

分布时滞随机偏微分系统的均方指数稳定性

李延波¹, 陈超洋^{2,3†}, 张晶华¹, 李成群¹

(1. 广西财经学院 信息与统计学院, 广西 南宁 530001; 2. 湖南科技大学 信息与电气工程学院, 湖南 湘潭 411201;

3. 中国科学院 深圳先进技术研究院, 广东 深圳 518055)

摘要: 针对一类同时具有分布时滞和维纳过程的随机偏微分系统, 首先基于Itô微分公式, 通过计算弱无穷小算子, 得到了随机微分导数; 其次利用Green公式和积分不等式及Schur补引理对矩阵不等式进行处理; 然后对微分两边积分并同时取数学期望处理随机交叉项; 获得了分布时滞随机偏微分系统是均方指数稳定的充分条件. 在此基础上, 进一步考虑了离散变时滞和分布变时滞在一定约束情形下的分布时滞随机偏微分系统的均方指数稳定性问题. 最后给出仿真实例, 仿真结果表明所获得的线性矩阵不等式条件保证了系统的稳定性, 验证了所得结论的有效性.

关键词: 随机偏微分系统; 分布时滞; Itô公式; 均方指数稳定性

引用格式: 李延波, 陈超洋, 张晶华, 等. 分布时滞随机偏微分系统的均方指数稳定性. 控制理论与应用, 2022, 39(11): 2185 – 2192

DOI: 10.7641/CTA.2021.10270

Mean-square exponential stability of stochastic partial differential systems with distributed time-delay

LI Yan-bo¹, CHEN Chao-yang^{2,3†}, ZHANG Jing-hua¹, LI Cheng-qun¹

(1. School of Information and Statistics, Guangxi University of Finance and Economics, Nanning Guangxi 530001, China;

2. School of Information and Electrical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan 411201, China;

3. Shenzhen Institutes of Advanced Technology, Chinese Academy of Sciences, Shenzhen Guangdong 518055, China)

Abstract: The sufficient conditions for mean-square exponential stability of stochastic partial differential system with distributed delays and Wiener processes are given. First of all, the stochastic differential derivative is obtained by calculating weak infinitesimal operator based on the Itô differential formula. Secondly, the matrix inequality is handled by the Green formula, the integral inequality and the Schur complement lemma. Then, both sides of the differential are integrated and mathematical expectation is taken to deal with the random cross term at the same time. On this basis, the mean-square exponential stability of distributed delay stochastic partial differential systems with discrete and distributed time-varying delay under certain constraints is further considered. Finally, a simulation example is given. The simulation results show the obtained linear matrix inequality conditions ensure the stability of the system and verify the effectiveness of the conclusions.

Key words: stochastic partial differential systems (SPDE); distributed time-delay; Itô formula; mean-square stability

Citation: LI Yanbo, CHEN Chaoyang, ZHANG Jinghua, et al. Mean-square exponential stability of stochastic partial differential systems with distributed time-delay. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(11): 2185 – 2192

1 引言

大量实际应用系统中, 如新型冠状病毒肺炎疫情的建模和预测模型^[1]、社会经济系统^[2]、气象应用系统等等, 在研究过程中都经常难以避免时滞现象的出

现. 时滞现象的存在不能有效地及时影响研究变量, 会导致研究系统各种波动及振荡, 不利于系统的稳定. 直到现在, 对于各种时滞系统的研究工作一直备受关注. 时间滞后主要包括离散时滞和分布时滞^[3]. 当系

收稿日期: 2021-03-31; 录用日期: 2021-09-23.

†通信作者. E-mail: ouzk@163.com; Tel.: +86 731-58290114.

本文责任编辑: 邓飞其.

国家重点研发计划国际科技创新合作项目(2019YFE0118700), 国家自然科学基金项目(61973110, 71961002), 湖南省杰出青年基金项目(2021JJ10030), 湖南省湖湘青年英才科技创新人才项目(2020RC3048), 广西财经学院博士科研启动项目(BS2019002), 统计学广西一流学科建设项目(2022SXYB03), 广西青年扩展项目(2020KY16018), 数字制造装备与技术国家重点实验室开放基金资助项目(DMETKF2022023)资助.

