

短时延广义网络控制系统的指数保性能控制

周红艳¹, 张 钊^{2,3†}, 陈雪波¹, 李 华⁴

(1. 辽宁科技大学 电子与信息工程学院, 辽宁 鞍山 114051; 2. 辽宁科技大学 计算机与软件工程学院, 辽宁 鞍山 114051;
3. 流程工业综合自动化国家重点实验室(东北大学), 辽宁 沈阳 110819; 4. 辽宁科技大学 工商管理学院, 辽宁 鞍山 114051)

摘要: 本文基于标称点方法, 在短时变时延条件下, 研究了广义网络控制系统的指数稳定保性能控制问题. 基于李雅普诺夫稳定性判据和线性矩阵不等式技术, 给出了使得系统能够指数稳定且满足二次型性能指标的状态反馈控制器存在的条件和设计方法. 通过采用标称点方法, 有效地解决了现有方法没有考虑网络诱导时延与系统保守性的关系且适用范围有限的问题, 并通过算例验证了有效性. 由于建模过程中充分考虑了系统的保守性, 相比之下获得了更好的二次型性能指标值.

关键词: 广义系统; 网络控制系统; 指数稳定; 保性能控制

引用格式: 周红艳, 张钊, 陈雪波, 等. 短时延广义网络控制系统的指数保性能控制. 控制理论与应用, 2023, 40(1): 178 – 184

DOI: 10.7641/CTA.2021.10115

Guaranteed cost control for exponential stability of singular networked control systems with short delay

ZHOU Hong-yan¹, ZHANG Zhao^{2,3†}, CHEN Xue-bo¹, LI Hua⁴

(1. School of Electronics and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan Liaoning 114051, China;
2. School of Computer Science and Software Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan Liaoning 114051, China;
3. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries (Northeastern University), Shenyang Liaoning 110819, China;
4. School of Business Administration, University of Science and Technology Liaoning, Anshan Liaoning 114051, China)

Abstract: In this paper, the exponential stable guaranteed cost control problem of singular networked control systems with short time-varying delay is studied based on the nominal point method. By using the Lyapunov stability criterion and the linear matrix inequality technique, the existence condition and the design method of a state feedback controller are given. The controller enables the system to be exponentially stable and satisfy the quadratic performance index. By using the nominal point method, the defects are solved effectively that the existing methods do not consider the relationship between the network-induced delay and the system conservativeness, and the scope of application is limited. The validity is verified by two examples. As the conservativeness of the system is fully considered in the modeling process, a better quadratic performance index value is obtained.

Key words: singular system; networked control systems; exponentially stable; guaranteed cost control

Citation: ZHOU Hongyan, ZHANG Zhao, CHEN Xuebo, et al. Guaranteed cost control for exponential stability of singular networked control systems with short delay. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(1): 178 – 184

1 引言

广义系统又被称作广义状态空间系统, 微分代数系统, 或奇异系统, 区别于传统意义的正常系统, 它对现实世界中的客观系统进行更加自然的描述, 如:

机器人系统和电力系统等^[1-3].

传统的点对点控制系统, 由于存在灵活性差、接线繁杂、升级成本高等缺点, 逐步被网络控制系统(networked control systems, NCSs)而取代. 近二十年来,

收稿日期: 2021-02-02; 录用日期: 2021-09-24.

[†]通信作者. E-mail: zhangzhao333@hotmail.com; Tel.: +86 412-5929816.

本文责任编辑: 武玉强.

国家自然科学基金项目(71771112), 流程工业综合自动化国家重点实验室开放课题基金资助项目(PAL-N201801), 辽宁科技大学优秀人才培养项目(2019RC05)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (71771112), the State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries Fundamental Research Funds (PAL-N201801) and the Excellent Talent Training Project of University of Science and Technology Liaoning (2019RC05).

由于自动化、计算机、通信和网络等信息技术的发展,使得对广义NCSs的研究成为一个热点^[4-6].

在NCSs中,由于网络带宽的物理限制和分时复用的数据包传送策略,使得网络诱导时延 $\tau(k)$ 必然存在且无法避免.文献[4]研究了短时变时延对NCSs稳定性和镇定性的影响.文献[5]研究了具有短时变时延的NCSs的BIBO稳定性和镇定性问题.文献[6]研究了一类具有随机事件信息和短时变时延的不确定非线性NCSs的输出反馈控制问题.在文献[4-6]中,作者均明确指出系统的稳定条件依赖于时延的上下界,即:控制器的设计受到时延的影响.因此,对具有短时变时延的广义NCSs的研究具有十分重要的意义.

系统的稳定性始终是控制领域关注的一个热点问题^[4-8].然而,在现实环境中,系统总是不可避免地受到系统特性或者参数的摄动.因此,系统在稳定前提下,还需要具有一定的鲁棒性.文献[7]探讨了广义网络化控制系统的鲁棒指数稳定性.文献[9]研究了具有短固定时延的广义NCSs的状态反馈保性能控制问题.作者假设时延是时不变的,该假设不具有现实意义,且无形中增大了系统的保守性并降低了所用方法的应用范围.文献[10-11]对文献[9]进行了改进,研究了广义NCSs在短时变时延下的保性能控制问题.文献[12]研究了具有时变时延和DoS攻击的NCSs的保性能控制.文献[10-12]在建模的过程中,为保证指数不确定项范数有界,采用文献[13]中调整一些自由参数的方法,却没有明确说明如何对这些参数进行选择.并且,此方法只适用于系统矩阵的特征值均为实数的系统.然而,在现实世界中大量存在着系统矩阵有共轭复数特征值的系统^[4].

