

随机开放量子系统的纯态开关反馈控制

董智翔, 丛爽[†]

(中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 针对目标态为纯态的情况, 本文对有限维随机开放量子系统, 提出一种同时适用于本征态和叠加态的开关控制, 它是由常量控制和基于李雅普诺夫方法设计的控制律组成, 实现随机开放量子系统的状态转移和收敛控制, 其中, 李雅普诺夫函数为系统的状态距离, 常量控制用来驱动系统状态从初始状态进入含有目标态的收敛域中, 李雅普诺夫控制用来使进入收敛域中的状态继续收敛到期望的目标态. 将所提出的控制方法, 应用于 2 比特随机开放量子系统进行了数值仿真实验, 并与本征态开关控制律方法进行了性能对比, 实验结果表明了所提出的控制律的优越性.

关键词: 量子系统; 纯态; 开关控制; 李雅普诺夫方法

引用格式: 董智翔, 丛爽. 随机开放量子系统的纯态开关反馈控制. 控制理论与应用, 2022, 39(1): 179 – 186

DOI: 10.7641/CTA.2021.10122

Pure state switching feedback control for stochastic open quantum systems

DONG Zhi-xiang, CONG Shuang[†]

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

Abstract: For the case that the target states are pure states, a switching control which is composed of a constant control and a control law based on Lyapunov control method is designed for the finite dimension stochastic open quantum system. The state transfer and convergence control of the system can be realized. The Lyapunov function is the state distance of the system. The constant control is used to drive the state of the system from the initial state to the convergence region containing the target state, and the Lyapunov control is used to make the state in the convergence region continue to converge to the desired target state. The proposed control method is applied to a 2-qubit stochastic open quantum system, and the performance is compared with the switching control law of eigenstates. The experimental results show the effectiveness of the proposed control law.

Key words: quantum system; pure states; switching control; Lyapunov method

Citation: DONG Zhixiang, CONG Shuang. Pure state switching feedback control for stochastic open quantum systems. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(1): 179 – 186

1 引言

根据系统是否与环境有相互作用, 量子系统可分为封闭量子系统和开放量子系统, 封闭量子系统是一个孤立的、与外界没有相互作用或能量交换的系统, 这类系统的状态演化是确定的. 在实际的量子信息处理和量子计算中, 系统往往由于自身或外界情况的不同而成为开放量子系统^[1]. 在量子领域的各类研究中, 量子系统的状态转移对量子化学和原子物理学等应用具有重要意义^[2-3], 为了控制量子系统状态转移至目标态, 许多经典的控制策略已经应用于量子系统,

例如: 最优控制^[4]、滑模控制^[5]、 H_∞ 控制^[6]及李雅普诺夫控制^[7-8]等, 其中, 量子系统的反馈控制可以获得更高的控制精度. 然而, 当反馈控制技术应用于量子系统时, 需要考虑测量对量子系统的影响, 而量子系统的测量将导致系统状态不可避免地以一种概率的方式发生变化^[9]. 考虑到量子系统测量的特殊性, Belavkin 等人将连续测量和反馈控制相结合, 提出了基于量子系统测量的反馈控制, 系统信息可以通过量子滤波器获得^[10]. 连续测量的量子滤波器的数学模型是一个随机微分方程, 称为随机主方程(stochastic

收稿日期: 2021-02-05; 录用日期: 2021-06-23.

[†]通信作者. E-mail: scong@ustc.edu.cn; Tel.: +86 551-63600710.

本文责任编辑: 席在荣.

国家自然科学基金项目(61973290, 61720106009)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61973290, 61720106009).

master equation, SME). 基于SME, van Handel等人研究了二维随机量子系统本征态的反馈控制^[11]. 针对角动量系统, Mirrahimi等人提出了一种开关反馈控制律, 首次实现了量子系统状态从任意初始态到任意本征态的全局稳定的状态转移^[12]; Tsumura在Mirrahimi所提出控制律的基础上提出一类连续控制律实现任意初始态到某个本征态的转移^[13]. 为了将受控量子系统扩展到更一般的有限维随机量子系统, Ge等人设计了一种非光滑状态反馈控制, 实现了本征态的状态转移^[2]. 对于随机开放量子系统的状态转移, 系统除有限个目标态以外, 往往还存在着多个平衡点, 如何控制系统状态收敛到目标态而不是其他平衡点是难点之一, 为此, 利用李雅普诺夫稳定性定理和拉塞尔不变集原理, Cong等人实现了随机开放量子系统一类特殊本征态和任意本征态的状态转移^[14-15]; Wen等人实现了一类具有简并测量算子的有限维随机量子系统的混合态的全局稳定和状态转移^[16]. 到目前为止, 还没有随机开放量子系统叠加态开关控制研究成果的相关报道.

本文通过开关控制律的设计, 实现对随机开放量子系统状态的状态转移和收敛控制, 目标态为同时包括本征态和叠加态的纯态, 通过设计控制律, 使得系统状态可以从状态空间的任意初态收敛到目标态. 为此, 设计的控制律包含两部分, 一是常量控制, 用于将系统状态从收敛域之外驱动到收敛域; 二是基于李雅普诺夫稳定性定理和拉塞尔不变集原理设计的控制律, 使通过第一步控制进入到系统收敛域中的系统状态收敛到目标状态. 当目标态为本征态时, 该状态是任意选取的. 当目标态为叠加态时, 对于单比特量子系统, 该状态也是任意选取的; 对于2比特或多比特量子系统, 该状态需要通过单量子位张量积的形式获得, 这是为了保证系统的平衡点是可数个. 在系统数值仿真实验中, 笔者将所设计的控制律与文献[15]中设计的控制律应用于2比特量子系统的状态转移中, 目标态分别为本征态和叠加态, 并将对状态转移的结果进行性能对比和分析.

本文的结构安排如下: 第2节为随机开放量子系统的数学模型及控制任务描述; 第3节为李雅普诺夫方法设计的控制律和常量控制组成的开关控制律及其特性分析; 第4节为基于上述开关控制律的系统数值仿真实验及其性能分析; 最后第5节为全文总结.