Supported by the National Key R&D Program of China for International S&T Cooperation Projects (2019YFE0118700), the National Natural Science Foundation of China (61973110, 71961002), the Distinguished Young Scholars of Hunan (2021JJ10030), the Hunan Young Talents Science and Technology Innovation Project (2020RC3048), the Startup Project of Doctor Scientific Research of Guangxi University of Finance and Economics (BS2019002), the Guangxi First-class Discipline Statistics Construction Project Fund (2022SXYB03), the Guangxi Enhancing Youth's Capacity Project (2020KY16018) and the Foundation of State Key Laboratory of Digital Manufacturing Equipment and Technology (DMETKF2022023).

统方程中求和的个数增加, 相邻参数值之间的差值减小时, 就会出现分布时滞系统. 分布时滞主要广泛应用于捕食模型^[4]、HIV-1动力学模型^[5]、SIRS传染病模型^[6]等数学建模中. 因此, 分布时滞在现实应用中具有宽广的研究基础. 目前, 对具有分布时滞的常微分方程 (ordinary differential equation, ODE) 的研究工作已经取得了丰硕的成果^[7-10].

随着对建模系统精准性要求的日益提高, 在数学建模过程中需要考虑的变量越来越多, 用确定性偏微分方程 (partial differential equation, PDE) 描述系统的实际需求增多. 因此, 时滞分布参数系统的研究工作逐渐得到很多学者的关注^[11-15]. 选取的研究方法 (或研究工具) 主要有线性矩阵不等式 (linear matrix inequality, LMI)^[11] 和李亚普诺夫辅助函数. 文献[12]研究了含离散常时滞不确定分布参数系统的指数稳定性. 文献[13]研究了具有离散变时滞分布参数系统的指数稳定性. 文献[14]利用Lyapunov稳定性理论并结合LMI处理方法研究了离散常时滞分布参数系统的中和控制问题. 文献[15]采用LMI方法, 设计状态反馈控制器研究了一类具有连续分布时滞的分布参数系统的反馈控制.

在电力系统^[16-17]、传染病模型系统^[18]及航空无线电控制系统等领域由于偶然现象及噪声等问题的出现, 随机系统得到了很大的发展. 文献[19]利用李亚普诺夫理论结合LMI方法研究了伊藤型中立型随机常微分系统的均方指数稳定性问题. 文献[20]研究了具有离散变时滞伊藤型随机常微分系统的滑模变结构控制. 文献[21]则考虑了不含任何时滞项的随机常微分方程的观测器滑模变结构控制问题. 显然, 文献[19-21]均是研究随机常微分系统 (stochastic ordinary differential, SODE) 而且没有考虑具有分布时滞的情形.

由于时间和空间的不确定性及随机波动^[22]的影响, 随机偏微分系统引起了学者的兴趣^[23-28]. 文献[23]将Lyapunov直接法推广到伊藤型随机反应扩散系统, 并建立了Lyapunov依概率渐近稳定性的基本理论. 文献[24]通过构造关于空间变量平均的李亚普诺夫函数来研究随机分布参数系统的镇定. 文献[25]基于模糊方法研究了传感器信号处理非线性随机偏微分系统的鲁棒滤波器问题. 文献[26-27]则研究了随机偏微分方程的最优控制. 文献[28-29]分别研究了含离散时滞随机偏微分方程 (stochastic partial differential equation, SPDE) 的指数稳定性、均方指数稳定性及 H_∞ 控制, 但都没有考虑含有分布时滞的情况.

综上所述, 目前对于同时具有分布时滞和随机现象的偏微分系统的均方指数稳定性研究工作还未见有报道. 分布时滞和随机现象更能精确展示实际系统的本质, 本文的主要工作是同时把分布时滞和伊藤过

程引入偏微分方程, 研究系统的均方指数稳定性及保守性问题.

本文针对一类含有分布时滞的随机偏微分系统的模型特征, 通过构造一系列合适的Lyapunov函数, 利用伊藤微分公式计算随机微分导数, 借用初值条件和格林公式处理含有拉普拉斯算子的交叉项; 利用Schur补引理, 以线性矩阵不等式的形式给出该系统均方指数稳定的充分条件. 然后, 进一步研究了同时含有时变离散时滞和时变分布时滞随机偏微分系统的均方指数稳定性问题. 最后, 通过仿真验证系统能在较短的时间内达到稳定状态.

