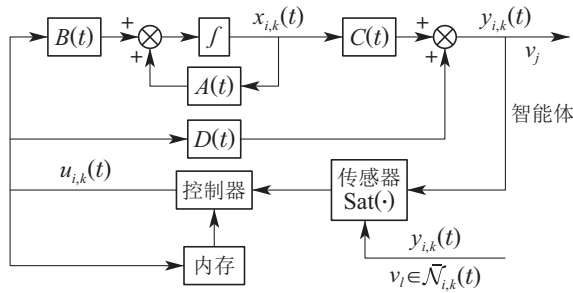


图 1 跟随者智能体  $v_i$  通信方式

Fig. 1 Communication mechanism of agent  $v_i$

定义跟随者  $v_i$  的输出误差信号为

$$e_{i,k}(t) = y_d(t) - y_{i,k}(t), \quad i \in \ell_n, \quad (4)$$

则所考虑一致性问题转化为设计一个分布式控制律  $u_{i,k}(t)$ , 使得对每一个跟随者智能体, 均有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [y_d(t) - y_{i,k}(t)] = \lim_{k \rightarrow \infty} e_{i,k}(t) = 0, \quad i \in \ell_n \quad (5)$$

成立. 为此, 在设计基于迭代学习方法的控制律之前, 先给出关于系统的两个约定条件, 以及将要用到的 3 个引理.

**假设 1** 对由式(1)给出的测量受限多智能体系统, 每次迭代时所有智能体的初态均能重置, 即有

$$x_{i,k}(T_1) = x_i(T_1) = x_d(T_1), \quad i \in \ell_n, k \in N_+ \quad (6)$$

成立.

**注 1** 在迭代学习控制中, 关于初态重置的假设是一个基本条件, 它在某些问题中是轨迹能够完美跟踪期望的保证<sup>[9]</sup>. 该方法引入多智能体系统领域后, 初态重置的条件也普遍存在<sup>[4, 12-13, 16]</sup>.

**假设 2** 对由式(1)给出的测量受限多智能体系统, 其通信拓扑由图  $\bar{\mathcal{G}}_k(t)$  表示. 假设  $\bar{\mathcal{G}}_k(t)$  始终含有以领导者  $v_0$  为根节点的生成树且信息切换拓扑的结构已知, 其中  $k \in N_+, t \in [T_1, T_2]$ .

**引理 1**<sup>[20]</sup> 考虑由式(1)给出的测量受限多智能体系统, 其通信拓扑图为  $\bar{\mathcal{G}}_k(t)$ , 拉普拉斯矩阵由式(3)表示. 若图  $\bar{\mathcal{G}}_k(t)$  满足假设 2, 则

$$\mathcal{L}_k(t) + Q_k(t)$$

的所有特征值具有正实部.

**引理 2**<sup>[21]</sup> 设  $x(t), y(t)$  是  $[T_1, T_2]$  上的实值连续函数,  $a \geq 0$ , 若

$$x(t) \leq c + \int_{T_1}^t (ax(\tau) + by(\tau))d\tau,$$

则

$$x(t) \leq ce^{a(t-T_1)} + \int_{T_1}^t e^{a(t-\tau)} by(\tau)d\tau.$$

**注 2** 引理 1 的证明参见文献[21]中附录部分关于 Bellman-Gronwall 的证明, 其中只需将积分下限由 0 变为  $T_1$  即可, 此处从略.

**引理 3**<sup>[12]</sup> 对任意给定的矩阵  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 若其谱半径  $\rho(M) < 1$ , 则至少存在一种矩阵范数  $\|\cdot\|_s$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\|M\|_s)^k = 0$ .

**定义 1**<sup>[12]</sup>  $\|M(t)\|_s$  表示矩阵  $M$  在  $t$  时刻的某种范数, 基于此  $s$ -范数定义一个  $\lambda$ -范数, 其表达式如下:

$$\|M(\cdot)\|_\lambda = \sup_{t \in [T_1, T_2]} e^{-\lambda t} \|M(t)\|,$$

其中  $\lambda > 0$  且可任意取值.

**注 3** 需要说明的是, 在文中其他部分范数  $\|\cdot\|_s$  均以  $\|\cdot\|$  代替.

### 3 多智能体系统一致性分析

为实现控制目标(5), 式(1)所示跟随者智能体基于迭代学习方法的控制律取为

$$u_{i,k+1}(t) = u_{i,k}(t) + \gamma_k(t) \left\{ \sum_{j \in N_i} a_{ij,k}(t) [\text{sat}(y_{j,k}(t)) - \text{sat}(y_{i,k}(t))] + q_{i,k}(t) [y_d(t) - \text{sat}(y_{i,k}(t))] \right\}, \quad (7)$$