2 被控系统及其任务描述

2.1 被控系统描述

有限维量子滤波器的状态可以用密度矩阵 ρ_t 表示, 状态的演化为非线性随机微分方程, 即随机主方程(SME):

$$\rho_{t+\Delta t} - \rho_t =$$

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{\hbar}[H(t), \rho_t]\Delta t + [L\rho_t L^\dagger - (\frac{1}{2}L^\dagger L\rho_t + \\ & \frac{1}{2}\rho_t L^\dagger L)]\Delta t + \sqrt{\eta}(L\rho_t + \rho_t L^\dagger - \\ & \text{tr}(L\rho_t + \rho_t L^\dagger)\rho_t)dW, \end{aligned} \quad (1)$$

其中: 量子状态密度矩阵 $\rho_t \in \mathcal{S} = \{\rho_t \in \mathbb{C}^{2^n \times 2^n} : \rho_t = \rho_t^\dagger \succeq 0, \text{tr}(\rho_t) = 1\}$, n 为系统量子比特数, ρ_t^\dagger 表示 ρ_t 的共轭转置, $\text{tr}(\rho_t)$ 表示 ρ_t 的迹, \mathbb{C} 表示复数集, \mathcal{S} 表示状态空间; \hbar 为普朗克常量, 通常设置为1; $H(t) = H_0 + u_t H_1$ 为系统总哈密顿量, H_0 为自由哈密顿量, H_1 为控制哈密顿量, $u_t \in \mathbb{R}$ 为外加控制, \mathbb{R} 代表实数集; $L \in \mathbb{C}^{2^n \times 2^n}$ 为测量算符, 确定系统和测量装置之间的相互作用; Δt 为相互作用时间; $\eta \in (0, 1)$ 为测量效率; 令 $D[L, \rho_t] = L\rho_t L^\dagger - (\frac{1}{2}L^\dagger L\rho_t + \frac{1}{2}\rho_t L^\dagger L)$, 表示测量过程带来的确定性退相干作用, 表现为Lindblad形式的漂移项; 令 $B[L, \rho_t] = \sqrt{\eta}(L\rho_t + \rho_t L^\dagger - \text{tr}(L\rho_t + \rho_t L^\dagger)\rho_t)$ 表示测量过程带来的随机扩散项, 表现为对量子系统状态产生的干扰. dW 是零差测量时产生的随机噪声, 满足 $E(dW) = 0, E[(dW)^2] = \Delta t$ 的Wiener过程, $E(\cdot)$ 表示随机变量的期望值.

2.2 控制任务和控制思路

对于一个 n 比特随机开放量子系统, 本文所控制的目标态 ρ_f 为纯态, 即本征态和叠加态. 当目标态为本征态时, ρ_f 是任意的; 当目标态为叠加态时, ρ_f 可由 n 个单比特叠加态 ρ_{f1} 的张量积计算为

$$\begin{cases} \rho_f = \underbrace{\rho_{f1} \otimes \cdots \otimes \rho_{f1}}_n \otimes \rho_{f1}, \\ \rho_{f1} = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $a(1-a) = bb^*$, b^* 表示 b 的共轭复数.

针对目标态为纯态的情况, 本文设计一个开关反馈控制(switching feedback control, SFC), 来实现系统状态可以从状态空间的任意初态收敛到目标态. 具体控制思路为首先, 根据李雅普诺夫定理, 构造一个合适的李雅普诺夫函数 V , 通过设计控制律 $u(\rho_t)$ 使 V 的无穷小算子 $\mathcal{L}V \leq 0$, 并且在目标态时 $V(\rho_f) = 0$, 从而目标态是概率稳定的; 然后, 根据拉塞尔不变集原理, 分析系统的不变集, 并通过参数设置确定系统状态的收敛域, 使得该收敛域中只包含目标态, 则位于收敛域中的系统状态在控制律 $u(\rho_t)$ 的作用下可以唯一地收敛到目标态. 为了使不在收敛域中的系统状态也能收敛到目标态, 设计了常量控制 u_c . 在此控制律作用下, 系统状态可以在有限时间内进入收敛域中. 通过这样的方式, 将控制律 $u(\rho_t)$ 和常量控制 u_c 组合成开关控制律 u_t , 在 u_t 的作用下, 系统状态就可以从状态空间的任意初态收敛到目标态.

3 控制律设计及其特性分析

本小节中, 首先基于李雅普诺夫稳定性定理设计控制律 $u(\rho_t)$; 再基于拉塞尔不变集原理确定系统的收敛域, 并给出参数取值的条件; 最后给出开关控制律 u_t 的具体表达式.

3.1 控制律 $u(\rho_t)$ 的设计

构造一个李雅普诺夫函数:

$$V(\rho_t) = 1 - \text{tr}(\rho_t \rho_f) + \text{ctr}^2(P\rho_t), \quad (3)$$

其中: $c \in \mathbb{R}$ 且 $c \geq 0$, $P \in \mathbb{C}^{2^n \times 2^n}$, 满足 $\text{tr}(P\rho_f) = 0$. 显然 $V \geq 0$ 且 $V(\rho_f) = 0$, 满足李雅普诺夫函数设计要求. 需要注意的是, 在后面的工作中, 通过设计(3)中的参数 P 和 c , 可以确定系统的收敛域, 并使得收敛域中只包含目标态.

根据式(3), $V(\rho_t)$ 的无穷小算子 $\mathcal{L}V(\rho_t)$ 为

$$\mathcal{L}V(\rho_t) = -\mathcal{L}\text{tr}(\rho_t \rho_f) + c\mathcal{L}\text{tr}^2(P\rho_t). \quad (4)$$

根据随机开放量子系统随机主方程(1), 有

$$\begin{aligned} \text{dtr}(\rho_t \rho_f) = & \text{tr}(-i[H_0, \rho_t]\rho_f + L\rho_t L^\dagger \rho_f - \\ & (\frac{1}{2}L^\dagger L\rho_t + \frac{1}{2}\rho_t L^\dagger L)\rho_f)dt + \\ & \text{tr}(-i[H_1, \rho_t]\rho_f)u_t dt + \sqrt{\eta}(L\rho_t \rho_f + \\ & \rho_t L^\dagger \rho_f - \text{tr}(L\rho_t + \rho_t L^\dagger)\rho_t \rho_f)dW, \end{aligned} \quad (5)$$