2 系统描述

考虑如下一类具有分布时滞的Itô型随机偏微分系统:

$$\begin{aligned} dW(x, t) = & [D\Delta W(x, t) + AW(x, t) + \\ & A_1 W(x, t - \tau) + \\ & A_2 \int_{t-h}^t W(x, t) dt] dt + [CW(x, t) + \\ & C_1 W(x, t - \tau)] d\omega(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $W(x, t)$ 是状态变量, x 是空间变量, t 是时间变量. $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$,

$$\Omega = \{x, \|x\| < l < +\infty\} \subset \mathbb{R}^m$$

为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 且 $\text{mes}\Omega > 0$.

$$\Delta = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

为 Ω 上的Laplace算子,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right)$$

为梯度算子. 且 A, A_1, A_2, C, C_1 是具有适当维数的常数矩阵. $W(x, t)$ 满足如下初边值条件:

$$W(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [-d, 0], \quad (2)$$

$$W(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [-d, +\infty) \quad (3)$$

或

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial n} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [-d, +\infty), \quad (4)$$

n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\varphi(x, t)$ 为适当光滑的函数, $D > 0, h > 0$ 和 $\tau > 0$ 均为常数; 并且

$$d = \max\{\tau, h\}, \quad \omega(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i} w_i(t) e_i(x)$$

是在 $L^2(\Omega)$ 上具有有限迹协方差算子的维纳随机场 ($L^2(\Omega)$ 是勒贝格平方可积函数空间). 其中 $\{w_i(t)\}$ 是相互独立的取值在完备的概率空间 (Ω, F, P) 上具有自然流 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 的标准布朗运动, $\{e_i(t)\}$ 是在 $L^2(\Omega)$ 上的完备正交基. 因此有 $E\omega(x, t) = 0$, E 代表数学期

望.

$$\|W(\cdot, t)\|^2 = \int_{\Omega} W^T(x, t)W(x, t)dx.$$

为方便后面的研究, 给出如下定义和引理.

引理 1 (Green公式^[30]) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是边界 $\partial\Omega$ 光滑的有界区域, n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $G \subset \Omega$ 为一光滑子域, 若 $u, v \in C^2(\bar{G})$, 则

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

其中 dS 表示边界区域的面积微元.

引理 2^[31] 给定任意正定对称矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 实数 $\gamma > 0$ 及向量函数 $\alpha(t) : [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 则下面积分不等式成立:

$$\begin{aligned} & \gamma \int_0^\gamma \alpha^T(t) M \alpha(t) dt \geq \\ & \left[\int_0^\gamma \alpha^T(t) dt \right] M \left[\int_0^\gamma \alpha(t) dt \right]. \end{aligned}$$

定义 1 如果存在定常数 $\gamma > 0, \delta > 0$ 使得对满足系统(1)的系统状态 $W(x, t)$ 满足

$$E\|W(\cdot, t)\|^2 \leq \gamma e^{-\delta t} E\|\varphi\|^2,$$

则称此系统是均方指数稳定.

3 主要结论

定理 1 对同时含有离散时滞和分布时滞的 Itô 型随机偏微分系统(1), 如果存在合适维数的正定对称矩阵 P, Q 和 R 使得如下线性矩阵不等式:

$$\begin{pmatrix} \Pi & PA_1 & PA_2 & C^T P \\ * & -Q & 0 & C_1^T P \\ * & * & -\frac{1}{h}R & 0 \\ * & * & * & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (5)$$

成立, 这里 $\Pi = PA + A^T P + Q + hR$, 则系统(1)是均方指数稳定. 且有

$$E\|W(\cdot, t)\|^2 \leq e^{-\delta t} \frac{3b + be^{\delta\tau} + be^{\delta h}}{\lambda_{\min}(P)} E\|\varphi\|^2, \quad (6)$$

其中:

$$b = \max\{\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(Q), h\lambda_{\max}(R)\},$$

$\delta > 0$ 为定常数. $\lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(P)$ 分别表示实对称矩阵 P 特征值的最大值和最小值.