其中:  $\gamma_k(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$  表示学习增益,  $\text{sat}(y_{i,k}(t)) = [\text{sat}(y_{i,k}^{(1)}(t)) \text{sat}(y_{i,k}^{(2)}(t)) \dots \text{sat}(y_{i,k}^{(m)}(t))]^T$ , 且有

$$\text{sat}(y_{i,k}^{(p)}(t)) = \begin{cases} r_0, & y_{i,k}^{(p)}(t) \geq r_0, \\ y_{i,k}^{(p)}(t), & -r_0 < y_{i,k}^{(p)}(t) < r_0, \\ -r_0, & y_{i,k}^{(p)}(t) \leq -r_0. \end{cases}$$

$p = 1, \dots, m$ . 为便于分析, 取

$$y_d(t) - \text{sat}(y_{i,k}(t)) = \sigma_{i,k}(t)(y_d(t) - y_{i,k}(t)),$$

其中  $\sigma_{i,k}(t) = \text{diag}\{\sigma_{i,k}^{(1)}(t), \dots, \sigma_{i,k}^{(m)}(t)\}$ , 其元素为

$$\sigma_{i,k}^{(p)}(t) = \begin{cases} \frac{y_d^{(p)}(t) - r_0}{y_d^{(p)}(t) - y_{i,k}^{(p)}(t)}, & y_{i,k}^{(p)}(t) \geq r_0, \\ 1, & -r_0 < y_{i,k}^{(p)}(t) < r_0, \\ \frac{y_d^{(p)}(t) + r_0}{y_d^{(p)}(t) - y_{i,k}^{(p)}(t)}, & y_{i,k}^{(p)}(t) \leq -r_0, \end{cases}$$

$p = 1, \dots, m$ . 则由  $0 < \sigma_{i,k}^{(p)}(t) \leq 1$ , 可得

$$0 < \|\sigma_{i,k}(t)\| \leq 1. \quad (8)$$

由式(1)和式(4), 所有跟随者智能体的输入、输出和误差信号可写为

$$\begin{cases} u_k(t) = [u_{1,k}^T(t) \ u_{2,k}^T(t) \ \dots \ u_{n,k}^T(t)]^T, \\ y_k(t) = [y_{1,k}^T(t) \ y_{2,k}^T(t) \ \dots \ y_{n,k}^T(t)]^T, \\ e_k(t) = [e_{1,k}^T(t) \ e_{2,k}^T(t) \ \dots \ e_{n,k}^T(t)]^T, \end{cases} \quad (9)$$

则式(7)所示跟随者智能体的控制律的向量形式为

$$\begin{aligned}
 u_{k+1}(t) = & u_k(t) + ((\mathcal{L}_k(t) + Q_k(t)) \otimes \gamma_k(t)) \times \\
 & \sigma_k(t)[1_n \otimes y_d(t) - y_k(t)] = \\
 & u_k(t) + ((\mathcal{L}_k(t) + Q_k(t)) \otimes \gamma_k(t))\sigma_k(t)e_k(t).
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

其中  $\sigma_k(t) = \text{diag}\{\sigma_{1,k}(t), \dots, \sigma_{n,k}(t)\}$ .

**定理 1** 考虑由式(1)给出的测量受限多智能体系统, 其通信拓扑满足假设2. 若跟随者智能体每次迭代初态满足假设1, 且其迭代学习控制律由式(7)给出. 那么, 如果学习增益  $\gamma_k(t)$  满足不等式

$$\|I - \Gamma_k(t)\sigma_k(t)\| < 1, \tag{11}$$

其中

$$\Gamma_k(t) = (\mathcal{L}_k(t) + Q_k(t)) \otimes (D(t)\gamma_k(t)). \tag{12}$$

则随着迭代次数  $k$  的增加, 所有跟随者智能体的输出均收敛到虚拟领导者的输出, 即式(5)成立.

**证** 由式(4)和式(9)关于输出误差的定义, 得到

$$\begin{aligned}
 e_{k+1}(t) - e_k(t) = & -(y_{k+1}(t) - y_k(t)) = \\
 & -(I_n \otimes C(t))[x_{k+1}(t) - x_k(t)] - \\
 & (I_n \otimes D(t))[u_{k+1}(t) - u_k(t)] = \\
 & -(I_n \otimes C(t))[x_{k+1}(t) - x_k(t)] - \\
 & \Gamma_k(t)\sigma_k(t)e_k(t),
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

其中  $\Gamma_k(t)$  如式(12)所示. 则有

$$\begin{aligned}
 e_{k+1}(t) = & [I - \Gamma_k(t)\sigma_k(t)]e_k(t) - \\
 & (I_n \otimes C(t))[x_{k+1}(t) - x_k(t)].
 \end{aligned}$$

上式两端取范数, 易得

$$\begin{aligned}
 \|e_{k+1}(t)\| \leq & \|I - \Gamma_k(t)\sigma_k(t)\| \|e_k(t)\| + \\
 & \|I_n \otimes C(t)\| \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\|,
 \end{aligned}$$

上式等号两端同乘上  $e^{-\lambda t}$ , 可得

$$\begin{aligned}
 \|e_{k+1}(\cdot)\|_\lambda \leq & \\
 & \|I - \Gamma_k(t)\sigma_k(t)\| \|e_k(\cdot)\|_\lambda + \\
 & \|I_n \otimes C(t)\| \|x_{k+1}(\cdot) - x_k(\cdot)\|_\lambda.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