因此,

$$\mathcal{L}\text{tr}(\rho_t \rho_f) = \text{tr}(\alpha \rho_f) + \text{tr}(-i[H_1, \rho_t]\rho_f)u_t, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha = & -i[H_0, \rho_t]\rho_f + L\rho_t L^\dagger \rho_f - (\frac{1}{2}L^\dagger L\rho_t + \\ & \frac{1}{2}\rho_t L^\dagger L)\rho_f, \end{aligned}$$

为了计算 $\mathcal{L}\text{tr}^2(P\rho_t)$, 首先结合式(1)计算 $\text{dtr}(P\rho_t)$,

$$\begin{aligned} \text{dtr}(P\rho_t) = & \text{tr}(Pd\rho_t) = \\ & \text{tr}(P\alpha)dt + \text{tr}(-i[H_1, \rho_t]P)u_t dt + \text{tr}(P\delta)dW, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\delta = \sqrt{\eta}(L\rho_t + \rho_t L^\dagger - \text{tr}(L\rho_t + \rho_t L^\dagger)\rho_t)$. 利用伊藤引理(Ito lemma)^[17], $\text{dtr}^2(P\rho_t)$ 可计算为

$$\begin{aligned} \text{dtr}^2(P\rho_t) = & 2\text{tr}(Pd\rho_t)\text{dtr}(P\rho_t) + (\text{dtr}(P\rho_t))^2 = \\ & 2\text{tr}(Pd\rho_t)(\text{tr}(P\alpha)dt + \text{tr}(-i[H_1, \rho_t]P)u_t dt + \\ & \text{tr}(P\delta)dW) + (\text{dtr}(P\rho_t))^2, \end{aligned} \quad (8)$$

根据式(7)–(8), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2\text{tr}(P\rho_t) = & 2\text{tr}(Pd\rho_t)(\text{tr}(P\alpha) + \\ & \text{tr}(-i[H_1, \rho_t]P)u_t + \text{tr}^2(P\delta)). \end{aligned} \quad (9)$$

将式(6)和式(9)代入式(4)可得

$$\mathcal{L}V(\rho_t) =$$

$$\begin{aligned} & 2\text{ctr}(P\rho_t)\text{tr}(P\alpha) + \text{ctr}^2(P\delta) + \text{tr}(\alpha\rho_f) + \\ & 2\text{ctr}(P\rho_t)\text{tr}(-i[H_1, \rho_t]P)u_t - \\ & \text{tr}(-i[H_1, \rho_t]\rho_f)u_t = \\ & G(\rho_t) + u_t g(\rho_t), \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$G(\rho_t) = 2\text{ctr}(P\rho_t)\text{tr}(P\alpha) + \text{ctr}^2(P\delta) + \text{tr}(\alpha\rho_f), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} g(\rho_t) = & \\ & 2\text{ctr}(P\rho_t)\text{tr}(-i[H_1, \rho_t]P) - \text{tr}(-i[H_1, \rho_t]\rho_f). \end{aligned} \quad (12)$$

设计控制律为

$$u(\rho_t) = -\frac{G(\rho_t)}{g(\rho_t)} - k_v g(\rho_t), \quad (13)$$

其中 $k_v \in \mathbb{R}$ 且 $k_v > 0$. 将式(13)代入式(10), 可得

$$\mathcal{L}V(\rho_t) = -k_v g^2(\rho_t) \leq 0. \quad (14)$$

故控制律 $u(\rho_t)$ 满足李雅普诺夫设计原理.

3.2 系统不变集分析及参数设计

根据拉塞尔不变集原理, 对于任意初态, 在控制律 $u(\rho_t)$ 的作用下, 系统状态会依概率收敛于不变集

$$R = \{\rho_R : \mathcal{L}V(\rho_R) = 0\} = \{\rho_R : g(\rho_R) = 0\}, \quad (15)$$

其中 ρ_R 为不变集 R 中的状态, 即系统的平衡点.

对于目标态 ρ_f , 易知 $g(\rho_f) = 0$, 因此 $\rho_f \in R$. 根据李雅普诺夫定理和拉塞尔不变集原理, 如果不变集 R 中只包含目标态 ρ_f , 控制律 $u(\rho_t)$ 可以使系统状态从任意初态收敛到目标态. 然而, 不变集 R 中可能包含除目标态以外的其他状态, 系统状态也会依概率收敛到这些状态. 为了解决此问题, 本文通过参数 P 和 c 的设计, 确定系统的收敛域, 使得此收敛域中只包含目标态, 即系统状态在此收敛域中可以在控制律的作用下唯一地收敛到目标态.

根据设计需求, 参数 P 和 c 的设计需满足两个条件:

- 1) 使得目标态的李雅普诺夫函数值 $V(\rho_f)$ 为0;
- 2) 保证系统收敛域中的平衡点只包含目标态 ρ_f .

为了满足要求1), 令:

$$\begin{aligned} V(\rho_f) = & 1 - \text{tr}(\rho_f \rho_f) + \text{ctr}^2(P\rho_f) = \\ & \text{ctr}^2(P\rho_f) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

可得

$$\text{tr}(P\rho_f) = 0. \quad (17)$$

为了满足要求2), 首先需分析不变集 R 中除目标态外的其他状态. 当 $\rho_R \neq \rho_f$ 时, 系统的所有平衡点 ρ_R 满足条件

$$\begin{aligned} g(\rho_R) = & 2\text{ctr}(P\rho_R)\text{tr}(-i[H_1, \rho_R]P) - \\ & \text{tr}(-i[H_1, \rho_R]\rho_f) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

当系统的控制哈密顿量 H_1 和目标态 ρ_f 确定时,方程(18)的解仅和参数 P 和 c 有关,即通过参数 P 和 c 的选取可以确定系统不变集中的平衡点,从而确定系统的收敛域.在第2.2节中,给出了本文控制的目标态形式,目的是为了保证方程(18)有可数个解,假设该方程除目标态 ρ_f 外还有 m 个解: $\{\rho_{R1}, \rho_{R2}, \dots, \rho_{Rm}\}$,则不变集 R 中的状态为 $R = \{\rho_{R1}, \rho_{R2}, \dots, \rho_{Rm}, \rho_f\}$.