证 取如下恰当李亚普诺夫泛函:

$$\begin{aligned} V(t, W(x, t)) = & \\ V_1(t, W(x, t)) + V_2(t, W(x, t)) + V_3(t, W(x, t)), & \quad (7) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} V_1(t, W(x, t)) = & \int_{\Omega} W^T(x, t) P W(x, t) dx, \quad (8) \\ V_2(t, W(x, t)) = & \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \int_{t-\tau}^t W^T(x, t) Q W(x, t) dt dx, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V_3(t, W(x, t)) = & \\ \int_{\Omega} \int_{t-h}^t \int_s^t W^T(x, \theta) R W(x, \theta) d\theta ds dx. & \quad (10) \end{aligned}$$

由无穷维 Itô 公式^[32]得

$$\begin{aligned} dV(t, W(x, t)) = & \\ LV(t, W(x, t)) dt + 2 \int_{\Omega} W^T(x, t) P [CW(x, t) + & \\ C_1 W(x, t - \tau)] d\omega(x, t) dx, & \quad (11) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} LV(t, W(x, t)) = & \\ 2 \int_{\Omega} W^T(x, t) P [D \Delta W(x, t) + A W(x, t) + & \\ A_1 W(x, t - \tau) + A_2 \int_{t-h}^t W(x, t) dt] dx + & \\ \int_{\Omega} W^T(x, t) Q W(x, t) dx - & \\ \int_{\Omega} W^T(x, t - \tau) Q W(x, t - \tau) dx + & \\ h \int_{\Omega} W^T(x, t) R W(x, t) dx - & \\ \int_{\Omega} \int_{t-h}^t W^T(x, \theta) R W(x, \theta) d\theta dx + & \\ \int_{\Omega} [CW(x, t) + C_1 W(x, t - \tau)]^T P & \\ [CW(x, t) + C_1 W(x, t - \tau)] dx. & \quad (12) \end{aligned}$$

由引理 1 及边界条件得

$$\begin{aligned} 2D \int_{\Omega} W^T(x, t) P \Delta W(x, t) dx = & \\ -2D \int_{\Omega} \nabla W^T(x, t) P \nabla W(x, t) dx \leq 0, & \quad (13) \end{aligned}$$

由引理 2 得

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \int_{t-h}^t W^T(x, \theta) R W(x, \theta) d\theta dx \leq & \\ - \frac{1}{h} \int_{\Omega} \left[\int_{t-h}^t W^T(x, \theta) d\theta \right] R \times & \\ \left[\int_{t-h}^t W(x, \theta) d\theta \right] dx, & \quad (14) \end{aligned}$$

则把式(13)–(14)代入式(12)整理得

$$\begin{aligned} LV(t, W(x, t)) \leq & \\ \int_{\Omega} W^T(x, t) (A^T P + PA + Q + hR + & \\ C^T P C) W(x, t) dx + & \\ \int_{\Omega} W^T(x, t - \tau) (C_1^T P C_1 - Q) W(x, t - \tau) dx + & \\ 2 \int_{\Omega} W^T(x, t) (PA_1 + C^T P C_1) W(x, t - \tau) dx + & \\ 2 \int_{\Omega} W^T(x, t) P A_2 \left[\int_{t-h}^t W(x, \theta) d\theta \right] dx - & \\ \frac{1}{h} \int_{\Omega} \left[\int_{t-h}^t W^T(x, \theta) d\theta \right] R \left[\int_{t-h}^t W(x, \theta) d\theta \right] dx. & \quad (15) \end{aligned}$$

令

$$\xi^T(x, t) = [W^T(x, t), W^T(x, t - \tau), \int_{t-h}^t W^T(x, \theta) d\theta],$$

则

$$LV(t, W(x, t)) \leq \int_{\Omega} \xi^T(x, t) A \xi(x, t) dx,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} \Theta & PA_1 + C^T PC_1 & PA_2 \\ * & C_1^T PC_1 - Q & 0 \\ * & 0 & -\frac{1}{h}R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P + PA + Q + hR & PA_1 & PA_2 \\ * & -Q & 0 \\ * & 0 & -\frac{1}{h}R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T P \\ C_1^T P \\ 0 \end{bmatrix} P^{-1} [PC \quad PC_1 \quad 0], \quad (16)$$

并且

$$\Theta = A^T P + PA + Q + hR + C^T PC.$$

利用Schur补引理^[16]及线性矩阵不等式(5)得

$$LV(t, W(x, t)) < 0.$$

显然, 存在 $a > 0$, 使得下面矩阵不等式成立:

$$A + \begin{pmatrix} aI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < 0. \quad (17)$$