此外, 由式(1)可得

$$\begin{aligned}
 x_{k+1}(t) - x_k(t) = & \\
 & x_{k+1}(T_1) - x_k(T_1) + \int_{T_1}^t [(I_n \otimes A(\tau))(x_{k+1}(\tau) - \\
 & x_k(\tau)) + (I_n \otimes B(\tau))(u_{k+1}(\tau) - u_k(\tau))]d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

对式(15)两端取范数, 可得

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq & \\
 & \int_{T_1}^t \|I_n \otimes A(\tau)\| \|x_{k+1}(\tau) - x_k(\tau)\| +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \|I_n \otimes B(\tau)\| \|u_{k+1}(\tau) - u_k(\tau)\| d\tau = \\
 & \int_{T_1}^t \|I_n \otimes A(\tau)\| \|x_{k+1}(\tau) - x_k(\tau)\| + \\
 & \|I_n \otimes B(\tau)\| \|((\mathcal{L}_k(\tau) + Q_k(t)) \otimes \gamma_k(\tau)) \cdot \\
 & \sigma_k(\tau)e_k(\tau)\| d\tau.
 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
 a_1 = & \sup_{t \in [T_1, T_2]} \|I_n \otimes A(t)\|, \\
 a_2 = & \sup_{t \in [T_1, T_2]} \|I_n \otimes B(t)\|, \\
 a_3 = & \sup_{t \in [T_1, T_2]} \|I_n \otimes C(t)\|, \\
 a_4 = & \sup_{t \in [T_1, T_2]} \|(\mathcal{L}_k(t) + Q_k(t)) \otimes \gamma_k(t)\|,
 \end{aligned}$$

代入式(16)可得

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq & \\
 & \int_{T_1}^t [a_1 \|x_{k+1}(\tau) - x_k(\tau)\| + a_2 \|((\mathcal{L}_k(\tau) + \\
 & Q_k(t)) \otimes \gamma_k(\tau))\| \| \sigma_k(\tau) \| \| e_k(\tau) \|] d\tau \leq \\
 & \int_{T_1}^t [a_1 \|x_{k+1}(\tau) - x_k(\tau)\| + a_2 a_4 \|e_k(\tau)\|] d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

由引理2, 式(16)可进一步写为

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \int_{T_1}^t e^{a_1(t-\tau)} a_2 a_4 \|e_k(\tau)\| d\tau. \tag{17}$$

式(17)两端同乘  $e^{-\lambda t}$ , 可得

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1}(\cdot) - x_k(\cdot)\|_\lambda \leq & \\
 & \int_{T_1}^t e^{(a_1-\lambda)(t-\tau)} a_2 a_4 \|e_k(\cdot)\|_\lambda d\tau \leq \\
 & \frac{1 - e^{(a_1-\lambda)(T_2-T_1)}}{\lambda - a_1} a_2 a_4 \|e_k(\cdot)\|_\lambda.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

将式(18)代入式(14), 可得

$$\begin{aligned}
 \|e_{k+1}(\cdot)\|_\lambda \leq & \|I - \Gamma_k(t)\sigma_k(t)\| \|e_k(\cdot)\|_\lambda + \\
 & \frac{1 - e^{(a_1-\lambda)(T_2-T_1)}}{\lambda - a_1} a_2 a_3 a_4 \|e_k(\cdot)\|_\lambda.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

由定义1可知,  $\lambda$  可自由选取, 故当选取充分大的  $\lambda$  时, 上面不等式的右边第二项可忽略不计, 所以当满足条件(11)时, 随着迭代次数  $k$  的不断增大,  $e_k(t)$  将趋于0, 即所有跟随者智能体的输出均收敛到虚拟领导者的输出.

最后由假设2和引理1可知, 矩阵  $\mathcal{L}_k(t) + Q_k(t)$  所有特征值均具有正实部, 因此  $\Gamma_k(t)\sigma_k(t)$  的行向量不存在零元, 此为条件(11)成立的前提. 需要注意的是, 根据定理1所给出的条件在实时求解迭代学习增益  $\gamma_k(t)$  的过程中总是需要知道  $\sigma_k(t)$ , 由于该信息是一个全局信息, 因而导致跟随者智能体很难利用局部信

息获得  $\gamma_k(t)$ , 这使得系统在切换拓扑情形下分布式实现比较困难. 为此, 通过限定迭代学习增益  $\gamma_k(t)$  的形式, 给出一个可分布式实现的结果.

**定理 2** 考虑由式(1)给出的测量受限多智能体系统, 智能体之间通信拓扑满足假设2, 跟随者智能体每次迭代初态满足假设1, 且其迭代学习控制律由式(7)给出. 若取  $\gamma_k(t)$  使得  $D(t)\gamma_k(t) = \varrho_k(t)I_m$ , 其中  $\varrho_k(t)$  满足

$$\sup_{t \in [T_1, T_2]} \rho(I - M_k(t)) < 1, \quad (20)$$

其中

$$M_k(t) = ((\mathcal{L}_k(t) + Q_k(t)) \otimes \varrho_k(t)I_m),$$

其中:  $\rho(\cdot)$  为矩阵的谱半径,  $\varrho_k(t)$  为随拓扑图结构改变而变化的实数. 则随着迭代次数  $k$  的不断增加, 式(5)成立, 即一致性问题可解.