为解决上述问题,文献[4]提出一种基于标称点方法的建模方法,通过获得一个 $\tau(k)$ 的标称点,使指数不确定项的欧几里得范数最小,从而降低系统的保守性和 $\tau(k)$ 对系统性能的影响.此方法可操作性强且对系统矩阵无特殊要求,有效解决了上述问题.文献[8]基于标称点方法探讨了广义NCSs的稳定与镇定问题.但是,目前基于标称点方法对广义NCSs的研究仍然很少.本文基于标称点方法对具有短时变时延的广义NCSs的指数稳定保性能控制问题进行了研究.首先基于标称点方法建立广义NCSs模型,然后应用李雅普诺夫稳定性判据和线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)技术,给出了系统指数稳定保性能控制器存在条件和设计方法,最后通过两个算例证明了本文工作的有效性.

2 问题描述

在本文中,考虑如下广义系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(t) = \phi(t), t \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入向量; $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是实数奇异矩阵, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是系数矩阵; $\phi(t)$ 是初值函数. 令 $\tau_{sc}(k)$ 是传感器与控制器之间的时延, $\tau_{ca}(k)$ 是控制器与执行器之间的时延, $\tau(k) = \tau_{sc}(k) + \tau_{ca}(k)$. 系统采样周期为常数 $h > 0$. 并给出如下假设.

假设 1 系统(1)是正则的,且无脉冲的.

假设 2 时间驱动的网络节点为传感器;事件驱动的网络节点为执行器和控制器. $\tau(k) < h$ 是短时变时延,满足 $0 \leq \tau_L \leq \tau(k) \leq \tau_U \leq h$ ($\tau_U \neq 0$).

由假设1可知,一定存在可逆矩阵 P 和 Q ,使得

$$\begin{cases} PEQ = \text{diag}\{I_r, 0\}, PB = [B_1/B_2], \\ PAQ = \text{diag}\{A_1, I_{n-r}\}. \end{cases} \quad (2)$$

令 $\bar{x}(t) = Q^{-1}x(t) = [x_1(t)/x_2(t)]$, 其中 $x_1(t) \in \mathbb{R}^r$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$. 系统(1)等价于如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1u(t), \\ 0 = x_2(t) + B_2u(t), \\ \bar{x}(t) = Q^{-1}\phi(t), t \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

由假设2,在每个采样区间内, $u(t)$ 为分段函数,即

$$u(t) = \begin{cases} u(k-1), & kh < t \leq kh + \tau(k), \\ u(k), & kh + \tau(k) < t \leq (k+1)h. \end{cases}$$

因此,将广义NCSs建模为如下离散时间系统:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \bar{A}_1x_1(k) + \bar{B}_{10}(\tau(k))u(k) + \\ \quad \bar{B}_{11}(\tau(k))u(k-1), \\ x_2(k+1) = -B_2u(k), \\ \bar{x}(k) = Q^{-1}\phi(k), k = -1, 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\bar{A}_1 = e^{A_1h}$, 并且

$$\bar{B}_{10}(\tau(k)) = \int_0^{h-\tau(k)} e^{A_1s} ds B_1, \quad (5)$$

$$\bar{B}_{11}(\tau(k)) = \int_{h-\tau(k)}^h e^{A_1s} ds B_1. \text{ 显然,可以得到}$$

$$\bar{B}_1 \triangleq \bar{B}_{10}(\tau(k)) + \bar{B}_{11}(\tau(k)) = \int_0^h e^{A_1s} ds B_1. \quad (6)$$

对于系统(4),定义如下二次型性能指标:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{x}^T(k)R_1\bar{x}(k) + u^T(k)R_2u(k)), \quad (7)$$

其中适维矩阵 $R_1 > 0$ 和 $R_2 > 0$, 状态反馈控制器

$$u(k) = K\bar{x}(k) = KQ^{-1}x(k). \quad (8)$$

因此,可以将系统(4)改写为如下系统:

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = (A_d + \bar{B}_{d0}(\tau(k))K)\bar{x}(k) + \\ \quad \bar{B}_{d1}(\tau(k))K\bar{x}(k-1), \\ \bar{x}(k) = Q^{-1}\phi(k), k = -1, 0, \end{cases} \quad (9)$$