所以

$$LV(t, W(x, t)) < -a \int_{\Omega} \xi^T(x, t) \xi(x, t) dx \leq -a \int_{\Omega} W^T(x, t) W(x, t) dx. \quad (18)$$

由于

$$V_1(t, W(x, t)) \leq \lambda_{\max}(P) \int_{\Omega} W^T(x, t) W(x, t) dx, \quad (19)$$

$$V_2(t, W(x, t)) \leq \lambda_{\max}(Q) \int_{\Omega} \int_{t-\tau}^t W^T(x, t) W(x, t) dt dx, \quad (20)$$

$$V_3(t, W(x, t)) = \int_{\Omega} \int_{t-h}^t \int_s^t W^T(x, \theta) RW(x, \theta) d\theta ds dx = \int_{\Omega} \int_{t-h}^t (\theta - t + h) W^T(x, \theta) RW(x, \theta) d\theta dx \leq h \lambda_{\max}(Q) \int_{\Omega} \int_{t-h}^t W^T(x, \theta) W(x, \theta) d\theta dx. \quad (21)$$

由式(19)–(21), 且取

$$b = \max\{\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(Q), h\lambda_{\max}(R)\},$$

得

$$V(t, W(x, t)) \leq b \|W(\cdot, t)\|^2 + b \int_{t-\tau}^t \|W(\cdot, \theta)\|^2 d\theta + b \int_{t-h}^t \|W(\cdot, \theta)\|^2 d\theta. \quad (22)$$

又由于

$$d(e^{\delta t} V(t, W(x, t))) = e^{\delta t} [LV(t, W(x, t)) + \delta V(t, W(x, t))] dt + 2e^{\delta t} \int_{\Omega} W^T(x, t) P [CW(x, t) + C_1 W(x, t - \tau)] d\omega(x, t) dx. \quad (23)$$

对式(23)从0到 t 积分两边不等式且取数学期望得

$$e^{\delta t} EV(t, W(x, t)) = EV(0, W(x, 0)) + E\left\{\int_0^t e^{\delta \theta} [LV(\theta, W(x, \theta)) + \delta V(\theta, W(x, \theta))] d\theta + 2 \int_0^t e^{\delta \theta} \int_{\Omega} W^T(x, \theta) P [CW(x, \theta) + C_1 W(x, \theta - \tau)] d\omega(x, \theta) dx d\theta\right\}, \quad (24)$$

把式(18)和式(22)代入式(24)得

$$e^{\delta t} EV(t, W(x, t)) \leq EV(0, W(x, 0)) + (\delta b - a) E \int_0^t e^{\delta \theta} \|W(\cdot, \theta)\|^2 d\theta + \delta b E \int_0^t \int_{t-\tau}^t e^{\delta \theta} \|W(\cdot, \theta)\|^2 d\theta dt + \delta b E \int_0^t \int_{t-h}^t e^{\delta \theta} \|W(\cdot, \theta)\|^2 d\theta dt. \quad (25)$$

又因为

$$EV(0, W(x, 0)) = E \int_{\Omega} W^T(x, 0) P W(x, 0) dx + E \int_{\Omega} \int_{-\tau}^0 W^T(x, \theta) Q W(x, \theta) d\theta dx + E \int_{\Omega} \int_{-h}^0 \int_s^0 W^T(x, \theta) R W(x, \theta) d\theta ds dx, \quad (26)$$

而

$$E \int_{\Omega} \int_{-h}^0 \int_s^0 W^T(x, \theta) R W(x, \theta) d\theta ds dx = E \int_{\Omega} \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 W^T(x, \theta) R W(x, \theta) d\theta ds dx = E \int_{\Omega} \int_{-h}^0 (\theta + h) W^T(x, \theta) R W(x, \theta) d\theta dx \leq h \max(R) E \|\varphi\|^2. \quad (27)$$

所以由式(26)–(27)得

$$EV(0, W(x, 0)) =$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \int_{\Omega} W^T(x, 0) P W(x, 0) dx + \\
& \mathbb{E} \int_{\Omega} \int_{-\tau}^0 W^T(x, \theta) Q W(x, \theta) d\theta dx + \\
& \mathbb{E} \int_{\Omega} \int_{-h}^0 \int_s^0 W^T(x, \theta) R W(x, \theta) d\theta ds dx \leq \\
& \lambda_{\max}(P) \mathbb{E} \|\varphi\|^2 + \lambda_{\max}(Q) \mathbb{E} \|\varphi\|^2 + \\
& h \lambda_{\max}(R) \mathbb{E} \|\varphi\|^2 \leq \\
& 3b \mathbb{E} \|\varphi\|^2.
\end{aligned} \quad (28)$$