**证** 由于  $M_k(t)$  满秩, 假设矩阵  $I - M_k(t)$  的特征值为  $\lambda_{i,k}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, nm$ , 且由条件(20)可知  $\sqrt{|\lambda_i|} < 1$ . 则由圆盘定理可知

$$\begin{aligned} |\lambda_{i,k}(t) - (1 - (\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)| + q_{i,k}(t))\varrho_k(t))| \leq \\ \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)|\varrho_k(t), \end{aligned} \quad (21)$$

去掉绝对值符号, 则有

$$\begin{aligned} 1 - 2 \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)|\varrho_k(t) - q_{i,k}(t)\varrho_k(t) \leq \\ \lambda_{i,k}(t) \leq 1 - q_{i,k}(t)\varrho_k(t), \end{aligned} \quad (22)$$

从而有

$$\begin{aligned} -1 < 1 - 2 \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)|\varrho_k(t) - q_{i,k}(t)\varrho_k(t) \leq \\ \lambda_i \leq 1 - q_{i,k}(t)\varrho_k(t) < 1. \end{aligned} \quad (23)$$

此处可知  $\varrho_k(t) > 0$ . 因为有部分的  $q_{i,k}(t) = 0$ , 而由条件(20)可知  $\sqrt{|\lambda_i|} < 1$ , 故可知上式不取等号成立的情况.

进一步地, 设  $\lambda_{i,k}^\sigma(t)$  为  $I - M_k(t)\sigma_k(t)$  的任意一个特征值, 则由圆盘定理可知

$$\begin{aligned} |\lambda_{i,k}^\sigma(t) - (1 - (\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)| + \\ q_{i,k}(t))\varrho_k(t)\sigma_{i,k}(t))| \leq \\ \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)|\varrho_k(t)\sigma_{j,k}(t), \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} 1 - q_{i,k}(t)\varrho_k(t)\sigma_{i,k}(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)|\varrho_k(t) \cdot \\ \sigma_{i,k}(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)|\varrho_k(t)\sigma_{j,k}(t) \leq \lambda_{i,k}^\sigma(t) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)|\varrho_k(t)\sigma_{i,k}(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)| \cdot \\ \varrho_k(t)\sigma_{j,k}(t) - q_{i,k}(t)\varrho_k(t)\sigma_{i,k}(t). \end{aligned} \quad (24)$$

此外, 对任一跟随者智能体  $v_i$ , 由式(19)且矩阵范数形式取为2范数, 则可得

$$\begin{aligned} \|e_{i,k+1}(\cdot)\|_\lambda \leq \\ \|I - (\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)| + q_{i,k}(t))(\varrho_k(t)I_m)\sigma_{i,k}(t)\|_2 \cdot \\ \|e_{i,k}(\cdot)\|_\lambda + \frac{1 - e^{(a_1 - \lambda)(T_2 - T_1)}}{\lambda - a_1} a_2 a_3 a_4 \|e_{i,k}(\cdot)\|_\lambda + \\ \sum_{j=1, j \neq i}^n (\| (a_{ij,k}(t)\varrho_k(t)I_m)\sigma_{j,k}(t) \|_2 \|e_{j,k}(\cdot)\|_\lambda). \end{aligned} \quad (25)$$

当  $\lambda$  取得充分大时, 式(25)中不等号右边第2项可忽略不计, 将不等号右边第3项视为扰动项, 由式(23)可知矩阵

$$I - (\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)| + q_{i,k}(t))(\varrho_k(t)I_m)$$

为对角线矩阵, 且其所有的对角线元素的绝对值均小于1. 则结合前面对  $\sigma_{i,k}(t)$  的分析, 可得

$$\|I - (\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij,k}(t)| + q_{i,k}(t))(\varrho_k(t)I_m)\sigma_{i,k}(t)\|_2 < 1.$$

故  $\|e_{i,k+1}(\cdot)\|_\lambda$  将减小, 同理对  $\|e_{j,k+1}(\cdot)\|_\lambda$  也有形如式(25)的存在, 故  $\|e_{j,k+1}(\cdot)\|_\lambda$  也会减小. 所以  $\|e_{i,k+1}(\cdot)\|_\lambda$  将会不断的减小. 故随着迭代次数的不断增加, 所有的  $\sigma_{i,k}(t)$ ,  $i \in \ell_n$  将会不断的趋近于1.