其中: $A_d = \text{diag}\{\bar{A}_1, 0\}$,

$$\bar{B}_{d0}(\tau(k)) = [\bar{B}_{10}(\tau(k))/-B_2], \quad (10)$$

$$\bar{B}_{d1}(\tau(k)) = [\bar{B}_{11}(\tau(k))/0]. \quad (11)$$

令 $\tau_N \in [\tau_L, \tau_U]$ 是一个标称点, 定义

$$\delta(\tau(k), \tau_N, k) \triangleq \tau(k) - \tau_N. \quad (12)$$

在本文中, 将 $\delta(\tau(k), \tau_N, k)$ 简写为 δ . 显然可得

$$\delta \in [\tau_L - \tau_N, \tau_U - \tau_N]. \quad (13)$$

将式(12)代入式(5), 可以得到

$$\bar{B}_{10}(\tau(k)) = B_{10} + D\Theta(\delta)B_1, \quad (14)$$

其中: $B_{10} = \bar{B}_{10}(\tau_N)$, $D = e^{A_1(h-\tau_N)}$, 定义

$$\Theta(\delta) \triangleq \int_0^{-\delta} e^{A_1 s} ds \quad (15)$$

为指数不确定项. 由式(6)和式(14), 可以得到

$$\bar{B}_{11}(\tau(k)) = B_{11} - D\Theta(\delta)B_1, \quad (16)$$

其中 $B_{11} = \bar{B}_{11}(\tau_N)$. 由式(10)和式(14), 有 $\bar{B}_{d0}(\tau(k)) = B_{d0} + M\Theta(\delta)B_1$, 其中, $B_{d0} = [B_{10}/-B_2]$, $M = [D/0]$. 由式(16)和式(11), 有 $\bar{B}_{d1}(\tau(k)) = B_{d1} - M\Theta(\delta) \times B_1$, 其中 $B_{d1} = [B_{11}/0]$. 因此, 系统(9)改写为

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \hat{A}_0(\delta)\bar{x}(k) + \hat{A}_1(\delta)\bar{x}(k-1), \\ \bar{x}(k) = Q^{-1}\phi(k), \quad k = -1, 0, \end{cases} \quad (17)$$

其中:

$$\hat{A}_0(\delta) = A_d + (B_{d0} + M\Theta(\delta)B_1)K, \quad (18)$$

$$\hat{A}_1(\delta) = (B_{d1} - M\Theta(\delta)B_1)K. \quad (19)$$

在式(17)中 $\Theta(\delta)$ 是唯一的时变项. 由文献[4]可知, 当 δ 满足式(13)时, $\Theta(\delta)$ 是范数有界的, 即

$$\sup \|\Theta(\delta)\| \triangleq \min_{\tau_L \leq \tau_N \leq \tau_U} \max_{\tau_L - \tau_N \leq \delta \leq \tau_U - \tau_N} \|\Theta(\delta)\| \leq \sigma. \quad (20)$$

注1 在文献[10-13]中, $\tau(k)$ 被转化为系统的参数扰动, NCSs被建模为具有系数不确定性的线性离散系统, 使用调整一些自由参数的方法来确保其系数不确定性范数有界, 但未考虑 $\tau(k)$ 对系统保守性的影响, 降低了保守性. 此外作者没有明确给出参数的选择策略, 且方法的适用性有限, 只适用于系统矩阵的特征值都是实数的系统.

注2 由式(20), 使用标称点方法对广义NCSs建模, 充分考虑了 $\tau(k)$ 对系统保守性的影响. 通过计算得到一个最优的 $\tau(k)$ 的标称点 τ_N 和相应的 $\|\Theta(\delta)\|$ 的上确界 σ , 降低了系统的保守性和 $\tau(k)$ 对系统性能的影响, 提升了系统的鲁棒性. 具体见算例1和注4.

注3 由式(15)和式(20), 本文对矩阵 A_1 的特征值没有特殊要求. 因此, 标称点方法有效地解决了注1中所述文献[10-13]所存在的问题. 具体见算例2.

给出计算式(20)中上确界 σ 和相对应 τ_N 的两种方法.

方法1 对 A_1 舒尔分解, 得 $U_O^T A_1 U_O = R_D + R_T$, 其中 U_O 是正交矩阵, R_D 是对角矩阵, R_T 是严格上三角矩阵. 不难得到

$$\left\| \int_0^{-\delta} e^{A_1 s} ds \right\| = \left\| \int_0^{\delta} e^{-A_1 s} ds \right\|.$$

令标量 a_1 (或 a_2) 是矩阵 A_1 (或 $-A_1$) 特征值的最大实部. 由文献[14]中引理3, 可得 $\|\Theta(\delta)\| \leq \hat{\sigma}(\delta)$, 其中

$$\hat{\sigma}(\delta) \triangleq \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \|R_T\|^j \left(-\frac{(-1)^j}{a_2^{j+1}} + \frac{e^{a_2 \delta}}{a_2} \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^i \delta^{j-i}}{a_2^i (j-i)!} \right), & \delta \geq 0, a_2 \neq 0; \\ \sum_{j=0}^{n-1} \|R_T\|^j \left(-\frac{(-1)^j}{a_1^{j+1}} + \frac{e^{a_1 |\delta|}}{a_1} \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^i |\delta|^{j-i}}{a_1^i (j-i)!} \right), & \delta < 0, a_1 \neq 0; \\ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\|R_T\|^j}{(j+1)!} |\delta|^{j+1}, & \text{其他.} \end{cases}$$

对于给定的 $\tau_N = \hat{\tau}_N$, 可以得到

$$\|\Theta(\delta)\| \leq \max_{\tau_L - \hat{\tau}_N \leq r \leq \tau_U - \hat{\tau}_N} \hat{\sigma}(r). \quad (21)$$

为了减小系统的保守性, 不等式(21)的右端越接近左端越好. 因此, 可通过求解如下优化问题计算 $\hat{\tau}_N$:

$$\min_{\tau_L \leq s \leq \tau_U} \max_{\tau_L - s \leq r \leq \tau_U - s} \hat{\sigma}(r). \quad (22)$$