又因为

$$\begin{aligned}
& \delta b \mathbb{E} \int_0^t \int_{t-\tau}^t e^{\delta \theta} \|W(\cdot, \theta)\|^2 d\theta dt \leq \\
& \delta b \frac{1}{\delta} e^{\delta \tau} \mathbb{E} \int_{-\tau}^t e^{\delta \theta} \|W(\cdot, \theta)\|^2 d\theta = \\
& b e^{\delta \tau} \mathbb{E} \left[\int_{-\tau}^0 e^{\delta \theta} \|W(\cdot, \theta)\|^2 d\theta + \right. \\
& \left. \int_0^t e^{\delta \theta} \|W(\cdot, \theta)\|^2 d\theta \right] \leq \\
& b \tau e^{\delta \tau} \mathbb{E} \|\varphi\|^2 + b e^{\delta \tau} \mathbb{E} \int_0^t e^{\delta \theta} \|W(\cdot, \theta)\|^2 d\theta,
\end{aligned} \quad (29)$$

同理

$$\begin{aligned}
& \delta b \int_0^t \int_{t-h}^t e^{\delta t} \mathbb{E} \|W(\cdot, t)\|^2 dt d\theta \leq \\
& b h e^{\delta h} \mathbb{E} \|\varphi\|^2 + b e^{\delta h} \int_0^t e^{\delta t} \mathbb{E} \|W(\cdot, t)\|^2 dt,
\end{aligned} \quad (30)$$

所以

$$\begin{aligned}
& e^{\delta t} \mathbb{E} V(t, W(x, t)) \leq \\
& (3b + b e^{\delta \tau} + b e^{\delta h}) \mathbb{E} \|\varphi\|^2 + \\
& (\delta b - a + b \tau e^{\delta \tau} + b h e^{\delta h}) \times \\
& \mathbb{E} \int_0^t e^{\delta \theta} \|W(\cdot, \theta)\|^2 d\theta.
\end{aligned} \quad (31)$$

选取适当的 δ 使得

$$\delta b - a + b \tau e^{\delta \tau} + b h e^{\delta h} = 0. \quad (32)$$

又因为

$$\begin{aligned}
& \lambda_{\min}(P) e^{\delta t} \mathbb{E} \|W(\cdot, t)\|^2 \leq \\
& e^{\delta t} \mathbb{E} V(t, W(x, t)) \leq \\
& (3b + b e^{\delta \tau} + b e^{\delta h}) \mathbb{E} \|\varphi\|^2,
\end{aligned} \quad (33)$$

故

$$\mathbb{E} \|W(\cdot, t)\|^2 \leq e^{-\delta t} \frac{3b + b e^{\delta \tau} + b e^{\delta h}}{\lambda_{\min}(P)} \mathbb{E} \|\varphi\|^2. \quad (34)$$

定理1给出了Itô型随机时滞偏微分系统的均方指数稳定性. 当系统(1)不含随机项时, 考虑如下一类简单系统(35)的指数稳定性.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \\
& D \Delta W(x, t) + A W(x, t) + A_1 W(x, t - \tau) + \\
& A_2 \int_{t-h}^t W(x, t) dt.
\end{aligned} \quad (35)$$

推论 1 对系统(35), 若存在正定对称矩阵 P, Q

和 R 使得如下线性矩阵不等式:

$$\begin{pmatrix} PA + A^T P + Q + hR & P A_1 & P A_2 \\ * & -Q & 0 \\ * & * & -\frac{1}{h} R \end{pmatrix} < 0 \quad (36)$$

成立, 则系统(35)是指数稳定. 且有

$$\|W(\cdot, t)\|^2 \leq e^{-\delta t} \frac{3b + b e^{\delta \tau} + b e^{\delta h}}{\lambda_{\min}(P)} \|\varphi\|^2, \quad (37)$$

其中:

$$b = \max\{\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(Q), h \lambda_{\max}(R)\},$$

$\delta > 0$ 为常数.