而随着所有的  $\sigma_{i,k}(t)$ ,  $i \in \ell_n$  将会不断的趋近于1, 式(24)中  $\lambda_i^\sigma$  的范围将变得和式(23)中  $\lambda_i$  的范围一样. 故随着迭代次数  $k$  的不断增加, 有:

$$\rho(I - M_k(t)\sigma_k(t)) < 1. \quad (26)$$

则对于任意的某一时刻  $t \in [T_1, T_2]$ , 由引理3可知, 对于任意给定的迭代次数  $k$ , 存在一种范数形式使得定理1中条件(11)成立. 故由对定理1的证明过程可知  $\|e_{k+1}(t)\| < \|e_k(t)\|$ . 同理也存在着某种范数形式使得  $\|e_{k+2}(t)\| < \|e_{k+1}(t)\|$ . 虽然不同迭代次数之间所采用的范数形式可能不一样, 但都存在着某种范数形式使得对定理1的证明过程成立, 故可以看出对不同的迭代次数  $k$ , 均满足存在着某种范数形式使得  $\|e_{k+1}(t)\| < \|e_k(t)\|$ , 即随着迭代次数  $k$  的增加, 所有跟随者智能体的输出均收敛到虚拟领导者的输出, 即式(5)成立.

**注 4** 由于  $D(t)$  是行满秩的, 因此对于学习增益  $\gamma_k(t)$  中的某一行, 可由  $D(t)\gamma_k(t) = \varrho_k(t)I_m$  列出  $m$  个线性无关方程, 则  $\gamma_k(t)$  中每列元素可由此  $m$  个线性无关方程组成的方程组求出.

**注5** 与定理1相比较, 定理2在求解学习增益 $\gamma_k(t)$ 时, 只需求解使条件(20)成立的 $\varrho_k(t)$ , 而不受全局信息 $\sigma_k(t)$ 的影响, 因此可实现分布式实时计算.

**4 仿真**

本节对所得结论进行仿真验证. 考虑由5个跟随者智能体和1个虚拟领导者组成的多智能体系统, 通信拓扑的4种状态及切换方式如图2所示. 为简化起见, 取每条边的权值为0或1, 跟随者测量上限 $r_0 = 8$ . 易知每个通信拓扑图均含有以领导者为根的生成树. 仿真实验中, 设 $t \in [T_1, T_2] = [1, 3]$ , 假设每次迭代之后切换到下一个状态, 其中设在 $1 \sim 1.5$  s区间内, 通信拓扑从 $G_a$ 开始切换, 而在 $1.5 \sim 2$  s,  $2 \sim 2.5$  s,  $2.5 \sim 3$  s三个时间段内, 系统从 $G_a, G_b, G_c, G_d$ 任一通信拓扑开始切换. 显然, 在此条件下系统的通信拓扑同时沿迭代轴 $k$ 和时间轴 $t$ 变化.

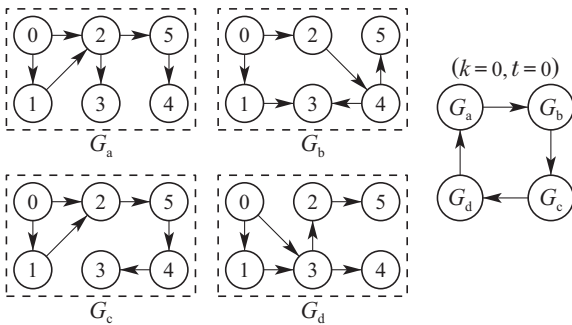


图2 4种状态的交流有向图和切换机制

Fig. 2 The directed graphs and switching mechanism of four-states

取跟随者智能体的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k}(t) = A(t)x_{i,k}(t) + B(t)u_{i,k}(t), \\ y_{i,k}(t) = C(t)x_{i,k}(t) + D(t)u_{i,k}(t), \end{cases} \quad (27)$$

其中:

$$\begin{aligned} x_{i,k}(t) &= [x_1 \ x_2]^T, \quad y_{i,k}(t) = [y_1 \ y_2]^T, \\ A(t) &= \begin{bmatrix} 0.5t & 1.6 \\ 0.6t & -0.9t \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 1 & -4t \\ 5t & 6t \end{bmatrix}, \\ C(t) &= \begin{bmatrix} -5.4t & 3.7t \\ 3.9 & -3.8t \end{bmatrix}, \quad D(t) = \begin{bmatrix} 3t & 5t \\ -7t & 6t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

与此同时, 取虚拟领导者的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = A(t)x_d(t) + B(t)u_d(t), \\ y_d(t) = C(t)x_d(t) + D(t)u_d(t), \end{cases} \quad (28)$$

其中系统矩阵 $A(t), B(t), C(t), D(t)$ 与式(27)相同, 且有 $x_d(T_1) = 0$ , 期望输入 $u_d(t)$ 为

$$u_d(t) = \begin{bmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.045 \cos(0.8t) - 0.03 \sin(2t) \\ 0.07 \cos(3t) - 0.05 \cos t \end{bmatrix}.$$