为了便于描述,定义: $V_{\max} := \max_{\rho \in \mathcal{S}} V(\rho)$, 表示位于状态空间 \mathcal{S} 中的状态 ρ 的李雅普诺夫函数最大值; $Q_{>\theta} := \{\rho \in \mathcal{S} : \theta < V(\rho) < V_{\max}\}$, $Q_{\leq\theta} := \{\rho \in \mathcal{S} : 0 \leq V(\rho) \leq \theta\}$, 表示两类区域. 令

$$Q = \min[V(\rho_{Ri})] - V(\rho_{In}) > 0, \quad (19)$$

$$M = V(\rho_{In}) + \frac{Q}{2} > 0, \quad (20)$$

其中: $\rho_{In} = \frac{1}{n}I$, I 为 $2^n \times 2^n$ 型单位矩阵, n 为量子比特数; $\rho_{Ri} \neq \rho_f, i = 1, 2, \dots, m$ 为系统的 i 个平衡点. $Q_{\leq M}$ 即为所设计的收敛域,显然, $0 = V(\rho_f) < M < \min[V(\rho_{Ri})]$, 即收敛域 $Q_{\leq M}$ 中只包含目标态 ρ_f . P 和 c 的选取需使得式(19)和式(20)成立, 即

$$0 < V(\rho_{In}) < \min[V(\rho_{Ri})]. \quad (21)$$

由此, 式(17)和式(21)即为参数 P 和 c 的两个选取要求.

3.3 开关控制策略

由第3.2节分析可知, 在系统的收敛域 $Q_{\leq M}$ 中, 系统状态可以在控制律 $u(\rho_t)$ 的作用下收敛到目标态, 为了使目标态可以从状态空间的任意初态收敛到目标态, 设计了一个常量控制 $u_c = 1$, 用来驱动位于系统收敛域外的系统状态进入收敛域中, 从而形成开关控制律 u_t , 设计原理如图1所示. 图中, 状态空间 \mathcal{S} 被分为3个区域: 最外层的白色区域 $Q_{>M+\frac{Q}{4}}$ 、中间蓝色区域 Φ 和内层黄色区域 $Q_{\leq M}$.

结合图1, 本文设计的开关控制律 u_t 的表达式为

$$u_t = \begin{cases} u_c = 1, & \text{若 } \rho_t \in Q_{>M+\frac{Q}{4}}, \text{ 或 } \rho_t \in \Phi \text{ 且} \\ & \rho_t \text{ 是从区域 } Q_{>M+\frac{Q}{4}} \text{ 中进入 } \Phi, \\ u(\rho_t) = -\frac{G(\rho_t)}{g(\rho_t)} - k_v g(\rho_t), & \text{若 } \rho_t \in Q_{\leq M}, \text{ 或 } \rho_t \in \Phi \text{ 且} \\ & \rho_t \text{ 是从区域 } Q_{\leq M} \text{ 中进入 } \Phi. \end{cases} \quad (22)$$

对于系统不变集中的状态 $R = \{\rho_{R1}, \rho_{R2}, \dots, \rho_{Rm}, \rho_f\}$, 只有目标态 ρ_f 位于收敛域 $Q_{\leq M}$ 内, 其他状态位于 $Q_{>M+\frac{Q}{4}}$ 区域内(图1中假设系统不变集中有4个状态, 且 $\min[V(\rho_{Ri})] = V(\rho_{R1})$). Φ 是一缓冲区域, 其作用是让位于 $Q_{\leq M}$ 和 $Q_{>M+\frac{Q}{4}}$ 边界附近的系统状态不会因为微小的扰动而使系统频繁切换控制律. 系

统的状态转移过程可依据状态所处区域的不同分为以下两种情况:

1) 若系统状态一直处于 $Q_{\leq M}$ 内, 则控制律一直是 $u(\rho_t)$, 由于 $Q_{\leq M}$ 中只包含目标态 ρ_f 这一个平衡点, 因此, 系统状态会唯一地转移至目标态.

2) 当只有常量控制 $u_c = 1$ 时, 系统状态会在有限时间内收敛到 ρ_{In} ^[15], 因此, 若系统状态在某一时刻位于 $Q_{\leq M}$ 之外, 则该状态在常量控制 $u_c = 1$ 的作用下, 一定可以转移至 $Q_{\leq M}$ 内, 并最终在控制律 $u(\rho_t)$ 的作用下转移至目标态.

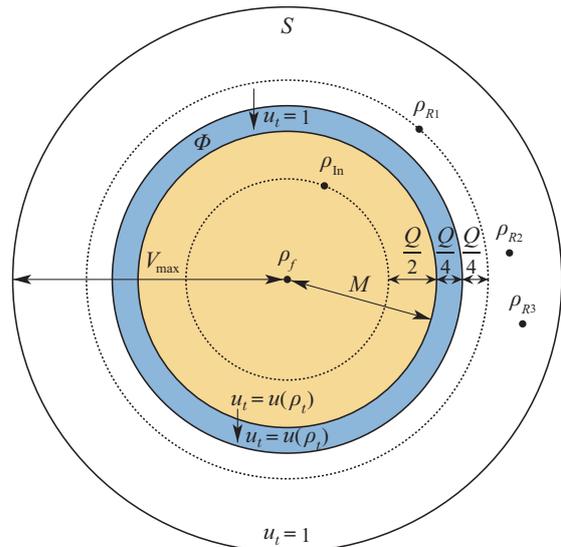


图1 开关控制律设计原理图

Fig. 1 Design principle of the switch control law

4 系统数值仿真实验及其结果分析

本节将所提出的控制方法(SFC)与文献[15]中的全局稳定控制方法(global stabilization control, GSC)进行性能对比的数值仿真实验, 比较在不同目标态情况下的状态转移效果. 笔者选取了2比特量子系统作为实验对象, 进行两组实验: 1) 本征态到本征态的状态转移实验; 2) 叠加态到叠加态的状态转移实验.