注 1 本文中的推论1和文献[15]中的推论1虽然都是关于具有分布时滞分布参数系统的稳定性研究. 但是指数稳定性比文献[15]研究的渐近稳定性具有更快的收敛速度. 并且本文得到的结论矩阵不等式具有更少的矩阵维数, 计算量大大减少, 运行速度更快.

注 2 推论1是针对含有分布时滞的分布参数系统给出指数稳定性的结论比文献[33]中不含分布时滞的常时滞分布参数系统适用范围更广, 也更贴合实际系统的需求. 并且推论1给出的线性矩阵不等式中主对角线上的元素不含矩阵的逆矩阵, 在求解数值解更简单方便.

现在考虑具有变分布时滞的Itô型随机偏微分系统

$$\begin{aligned}
& dW(x, t) = \\
& [D \Delta W(x, t) + A W(x, t) + A_1 W(x, t - \tau(t)) + \\
& A_2 \int_{t-h(t)}^t W(x, t) dt] dt + [C W(x, t) + \\
& C_1 W(x, t - \tau(t))] d\omega(x, t).
\end{aligned} \quad (38)$$

定理 2 对同时含有离散变时滞和分布变时滞的Itô型随机偏微分系统(38), 如果 $\dot{\tau}(t) \leq \eta < 1$, $\dot{h}(t) \leq \gamma < 1$ 并且存在正定对称矩阵 P, Q 和 R 使得如下线性矩阵不等式:

$$\begin{pmatrix} \Pi & P A_1 & P A_2 & C^T P \\ * & -(1 - \eta) Q & 0 & C_1^T P \\ * & * & -(1 - \gamma) R & 0 \\ * & * & * & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (39)$$

成立, 这里 $\Pi = PA + A^T P + Q + R$, 则系统(38)是均方指数稳定. 且有

$$\mathbb{E} \|W(\cdot, t)\|^2 \leq e^{-\delta t} \frac{3b + b e^{\delta \tau} + b e^{\delta h}}{\lambda_{\min}(P)} \mathbb{E} \|\varphi\|^2, \quad (40)$$

其中:

$$b = \max\{\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(Q), \gamma \lambda_{\max}(R)\},$$

$\delta > 0$ 为定常数. $\lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(P)$ 分别表示实对称矩阵 P 特征值的最大值和最小值.

证 构造如下恰当李亚普诺夫泛函:

$$V(t, W(x, t)) =$$

$$V_1(t, W(x, t)) + V_2(t, W(x, t)) + V_3(t, W(x, t)),$$

其中:

$$V_1(t, W(x, t)) = \int_{\Omega} W^T(x, t) P W(x, t) dx,$$

$$V_2(t, W(x, t)) =$$

$$\int_{\Omega} \int_{t-\tau(t)}^t W^T(x, t) Q \times W(x, t) dt dx,$$

$$V_3(t, W(x, t)) =$$

$$\int_{\Omega} \int_{t-\tau(t)}^t \int_s^t W^T(x, \theta) R \times W(x, \theta) d\theta ds dx.$$

后面的证明过程类似定理1, 在此就不给出详细证明过程. 证毕.

4 数值算例

1982年, Volterra^[34]在对某种弹性材料研究动力学模型时, 在偏微分方程中考虑了分布时滞. 李恩奇^[35]在研究黏弹性材料的动力学分析时考虑了随机性. 在此基础上, 本文综合考虑了具有分布时滞和随机因素的偏微分方程. 为了方便, 对系统(1)选取如下二阶分布时滞随机分布参数:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -0.9 \\ -1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

考虑 $\tau = h = 0.02$. 利用LMI工具箱求解线性矩阵不等式(5)得

$$P = \begin{pmatrix} 0.4724 & -0.2118 \\ -0.2118 & 6.1185 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1.8934 & -4.7001 \\ -4.7001 & 65.8986 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0.7900 & -0.2084 \\ -0.2084 & 1.8005 \end{pmatrix},$$

很容易验证 P, Q, R 是正定矩阵.