由于 $\hat{\sigma}(r)$ 对于 $|r|$ 是单调增函数. 因此, 式(22)可简化为

$$\hat{\sigma}_{\min} = \min_{\tau_L \leq s \leq \tau_U} \max\{\hat{\sigma}(\tau_L - s), \hat{\sigma}(\tau_U - s)\}.$$

由上式, 可计算出 $\tau_N = \hat{\tau}_N$, 以及对应的 σ , 即

$$\sigma = \hat{\sigma}_{\min} = \hat{\sigma}(\tau_L - \hat{\tau}_N) = \hat{\sigma}(\tau_U - \hat{\tau}_N).$$

方法2 若 $\|A_1\| = 0$, 当且仅当 $A_1 = 0$. 由式(2), 条件 $\|A_1\| \neq 0$ 显然成立. 由文献[6]中的引理1, 可得

$$\|\Theta(\delta)\| \leq \tilde{\sigma}(\delta) = (e^{|\delta| \|A_1\|} - 1) / \|A_1\|. \quad (23)$$

由式(23), 可得 $\tilde{\sigma}(\delta) = \tilde{\sigma}(-\delta)$. 对于给定的 $\tau_N = \tilde{\tau}_N$, 可得 $\|\Theta(\delta)\| \leq \max_{\tau_L - \tilde{\tau}_N \leq r \leq \tau_U - \tilde{\tau}_N} \tilde{\sigma}(r)$. 使用与方法1相同的分析过程, 可得 $\tau_N = \tilde{\tau}_N = (\tau_L + \tau_U)/2$, 及相应的

$$\begin{aligned} \sigma &= \tilde{\sigma}_{\min} = \tilde{\sigma}(\tau_L - \tilde{\tau}_N) = \\ &= \tilde{\sigma}(\tau_U - \tilde{\tau}_N) = (e^{(\tau_U - \tau_L) \|A_1\|/2} - 1) / \|A_1\|. \end{aligned}$$

3 控制器设计

定义1 系统(17)是指数稳定的, 当且仅当系统的任意解满足: $\|\bar{x}(k)\|^2 \leq \alpha \beta^{k-k_0} \phi_m^2, \forall k \geq k_0 \geq 0$, 其中: $\phi_m = \max\{\|Q^{-1}\phi(-1)\|, \|Q^{-1}\phi(0)\|\}$, 衰减系数 $\alpha > 0$, 且衰减率 $\beta \in (0, 1)$.

定义2 具有控制器(8)的系统(17), 如果满足以下两个条件: 1) 系统(17)是指数稳定的; 2) 系统的二次型性能指标(7)满足 $J \leq J^*$, 其中 J^* 是一个确定常数, 则称控制器(8)是系统(17)的指数稳定保性能控制器, J^* 为系统(17)的一个性能上界.

定理1 对于系统(17), 给定二次型性能指标(7)和控制器(8), 对于 $\tau_L \leq \tau(k) \leq \tau_U$, 已知 σ 满足式(20), 如果存在适维矩阵 $P_1 > 0$ 和 $P_2 > 0$, 使得如下矩阵不等式成立:

$$[\hat{A}_0(\delta) \quad \hat{A}_1(\delta)]^T P_1 [\hat{A}_0(\delta) \quad \hat{A}_1(\delta)] + \text{diag}\{P_2 - P_1 + R_1 + K^T R_2 K, -P_2\} < 0, \quad (24)$$

则控制器(8)是系统(17)的指数稳定保性能控制器, 且相应的性能上界为

$$J^* = \bar{x}^T(0)P_1\bar{x}(0) + \bar{x}^T(-1)P_2\bar{x}(-1). \quad (25)$$

证 选择李雅普诺夫泛函如下:

$$V(k) = \bar{x}^T(k)P_1\bar{x}(k) + \bar{x}^T(k-1)P_2\bar{x}(k-1),$$

其中适维矩阵 $P_1 > 0$ 和 $P_2 > 0$. 由系统(17), 可得

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) = \\ &\bar{x}^T(k+1)P_1\bar{x}(k+1) + \bar{x}^T(k)P_2\bar{x}(k) - \\ &\bar{x}^T(k)P_1\bar{x}(k) - \bar{x}^T(k-1)P_2\bar{x}(k-1) = \\ &\hat{x}^T(k)\Phi_1\hat{x}(k), \end{aligned} \quad (26)$$

其中: $\hat{x}(k) = [\bar{x}(k)/\bar{x}(k-1)]$, $\Phi_1 = [\hat{A}_0(\delta) \quad \hat{A}_1(\delta)]^T \times P_1 [\hat{A}_0(\delta) \quad \hat{A}_1(\delta)] + \text{diag}\{P_2 - P_1, -P_2\}$. 由式(24)和式(26), 可得

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &< \\ &-\hat{x}^T(k) \text{diag}\{R_1 + K^T R_2 K, 0\} \hat{x}(k) = \\ &-(\bar{x}^T(k)R_1\bar{x}(k) + u^T(k)R_2u(k)) < 0. \end{aligned} \quad (27)$$