在所有仿真实验中, 系统参数设置为测量算符 $L = \sigma_z \otimes I + I \otimes \sigma_z$, 相互作用时间 $\Delta t = 0.01$, 测量效率 $\eta = 0.5$, 随机噪声 dW 的幅值为0.05, 采样总次数 $N = 600$, 系统自由哈密顿量 H_0 和控制哈密顿量 H_1 分别为

$$H_0 = \sigma_z \otimes I + I \otimes \sigma_z = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \sigma_x \otimes I + I \otimes \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 和 2×2 型单位矩阵

I 为 Pauli 算符. 对于状态转移效果的衡量, 本文采用保真度指标 $Fidelity(\rho_t, \rho_f)$, 其定义为

$$Fidelity(\rho_t, \rho_f) = \text{tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_t}\rho_f\sqrt{\rho_t}}), \quad (23)$$

其中: ρ_t 为系统的演化状态, ρ_f 为状态转移的目标态.

4.1 本征态到本征态的状态转移实验

在本实验中, 状态转移的初态设置为 $\rho_0 = \text{diag}\{[1, 0, 0, 0]\}$, 将目标态设置为 $\rho_f = \text{diag}\{[0, 0, 0, 1]\}$, 其中 $\text{diag}\{[a, b, c, d]\}$ 表示对角元素分别为 a, b, c, d 的对角矩阵. 结合参数 P 和 c 的选取条件式(17)和式(21), 选取

$$P = 0.4 * \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$c = 2$, 控制参数 $k_v = 2$.

根据上述参数, 通过式(18)计算, 可以得到系统的 4 个平衡点分别为

$$\rho_{R1} = \text{diag}\{[1, 0, 0, 0]\}, \rho_{R2} = \text{diag}\{[0, 1, 0, 0]\}, \\ \rho_{R3} = \text{diag}\{[0, 0, 1, 0]\}.$$

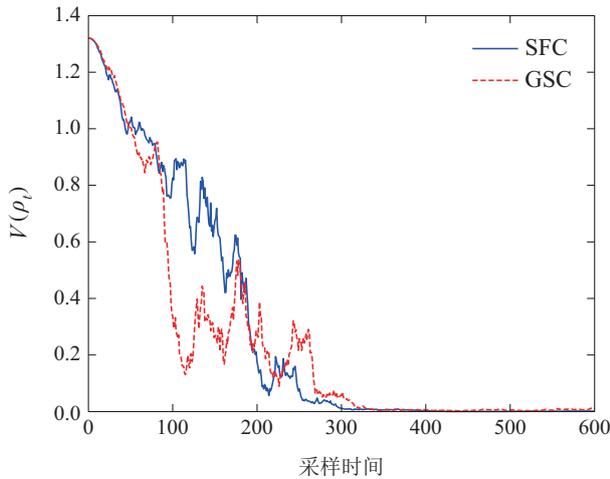
则根据式(19)和式(20), 可以计算出参数

$$Q = \min[V(\rho_{R1}), V(\rho_{R2}), V(\rho_{R3})] - V(\rho_{In}) = 0.1700,$$

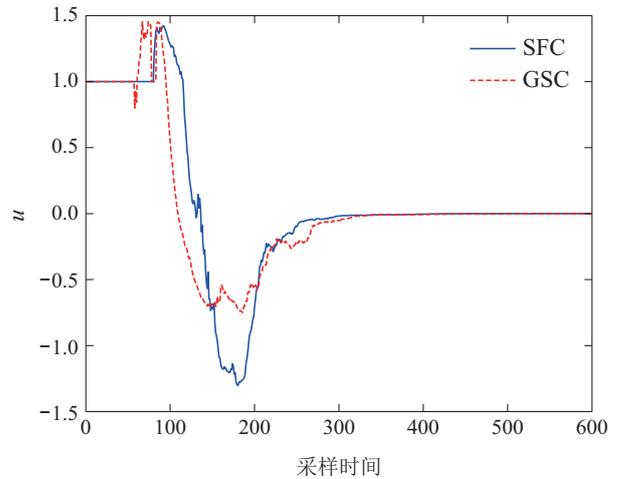
以及 $M = V(\rho_{In}) + \frac{Q}{2} = 0.9150$. 所需要的控制律根据式(22)可以设计为

- 1) 当 $V(\rho_t) > 0.9575$ 时, $u_t = 1$;
- 2) 当 $V(\rho_t) \leq 0.9150$ 时, $u_t = u(\rho_t)$;
- 3) 当 $0.9150 < V(\rho_t) \leq 0.9575$ 时, 若 ρ_t 是从区域 $Q_{\leq 0.9150}$ 进入 Φ , 则 $u_t = u(\rho_t)$, 否则 $u_t = 1$.

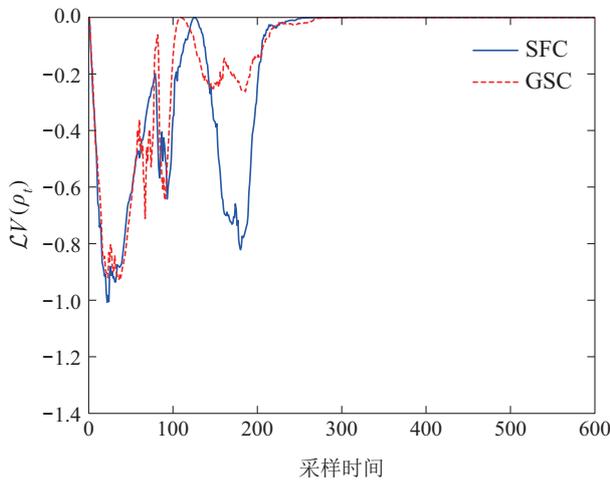
数值实验结果如图2所示, 其中: 图2(a)为李雅普诺夫函数 $V(\rho_t)$ 变化曲线; 图2(b)为控制律变化曲线; 图2(c)为无穷小算子 $\mathcal{L}V(\rho_t)$ 变化曲线; 图2(d)为保真度变化曲线; 图2(e)为利用 SFC 方法 ρ_t 中各对角元素变化曲线; 图2(f)为利用 GSC 方法 ρ_t 中各对角元素变化曲线. 图中, SFC 为本文的控制方法, GSC 为文献 [15] 中的控制方法.