在上述条件下, 对于通讯拓扑 $G_a$ , 可解得 $\mathcal{L}_k(t) + Q$ 的特征值, 按升序排列为 $1 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < \lambda_5 = 2$ . 为使

$$\max_i (I - \lambda_i D(t) \gamma_{G_a}(t) \sigma_{i,k}(t)) < 1.$$

可取增益

$$\gamma_{G_a}(t) = 0.3D(t)^{-1} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} 0.0556 & -0.0472 \\ 0.0660 & 0.0283 \end{bmatrix},$$

易验证

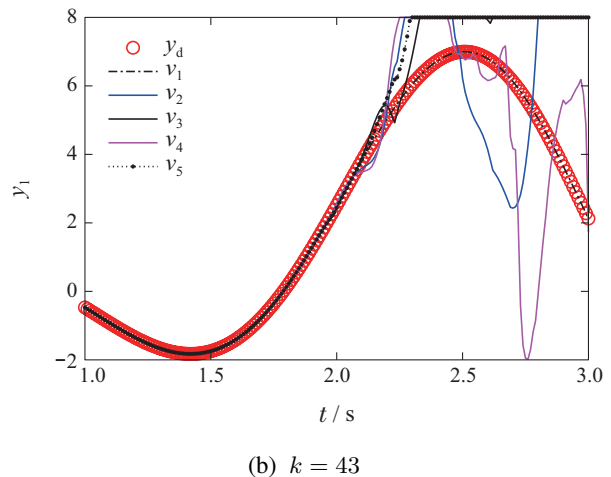
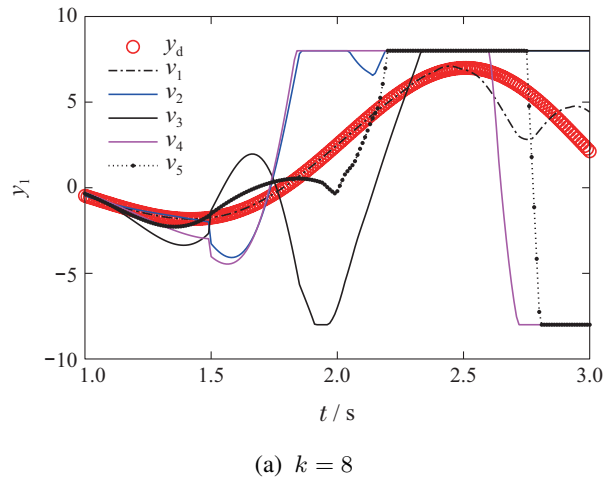
$$\sup_{t \in [T_1, T_2]} \rho(I - ((\mathcal{L}_k(t) + Q) \otimes 0.3I_2)) = 0.7 < 1$$

成立. 类似地, 对于通信拓扑 $G_b, G_c, G_d$ , 取

$$\gamma_{G_b}(t) = \gamma_{G_c}(t) = \gamma_{G_d}(t) = \gamma_{G_a}(t).$$

易验证也有式(20)成立. 也即满足定理2条件.

图3和图4所示为所有跟随者智能体 $v_i, i \in \ell_n$ 和虚拟领航者 $v_0$ 的输出轨迹以及在时间 $[1,3]$ 区间上, 随迭代次数 $k$ 的不断增加, 所有跟随者智能体 $v_i, i \in \ell_n$ 和虚拟领航者 $v_0$ 输出之间最大误差无穷范数的变化趋势. 由图可见, 每个跟随者智能体在所求得的学习增益作用下, 其输出均能够很好地跟踪虚拟领航者的输出.



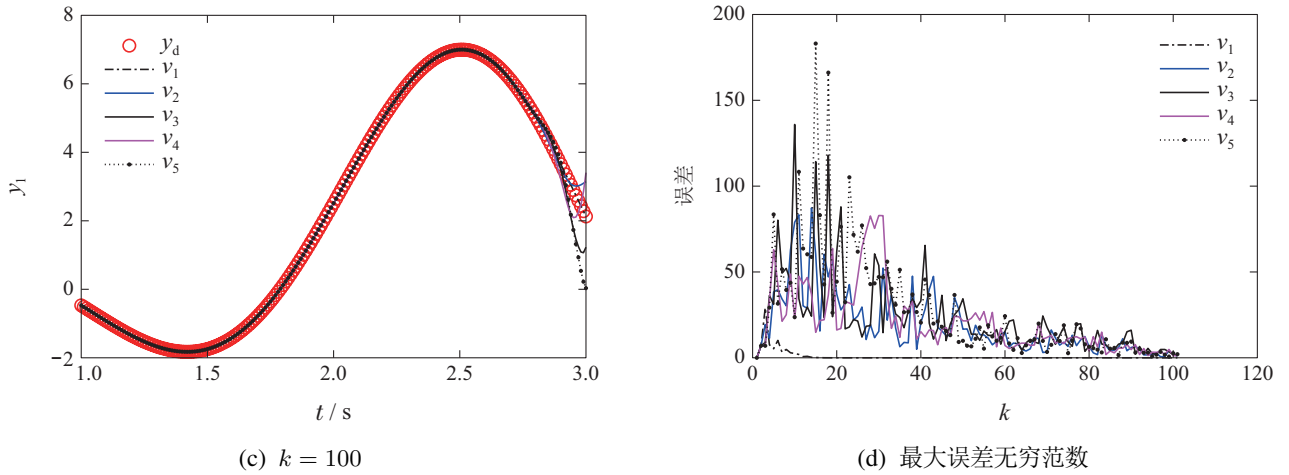


图 3 不同迭代次数之间所有智能体的实际轨迹输出( $y_1$ )