根据李雅普诺夫稳定性判据和式(27), 可以得到系统(17)是渐近稳定的, 即: $\Phi_1 < 0$. 进一步由式(26)可知

$$\Delta V(k) \leq -\beta_1 \|\bar{x}(k)\|^2, \quad (28)$$

其中 $\beta_1 = \lambda_{\min}(-\Phi_1) > 0$. 由 $V(k)$ 的定义可知

$$V(k) \leq \beta_2 (\|\bar{x}(k)\|^2 + \|\bar{x}(k-1)\|^2), \quad (29)$$

其中 $\beta_2 = \max\{\lambda_{\max}(P_1), \lambda_{\max}(P_2)\} > 0$. 以 β_1 和 β_2 为系数, 构造如下关于 θ 的一元二次方程:

$$\beta_2(\theta - 1) - \beta_1\theta + \beta_2(\theta - 1)\theta = 0. \quad (30)$$

因为标量 $\beta_1 > 0$ 和 $\beta_2 > 0$, 所以方程(30)始终存在解 $\theta > 1$. 由这个 $\theta > 1$ 的解, 及式(28)–(29), 可以得到

$$\begin{aligned} \theta^{k+1}V(k+1) - \theta^kV(k) &= \\ \theta^{k+1}\Delta V(k) + \theta^k(\theta - 1)V(k) &\leq \end{aligned}$$

$$\alpha_1(\theta)\theta^k\bar{x}(k)^2 + \alpha_2(\theta)\theta^k\bar{x}(k-1)^2, \quad (31)$$

其中: $\alpha_1(\theta) = \beta_2(\theta - 1) - \beta_1\theta$, $\alpha_2(\theta) = \beta_2(\theta - 1)$. 由式(30), 可得

$$\alpha_1(\theta) + \alpha_2(\theta)\theta = 0. \quad (32)$$

对任意正整数 $\bar{k} \geq 2$, 对式(31)的两侧同时由 0 到 $\bar{k} - 1$ 累加求和, 可得

$$\begin{aligned} \theta^{\bar{k}}V(\bar{k}) - V(0) &\leq \\ \alpha_1(\theta) \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \theta^k \|\bar{x}(k)\|^2 + \alpha_2(\theta) \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \theta^k \|\bar{x}(k-1)\|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

需要指出的是

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \theta^k \|\bar{x}(k-1)\|^2 &= \\ \theta^0 \|\bar{x}(-1)\|^2 + \theta \sum_{l=0}^{\bar{k}-2} \theta^l \|\bar{x}(l)\|^2 &\leq \\ \phi_m^2 + \theta \sum_{l=0}^{\bar{k}-1} \theta^l \|\bar{x}(l)\|^2. \end{aligned} \quad (34)$$

由式(32)–(34), 可以得到

$$\begin{aligned} \theta^{\bar{k}}V(\bar{k}) &\leq \\ V(0) + \alpha_2(\theta)\phi_m^2 + (\alpha_1(\theta) + \alpha_2(\theta)\theta) \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \theta^k \|\bar{x}(k)\|^2 &= \\ V(0) + \alpha_2(\theta)\phi_m^2. \end{aligned} \quad (35)$$

由 $V(k)$ 定义和式(29), 得 $V(\bar{k}) \geq \lambda_{\min}(P_1) \|\bar{x}(\bar{k})\|^2$, $V(0) \leq 2\beta_2\phi_m^2$. 由式(35), 可以得到

$$\|\bar{x}(\bar{k})\|^2 \leq \frac{\alpha_2(\theta) + 2\beta_2}{\lambda_{\min}(P_1)} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\bar{k}} \phi_m^2. \quad (36)$$

根据定义1和式(36), 可知系统(17)指数稳定, 即系统(17)满足定义2中条件1. 由式(27), 可以得到

$$\bar{x}^T(k)R_1\bar{x}(k) + u^T(k)R_2u(k) < -\Delta V(k). \quad (37)$$

对式(37)两边从 0 到 ∞ 累加求和, 并由式(17)指数稳定, 得

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\bar{x}^T(k)R_1\bar{x}(k) + u^T(k)R_2u(k)) = J < J^*,$$

其中 $J^* = V(0) = \bar{x}^T(0)P_1\bar{x}(0) + \bar{x}^T(-1)P_2\bar{x}(-1)$.

因此, 系统(17)满足定义2中的条件2. 所以, 控制器(8)是系统(17)的指数稳定保性能控制器, 且相应的性能上界为式(25). 证毕.

定理2 给定系统(17)的控制器(8)和二次型性能指标(7), 对于 $\tau_L \leq \tau(k) \leq \tau_U$, 已知 σ 满足式(20)和给定常矩阵 U , 如果存在适维矩阵 $Q_1 > 0$ 和 $Q_2 > 0$, 以及标量 $\alpha > 0$, 使得如下LMI成立:

$$\begin{bmatrix} Q_2 - Q_1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -Q_2 & * & * & * & * & * \\ \Psi_{31} & B_{d1}KQ_1 & -Q_1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \alpha\sigma M^T - \alpha I & * & * & * & * \\ B_1KQ_1 - B_1KQ_1 & 0 & 0 & -\alpha I & * & * & * \\ KQ_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2^{-1} & * \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (38)$$