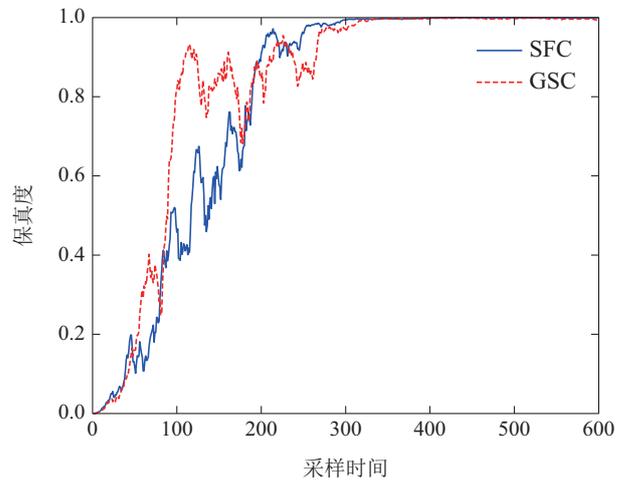
(a) 李雅普诺夫函数变化曲线



(b) 控制律曲线



(c) $\mathcal{L}V(\rho_t)$ 变化曲线



(d) 保真度变化曲线

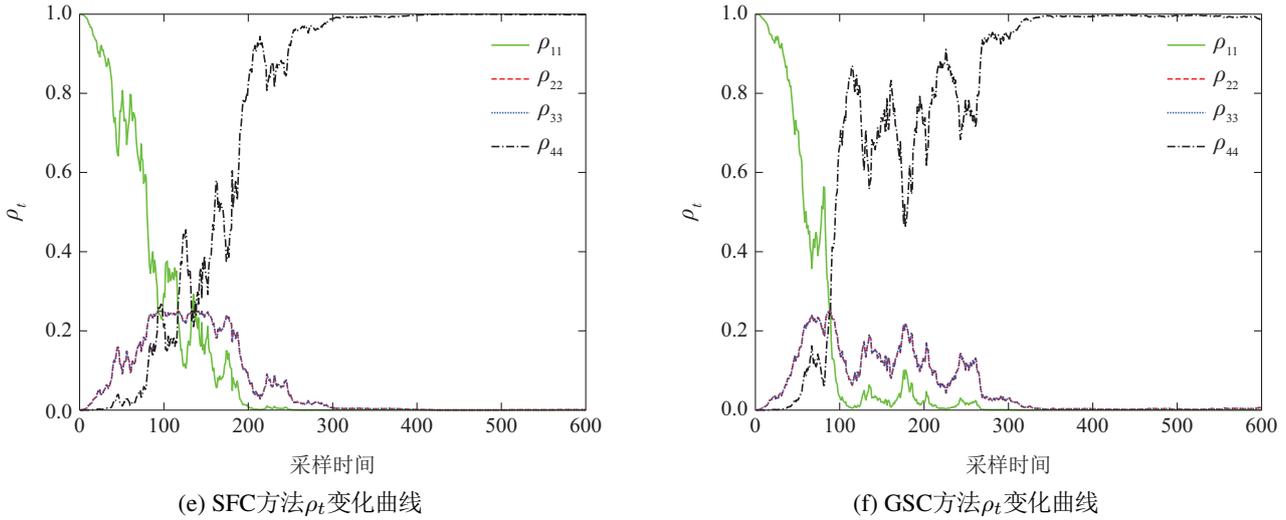


图2 本征态到本征态状态转移实验结果

Fig. 2 Experiment results from the eigenstate to the eigenstate

从图2中可以看出, SFC方法在65次演化之前, $V(\rho_t)$ 大于0.9150, 因此控制为常量控制 $u_t = 1$, 在此控制下, 状态 ρ_t 的变化最为迅速, 即系统状态会迅速转移到 $Q_{\leq 0.9150}$ 区域内; 此后的 $V(\rho_t)$ 一直小于0.9150, 故系统状态一直处于 $Q_{\leq 0.9150}$ 区域内, 系统的控制一直为 $u_t = u(\rho_t)$, 在此控制下, 系统状态缓慢变化并不断趋向目标态, 状态转移的保真度可达到99%. 实验的总体结论是: 当状态转移的目标态是本征态时, 虽然随机噪声给实验结果带来一定的不确定性, 不过采用SFC方法和GSC方法都能实现控制任务, 且控制效果大致相同.

4.2 叠加态到叠加态的状态转移实验

本实验中, 状态转移的初态 ρ_0 和目标态 ρ_f 均为叠加态

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{-15}}{8} \\ \frac{\sqrt{-15}}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{-15}}{8} \\ \frac{\sqrt{-15}}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.1406 & -0.1815 & -0.1815 & 0.2344 \\ -0.1815 & 0.2344 & 0.2344 & -0.3026 \\ -0.1815 & 0.2344 & 0.2344 & -0.3026 \\ 0.2344 & -0.3026 & -0.3026 & 0.3906 \end{bmatrix},$$

$$\rho_f = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{-2}}{3} \\ \frac{\sqrt{-2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{-2}}{3} \\ \frac{\sqrt{-2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.4444 & -0.3143 & -0.3143 & 0.2222 \\ -0.3143 & 0.2222 & 0.2222 & -0.1571 \\ -0.3143 & 0.2222 & 0.2222 & -0.1571 \\ 0.2222 & -0.1571 & -0.1571 & 0.1111 \end{bmatrix}.$$

同样结合参数 P 和 c 的选取条件式(17)和式(21), 选取

$$P = 0.4 * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$c = 2$, 控制参数 $k_v = 20$.