Fig. 3 Output trajectory of all agents at different iterations ( $y_1$ ) and the norm of error

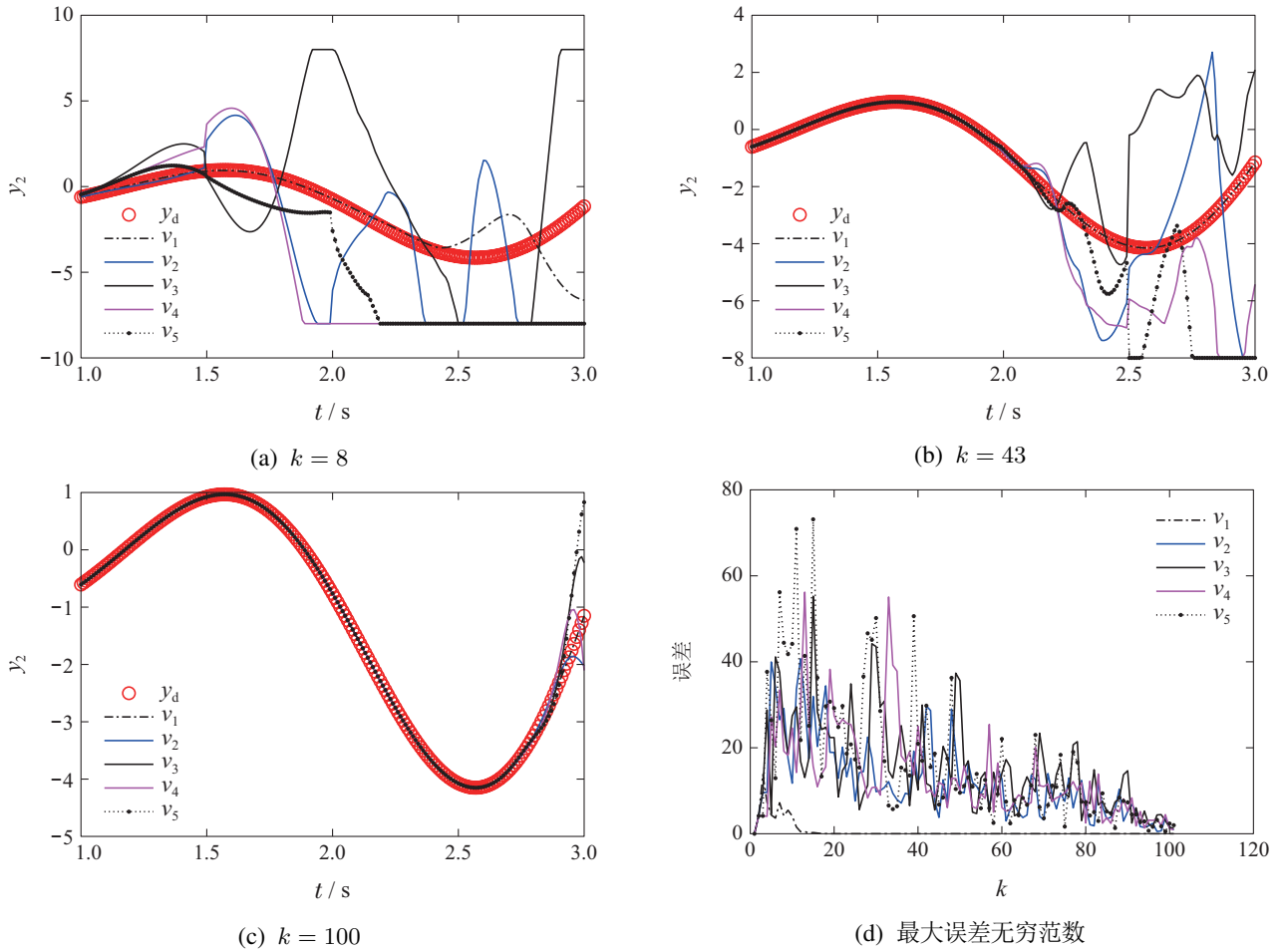


图 4 不同迭代次数之间所有智能体的实际轨迹输出( $y_2$ )

Fig. 4 Output trajectory of all agents at different iterations ( $y_2$ ) and the norm of error

### 5 结论

针对实际工程应用中大量存在的测量限制情形, 本文研究了存在测量限制影响的连续线性多智能体系统基于迭代学习方法的输出一致性问题. 通过利用

饱和函数对测量受限情况进行建模, 给出了一个居于局部信息的输出一致性协议, 通过建立实际输出与测量输出之间的函数关系, 得到了两个使所有智能体输出收敛到期望输出的两个充分条件. 其中第二个条件

大大简化了学习增益的设计过程,使得算法的分布式实现成为可能.需要指出的是,所考虑系统的信息拓扑图在沿时间轴切换的同时,也沿迭代轴切换,加之跟随者动力学方程中利用饱和函数对测量受限进行建模带来的非线性和非光滑性,使得问题的求解比较困难.从仿真结果看,本文所得结果较好地解决了这一问题,随着迭代次数的增加,最终实现了输出一致性目标.在后续研究中,将进一步考虑通信拓扑沿时间轴和迭代轴联合联通时测量受限多智能体系统的一致性问题.