其中 $\Psi_{31} = A_d Q_1 + B_{d0} K Q_1$. 则控制器(8)是系统(17)的指数稳定保性能控制器, 相应的性能上界为

$$J^* \leq \lambda_{\max}(U^T Q_1^{-1} U) + \lambda_{\max}(U^T Q_1^{-1} Q_2 Q_1^{-1} U). \quad (39)$$

证 根据Schur补引理, 式(24)成立当且仅当

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & * & * \\ 0 & -P_2 & * \\ \hat{A}_0(\delta) & \hat{A}_1(\delta) & -P_1^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

其中 $\Psi_1 = P_2 - P_1 + R_1 + K^T R_2 K$. 由式(18)和式(19), 式(40)可改写为如下形式:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & * & * \\ 0 & -P_2 & * \\ A_d + B_{d0}K & B_{d1}K & -P_1^{-1} \end{bmatrix} + \Psi_2^T \times \frac{\Theta(\delta)}{\sigma} \times \Psi_3 + (\Psi_2^T \times \frac{\Theta(\delta)}{\sigma} \times \Psi_3)^T < 0, \quad (41)$$

其中: $\Psi_2 = [0 \ 0 \ \sigma M^T]$, $\Psi_3 = [B_1K \ -B_1K \ 0]$. 根据文献[4], 可知 $\Theta(\delta)\Theta(\delta)^T/\sigma^2 \leq I$. 由文献[6]中引理2, 可知式(41)成立, 当且仅当存在标量 $\alpha > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 + R_1 & * & * & * & * \\ 0 & -P_2 & * & * & * \\ A_d + B_{d0}K & B_{d1}K & -P_1^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & \alpha\sigma M^T & -\alpha I & * \\ B_1K & -B_1K & 0 & 0 & -\alpha I \end{bmatrix} + [K \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T R_2 [K \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] < 0. \quad (42)$$

根据Schur补引理, 式(42)成立当且仅当

$$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 & * & * & * & * & * \\ 0 & -P_2 & * & * & * & * \\ A_d + B_{d0}K & B_{d1}K & -P_1^{-1} & * & * & * \\ 0 & 0 & \alpha\sigma M^T & -\alpha I & * & * \\ B_1K & -B_1K & 0 & 0 & -\alpha I & * \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2^{-1} \end{bmatrix} + [I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T R_1 [I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] < 0. \quad (43)$$

根据Schur补引理, 可知式(43)成立当且仅当

$$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -P_2 & * & * & * & * & * \\ A_d + B_{d0}K & B_{d1}K & -P_1^{-1} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \alpha\sigma M^T - \alpha I & * & * & * & * \\ B_1K & -B_1K & 0 & 0 & -\alpha I & * & * \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2^{-1} & * \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (44)$$

在不等式(44)的左右两端分别左乘和右乘

$$\text{diag}\{P_1^{-1}, P_1^{-1}, I, I, I, I, I\},$$

并令 $Q_1 = P_1^{-1}$, $Q_2 = P_1^{-1} P_2 P_1^{-1}$, 可得式(38)成立, 并可将式(25)改写为

$$J^* = \bar{x}^T(0) Q_1^{-1} \bar{x}(0) + \bar{x}^T(-1) Q_1^{-1} Q_2 Q_1^{-1} \bar{x}(-1).$$

由式(25)可知, 系统(17)的性能上界取决于系统的初始状态. 为避免此依赖, 假设系统的初始状态是未知的, 但是包含于下面的集合中^[10-11], $G = \{\bar{x}(-i) \in \mathbb{R}^n : \bar{x}(-i) = U v_i, v_i^T v_i \leq 1, i=0, 1\}$, 其中 U 是给定的常矩阵, 可得

$$J^* = v_0^T U^T Q_1^{-1} U v_0 + v_1^T U^T Q_1^{-1} Q_2 Q_1^{-1} U v_1 \leq \lambda_{\max}(U^T Q_1^{-1} U) + \lambda_{\max}(U^T Q_1^{-1} Q_2 Q_1^{-1} U).$$

因此, 控制器(8)是系统(17)的指数稳定保性能控制器, 相应的性能上界为式(39). 证毕.

定理3 对于系统(17), 给定二次型性能指标(7)和控制器(8), 对于 $\tau_L \leq \tau(k) \leq \tau_U$, 已知 σ 满足式(20), 若存在适维矩阵 $Q_1 > 0$ 和 $Q_2 > 0$ 和 Q_3 , 以及标量 $\alpha > 0$, 使得如下LMI成立:

$$\begin{bmatrix} Q_2 - Q_1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -Q_2 & * & * & * & * & * \\ \Omega_{31} & B_{d1}Q_3 & -Q_1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \alpha\sigma M^T - \alpha I & * & * & * & * \\ B_1Q_3 & -B_1Q_3 & 0 & 0 & -\alpha I & * & * \\ Q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2^{-1} & * \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (45)$$

其中 $\Omega_{31} = A_d Q_1 + B_{d0} Q_3$, 则控制器(8)是系统(17)的指数稳定保性能控制器, 且相应的性能上界为式(39), 并且其控制增益为 $K = Q_3 Q_1^{-1}$.

证 在式(38)中, 令 $Q_3 = K Q_1$, 得式(45)成立. 所以控制器(8)是系统(17)的指数稳定保性能控制器, 性能上界为式(39), 控制增益 $K = Q_3 Q_1^{-1}$. 证毕.