根据上述参数, 通过计算式(18), 可以得到系统的4个平衡点分别为

$$\rho_{R1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix},$$

$$\rho_{R2} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 & -0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25 & -0.25 & 0.25 \end{bmatrix},$$

$$\rho_{R3} = \begin{bmatrix} \frac{4}{16-8\sqrt{2}} & \frac{4-4\sqrt{2}}{16-8\sqrt{2}} \\ \frac{4-4\sqrt{2}}{16-8\sqrt{2}} & \frac{12-8\sqrt{2}}{16-8\sqrt{2}} \end{bmatrix} \otimes \dots$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 - 4\sqrt{2} \\ 16 - 8\sqrt{2} & 16 - 8\sqrt{2} \\ 4 - 4\sqrt{2} & 12 - 8\sqrt{2} \\ 16 - 8\sqrt{2} & 16 - 8\sqrt{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.7286 & -0.3018 & -0.3018 & 0.1250 \\ -0.3018 & 0.1250 & 0.1250 & -0.0518 \\ -0.3018 & 0.1250 & 0.1250 & -0.0518 \\ 0.1250 & -0.0518 & -0.0518 & 0.0214 \end{bmatrix},$$

则参数

$$Q = \min[V(\rho_{R1}), V(\rho_{R2}), V(\rho_{R3})] - V(\rho_{In}) = 0.0332,$$

$$M = V(\rho_{In}) + \frac{Q}{2} = 0.8832,$$

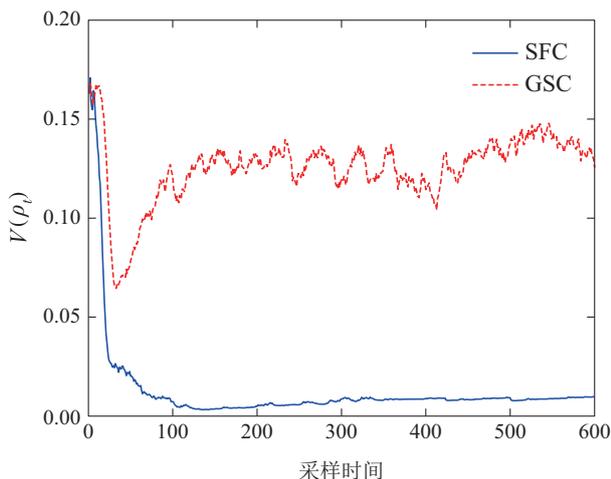
故本文设计的控制律(22)可写为

- 1) 当 $V(\rho_t) > 0.8915$ 时, $u_t = 1$;
- 2) 当 $V(\rho_t) \leq 0.8832$ 时, $u_t = u(\rho_t)$;
- 3) 当 $0.8832 < V(\rho_t) \leq 0.8915$ 时, 若 ρ_t 是从区域

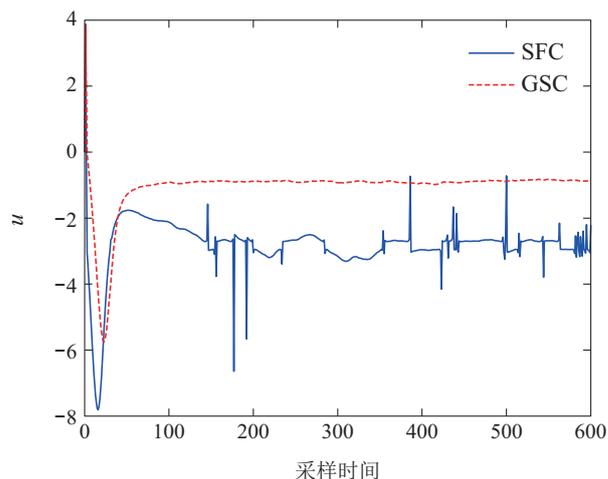
$\mathcal{Q}_{\leq 0.8832}$ 进入 Φ , 则 $u_t = u(\rho_t)$, 否则 $u_t = 1$.

数值实验结果如图3所示, 其中: 图3(a)为李雅普诺夫函数 $V(\rho_t)$ 变化曲线; 图3(b)为控制律变化曲线; 图3(c)为无穷小算子 $\mathcal{L}V(\rho_t)$ 变化曲线; 图3(d)为保真度变化曲线; 图3(e)为利用SFC方法 ρ_t 中各对角元素变化曲线; 图3(f)为利用GSC方法 ρ_t 中各对角元素变化曲线. 图中, SFC为本文的控制方法, GSC为文献[15]中的本征态控制方法.

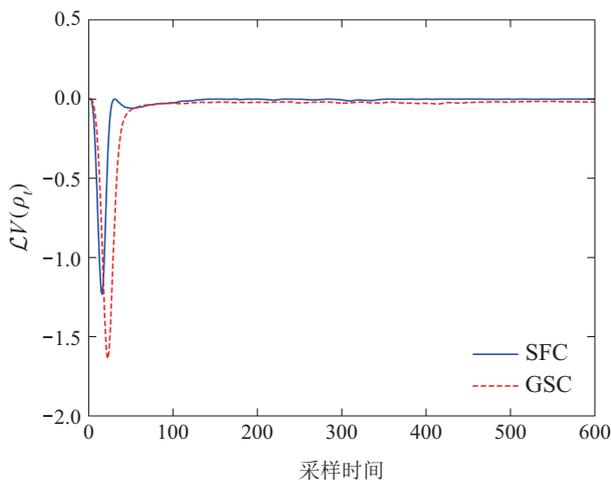
由图3可以看出, 当状态转移的目标态是叠加态时, 利用GSC方法无法从系统初态转移至目标态, 不能完成控制任务. 而本文提出的SFC方法是针对目标态为纯态的情况, 可以完成控制任务. 具体来看, 系统状态的李亚普诺夫数值 $V(\rho_t)$ 一直小于 0.8832, 故系统状态一直处于 $\mathcal{Q}_{\leq 0.8832}$ 区域内, 系统的控制一直为 $u_t = u(\rho_t)$, 在此控制作用下, $V(\rho_t)$ 逐渐下降, 状态转移的保真度逐渐上升并最终可达 99%, 实现了系统目标态的转移任务.