### 参考文献:

- [1] DORRI A, KANHERE S S, JURDAK R, et al. Multi-agent systems: A survey. *IEEE Access*, 2018, 6: 28573 – 28593.
- [2] QIN J, MA Q, SHI Y, et al. Recent advances in consensus of multi-agent systems: A brief survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(6): 4972 – 4983.
- [3] SUN H, LIU Y, LI F, et al. A survey on optimal consensus of multi-agent systems. *2017 Chinese Automation Congress (CAC)*. Jinan: IEEE, 2017: 4978 – 4983.
- [4] OH K, PARK M, AHN H, et al. A survey of multi-agent formation control. *Automatica*, 2015, 53: 424 – 440.
- [5] XU Yaojin, TIAN Yuping. A survey of linear and nonlinear consensus problems in multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 837 – 849.  
(许耀颀, 田玉平. 线性及非线性一致性问题综述. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 837 – 849.)
- [6] BRISTOW D A, THARAYIL M L, ALLEYNE A G, et al. A survey of iterative learning control. *IEEE Control Systems Magazine*, 2006, 26(3): 96 – 114.
- [7] RUAN Xiaoe, PARK Kwanghyun, BIEN Z Zenn. Retrospective review of some iterative learning control techniques with a comment on prospective long-term learning. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 966 – 973.  
(阮小娥, 朴光贤, 卞增男. 迭代学习控制技术回顾与长期学习控制展望. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 966 – 973.)
- [8] MENG D Y, MOORE K L. Robust iterative learning control for non-repetitive uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 62(2): 907 – 913.
- [9] HE W, MENG T, HE X, et al. Unified iterative learning control for flexible structures with input constraints. *Automatica*, 2018, 96: 326 – 336.
- [10] MENG D Y, JIA Y. Iterative learning approaches to design finite-time consensus protocols for multi-agent systems. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(1): 187 – 194.
- [11] HU G. Robust consensus tracking of a class of second-order multi-agent dynamic systems. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(1): 134 – 142.
- [12] YANG S P, XU J X, HUANG D Q. Iterative learning control for multi-agent systems consensus tracking. *The 51st IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2012: 4672 – 4677.
- [13] MENG D, MOORE K L. Learning to cooperate: Networks of formation agents with switching topologies. *Automatica*, 2016, 64: 278 – 293.
- [14] MENG D Y, JIA Y, DU J, et al. Consensus seeking via iterative learning for multi-agent systems with switching topologies and communication time-delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(17): 3772 – 3790.
- [15] MENG D Y, MOORE K L. Robust cooperative learning control for directed networks with nonlinear dynamics. *Automatica*, 2017, 75: 172 – 181.
- [16] LI Y, XIANG J, WEI W, et al. Consensus problems for linear time-invariant multi-agent systems with saturation constraints. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(6): 823 – 829.
- [17] SU H S, CHEN M Z, LAM J, et al. Semi-global leader-following consensus of linear multi-agent systems with input saturation via low gain feedback. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Regular Papers*, 2013, 60(7): 1881 – 1889.
- [18] YANG T, MENG Z Y, DIMAROGONAS D V, et al. Global consensus for discrete-time multi-agent systems with input saturation constraints. *Automatica*, 2014, 50(2): 499 – 506.
- [19] YI X L, YANG T, WU J F, et al. Event-triggered control for multi-agent systems with output saturation. *The 36th Chinese Control Conference*. Dalian: IEEE, 2017: 8431 – 8436.
- [20] LIU C, SHEN D, WANG J, et al. Iterative learning control of multi-agent systems with random noises and measurement range limitations. *International Journal of Systems Science*, 2019, 50(7): 1465 – 1482.
- [21] SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control*. Beijing: National Defense Industry Press, 1999.  
(孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制. 北京: 国防工业出版社, 1999.)
- [22] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.

### 作者简介:

**魏永东** 硕士研究生, 目前研究方向为多智能体系统一致性控制, E-mail: 948316853@qq.com;

**李宗刚** 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能仿生机器人、多机器人系统协同控制、复杂系统建模与控制, E-mail: lizongg@126.com;

**杜亚江** 硕士, 教授, 目前研究方向为机电装备检测与控制技术、轨道交通装备自动化与监控技术等, E-mail: duyj@mail.lzjtu.cn;

**陈引娟** 硕士, 讲师, 目前研究方向为多智能体系统、多机器人协同, E-mail: 20294861@qq.com.