4 仿真算例

4.1 算例1

考虑文献[10–11]中算例仿真给出的广义系统,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

显然, 该系统满足假设1. 选择相同的参数, 即:

$P = Q = I_2$, $h = 0.1$ s, $\tau_L = 0$ s, $\tau_U = 0.1$ s; $U = [0.1/0.2]$ 为系统的初始条件集; 在式(7)中,

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.3 \\ 0.3 & 1.2 \end{bmatrix},$$

$R_2 = 2$. 由式(2), 可得 $A_1 = -4$, $B_1 = 4$, $B_2 = 3$. 分别使用方法1和方法2, 求取 τ_N 和相应的 σ , 并应用定理3求取指数稳定保性能控制器增益 K , 及相应的性能上界 J^* , 所得到的结果列于表1中.

表1 算例1的仿真结果

Table 1 Simulation results of Example 1

方法	τ_N	σ	K	J^*
1	0.0550	0.0493	[0.0251 0.0000]	0.1642
2	0.0500	0.0554	[0.0218 0.0000]	0.1634

注4 在文献[10–11]中, $J^* = 368.3028$, $K = [-0.0522 -0.0250]$. 对比表1中的结果, 在本文中, 系统的性能上界 J^* 有较大幅度的降低. 因此, 基于标称点方法对系统建模使得系统的鲁棒性能有较大的提升, 从而验证了注1和注2的正确性.

4.2 算例2

图1所示为一个单回路电路系统^[1], 选取 $R = 1$ Ω , $L = 1$ H和 $C_0 = 1$ F, $V_R(t)$, $V_L(t)$ 和 $V_C(t)$ 是其分别对应的电压, $V_S(t)$ 是电源电压. 由电路原理, 可用方程组(46)对此电路系统进行描述,

$$\begin{cases} L\dot{I}(t) = V_L(t), \\ \dot{V}_C(t) = I(t)/C_0, \\ RI(t) = V_R(t), \\ V_L(t) + V_C(t) + V_R(t) = V_S(t). \end{cases} \quad (46)$$

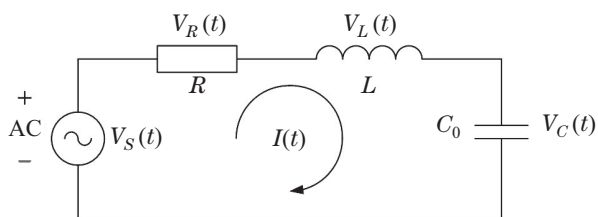


图1 单回路电路

Fig. 1 The single loop circuit

定义输入和状态向量分别为: $u(t) = V_S(t)$, $x(t) = [I(t) \ V_L(t) \ V_C(t) \ V_R(t)]^T$. 因此, 方程组(46)可转化为广义系统(1), 其中:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

上述系统显然满足假设1. 选取变换矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由式(2), 可以得到形如式(3)的等价系统, 其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

显然, 方阵 A_1 具有一对共轭复数特征值, 即: $\lambda_{1,2} = -0.5000 \pm j0.8660$. 所以, 在文献[10–13]中所给出的方法均不适用. 因此, 验证了注3的正确性.

令 $h = 1$ s, $\tau_L = 0.1$ s, $\tau_U = 0.9$ s; 系统的初始条件集为 $U = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$; 在式(7)中, $R_1 = I_4$, $R_2 = 1$. 为了绘制系统(17)的状态轨迹, 令 $v_i = 1$, $i = 0, 1$, 可得 $\bar{x}(-i) = U$, $i = 0, 1$.

由方法1和定理3, 得 $\tau_N = 0.5360$ s, $\sigma = 0.4741$, $J^* = 14.1273$, $K = [-0.1178 \ 0.0120 \ 0.0001 \ 0]$. 由式(8), 得 $KQ^{-1} = [-0.1177 \ 0.0001 \ 0.0121 \ 0]$. 图2为系统(17)的状态轨迹 $\bar{x}(k)$ 和在各采样时刻的 $\tau(k)$.

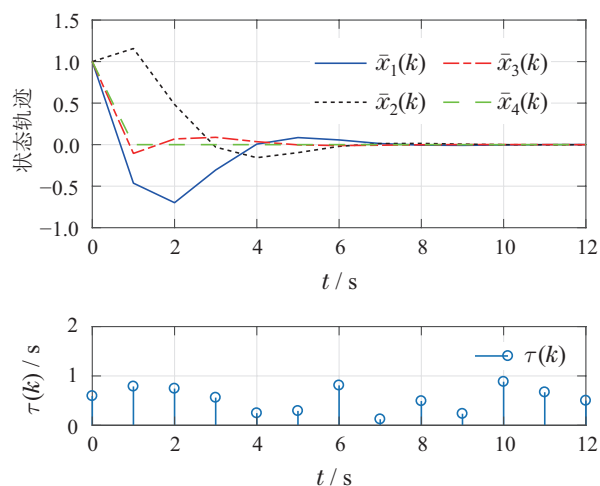


图2 基于方法1的仿真结果

Fig. 2 Simulation results based on method 1

由方法2和定理3, 得 $\tau_N = 0.5000$ s, $\sigma = 0.5625$, $J^* = 14.1448$, $K = [-0.1135 \ 0.0079 \ 0.0001 \ 0]$. 由式(8), 得 $KQ^{-1} = [-0.1134 \ 0.0001 \ 0.0080 \ 0]$. 图3为系统(17)的状态轨迹 $\bar{x}(k)$ 和在各采样时刻的 $\tau(k)$.