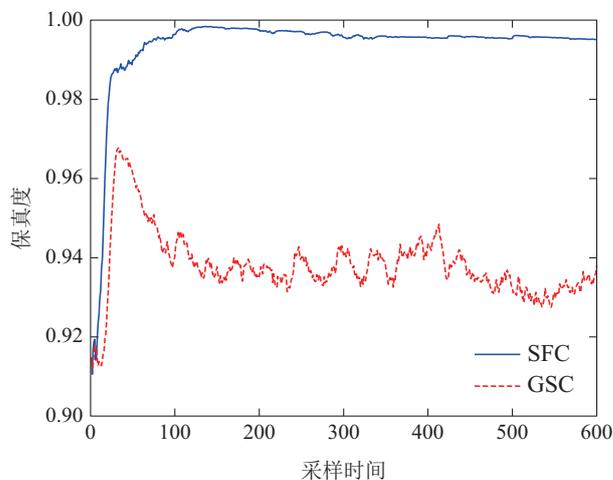
(a) 李雅普诺夫函数变化曲线



(b) 控制律曲线



(c) $\mathcal{L}V(\rho_t)$ 变化曲线



(d) 保真度变化曲线

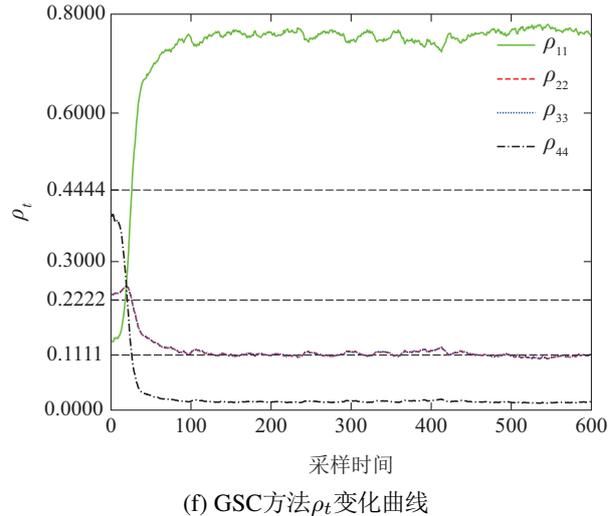
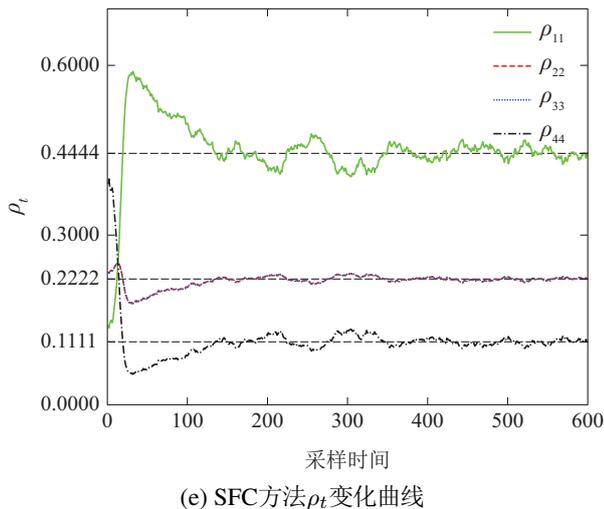


图3 叠加态到叠加态状态转移实验结果

Fig. 3 Experiment results from the the superposition state to the superposition state

5 结论

本文首次提出了一种对随机开放量子系统纯态的开关反馈控制方法. 在此之前, 人们仅可实现对随机开放量子系统的本征态或特殊混合态的控制. 本文给出了有关随机开放量子系统纯态开关反馈控制方法的完整设计过程, 下一步将把在线量子态估计应用其中, 开发可应用于实际实验中的随机开放量子系统纯态开关反馈控制技术.

参考文献:

- [1] CONG Shuang. State manipulation in Lyapunov-based quantum system control methods. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(3): 273 – 281.
(丛爽. 基于李雅普诺夫量子系统控制方法的状态调控. 控制理论与应用, 2012, 29(3): 273 – 281.)
- [2] GE S S, VU T L, HANG C C. Non-smooth Lyapunov function-based global stabilization for quantum filters. *Automatica*, 2012, 48(6): 1031 – 1044.
- [3] GE S S, VU T L, HANG C C. Quantum measurement-based feedback control: A nonsmooth time delay control approach. *SIAM Journal on Control & Optimization*, 2012, 50(2): 845 – 863.
- [4] D’ALESSANDRO D, DAHLEH M. Optimal control of two-level quantum system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 46(6): 866 – 876.
- [5] DONG D Y, PETERSEN I R. Sliding mode control of two-level quantum systems. *Automatica*, 2012, 48(5): 725 – 735.
- [6] JAMES M R, NURDIN H I, PETERSEN I R. H_∞ control of linear quantum stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(8): 1787 – 1803.
- [7] KUANG S, CONG S. Lyapunov control methods of closed quantum systems. *Automatica*, 2008, 44(1): 98 – 108.
- [8] WANG X, SCHIRMER S G. Analysis of effectiveness of Lyapunov control for non-generic quantum states. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(6): 1406 – 1411.
- [9] ADLER S L, BRODY D C, BRUNT A. Martingale models for quantum state reduction. *Journal of Physics A General Physics*, 2001, 34(42): 8795 – 8820.
- [10] BELAVKIN V P. Quantum stochastic calculus and quantum nonlinear filtering. *Journal of Multivariate Analysis*, 2005, 42(2): 171 – 201.
- [11] VAN H R, STOCKTON J K. Feedback control of quantum state reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 50(6): 768 – 780.
- [12] MIRRAHIMI M, VAN H R. Stabilizing feedback controls for quantum systems. *SIAM Journal on Control & Optimization*, 2007, 46(2): 445 – 467.
- [13] TSUMURA K. Global stabilization of N-dimensional quantum spin systems via continuous feedback. *American Control Conference*. New York: IEEE, 2007: 2129 – 2134.
- [14] CONG S, WEN J, KUANG S. Global stabilization of an eigenstate for stochastic quantum systems. *12th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*. Nepal: IEEE, 2016: 966 – 971.
- [15] CONG S, WEN J, KUANG S. Global stabilization control of stochastic quantum systems. *Science China Information Sciences*, 2016, 59(11): 122502.
- [16] WEN J, SHI Y, LU X. Stabilizing a class of mixed states for stochastic quantum systems via switching control. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355(5): 2562 – 2582.
- [17] BROOKS J K. Stochastic processes and stochastic integration in banach spaces – sciencedirect. *Handbook of Measure Theory*, 2002, 1: 449 – 502.

作者简介:

董智翔 硕士研究生, 目前研究方向为量子系统控制和量子状态估计, E-mail: dzx0808@mail.ustc.edu.cn;

丛爽 教授, 博士生导师, 主要研究方向为量子系统控制、神经网络系统、运动控制、机器人控制等, E-mail: scong@ustc.edu.cn.