5 结论

本文使用标称点方法, 研究了具有短时变时延的广义NCSs的指数稳定保性能控制问题. 在LMI框架下, 给出了系统指数稳定的保性能控制器设计方法.

最后,工作的有效性通过2个仿真算例加以验证。

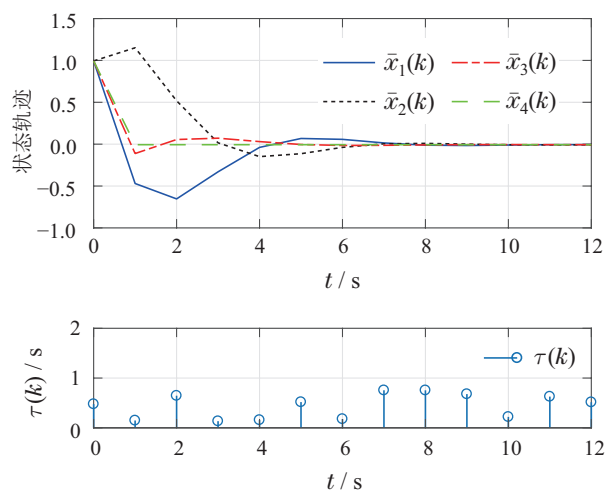


图3 基于方法2的仿真结果

Fig. 3 Simulation results based on method 2

参考文献:

- [1] DUAN G R. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. New York: Springer, 2012.
- [2] SAKTHIVEL R, SANTRA S, KAVIARASAN B. Resilient sampled-data control design for singular networked systems with random missing data. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355(3): 1040 – 1072.
- [3] ZHAO Y, LIU Y, MA Y. Robust finite-time sliding mode control for discrete-time singular system with time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2021, 358(9): 4848 – 4863.
- [4] ZHANG H, ZHANG Z, WANG Z, et al. New results on stability and stabilization of networked control systems with short time-varying delay. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(12): 2772 – 2781.
- [5] ZHANG Z, WANG Z, CHEN X, et al. Improved results on BIBO stability and stabilization of networked control systems with short time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(17): 7699 – 7716.
- [6] ZHANG Z, ZHANG H, WANG Z, et al. Non-fragile exponential H_∞ control for a class of nonlinear networked control systems with short time-varying delay via output feedback controller. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(8): 2008 – 2019.
- [7] LI Shanglin, JIANG Shun, PAN Feng. Robust exponential stability analysis for generalized networked control systems. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2018, 42(3): 300 – 316.
- (李尚霖, 姜顺, 潘丰. 广义网络化控制系统的鲁棒指数稳定性分析. *南京理工大学学报*, 2018, 42(3): 300 – 316.)
- [8] ZHOU H, LI H, ZHANG Z, et al. Stability analysis of singular networked control systems with short time-varying delay. *Proceedings of the 3rd World Conference on Mechanical Engineering and Intelligent Manufacturing*. Shanghai: IEEE, 2020: 631 – 634.
- [9] LIU L L, NING L, ZHANG Q L. Guaranteed cost control of singular networked control systems with time-delay. *Proceedings of the 20th Chinese Control and Decision Conference*. Yantai: IEEE, 2008: 415 – 418.
- [10] WANG Junyi, LI Chunji, CHEN Xiangyong. Guaranteed cost control for the singular networked control system with uncertain time-delay. *Journal of the Northeast University (Natural Science)*, 2012, 33(1): 25 – 29.
- (王军义, 李春吉, 陈向勇. 不确定时延广义网络控制系统的保性能控制. *东北大学学报(自然科学版)*, 2012, 33(1): 25 – 29.)
- [11] WANG Junyi. *Stability Analysis of Singular Networked Control Systems with Uncertain Time Delay*. Shenyang: Northeastern University, 2011.
- (王军义. 具有不确定时延的广义网络控制系统的稳定性分析. 沈阳: 东北大学, 2011.)
- [12] SHEN Y, ZHANG W A, NI H, et al. Guaranteed cost control of networked control systems with dos attack and time-varying delay. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2019, 17(4): 811 – 821.
- [13] FAN Weihua, CAI Hua, CHEN Qingwei, et al. Stability of networked control systems with time-delay. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(6): 880 – 884.
- (樊卫华, 蔡骅, 陈庆伟, 等. 时延网络控制系统的稳定性. *控制理论与应用*, 2004, 21(6): 880 – 884.)
- [14] SUH Y S. Stability and stabilization of nonuniform sampling systems. *Automatica*, 2008, 44(12): 3222 – 3226.

作者简介:

周红艳 博士研究生, 目前研究方向为广义网络控制系统, E-mail: zhou321yan@163.com;

张 钊 博士, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为信息物理系统、人工智能和鲁棒控制等, E-mail: zhangzhao333@hotmail.com;

陈雪波 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂群体系统的分解与控制、群体机器人控制与路径规划和人类群体理性意识涌现与非理性行为抑制等, E-mail: xuebochen@126.com;

李 华 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为计量经济模型、投资决策分析和优化模型及应用等, E-mail: lihuacust@263.net.