不失一般性, 取初值条件和边界条件分别为

$$\varphi(x, t) = \begin{pmatrix} (t + 0.1)x^{1/4} \cos(2x) \\ (t + 0.1)x^{1/6} \cos(2x) \end{pmatrix},$$

$$(x, t) \in [0, \pi] \times [-0.02, 0], t \in [-0.02, +\infty],$$

$$W(x, t) = 0, x = 0, \pi, t \geq 0.$$

仿真结果如图1和图2所示, 由图可知, 当分布式时滞随机系统满足定理所给的线性矩阵不等式时, 系统状态能在较短时间内趋于稳定; 并且, 由于本文研究的是随机偏微分系统, 由趋稳的过程中可以看出会存在无规则的随机波动, 这与文献[15]的确定型偏微分

系统的仿真图趋稳过程有本质区别.

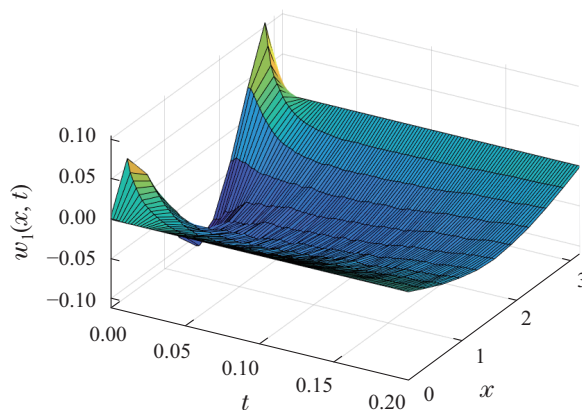


图1 状态 $w_1(x, t)$

Fig. 1 State $w_1(x, t)$

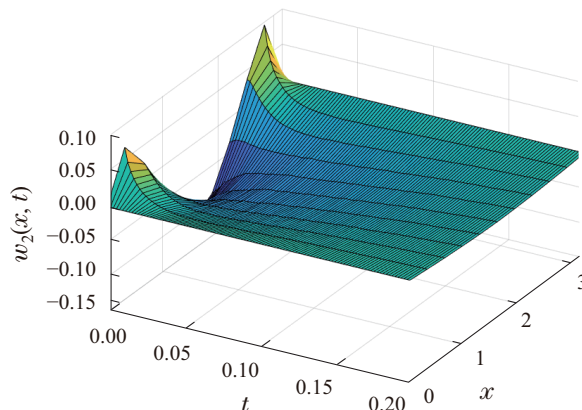


图2 状态 $w_2(x, t)$

Fig. 2 State $w_2(x, t)$

5 结论

本文研究了一类具有分布时滞Itô型随机偏微分系统的随机稳定性. 根据系统特征构造了Lyapunov泛函, 通过Itô微分公式, 计算随机微分导数; 利用Schur补引理, 以线性矩阵不等式的形式给出系统是均方指数稳定的充分条件, 仿真验证了系统的稳定性. 后续将研究中立型随机偏微分系统的稳定性问题, 虽然仅仅多了中立型时滞项, 但由于反应扩散项的存在, 其研究难度还是增加了不少. 由于系统稳定性和系统性能分析作为系统研究的两个最为重要的方面, 在将来的研究, 将类似于文献[36–37], 进一步对分布式参数系统的性能分析进行研究. 此外, 类似文献[38–39], 研究带马尔可夫跳的切换分布式参数系统, 也是值得探索的另一方向.

参考文献:

- [1] YAN Yue, CHEN Yu, LIU Keji, et al. Modeling and prediction for the trend of outbreak of NCP based on a time-delay dynamic system. *Scientia Sinica Mathematica*, 2020, 50(3): 385–392.
(严阅, 陈瑜, 刘可伋, 等. 基于一类时滞动力学系统对新型冠状病毒肺炎疫情的建模和预测. *中国科学: 数学*, 2020, 50(3): 385–392.)

- [2] GUERRINI L, KRAWIEC A, SZYDLOWSKI M. Bifurcations in an economic growth model with a distributed time delay transformed to ODE. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 101(2): 1263 – 1279.
- [3] LI Yanbo, XUE Xiaoqing. Stability of uncertain neutral system with mixed time delays based on reciprocally convex combination approach. *Control and Decision*, 2016, 31(6): 1105 – 1110.
(李延波, 薛小清. 交互式凸组合法的混合时滞不确定中立系统的稳定性. 控制与决策, 2016, 31(6): 1105 – 1110.)
- [4] LIU Q, JIANG D Q. Stationary distributed and extinction of a stochastic predator-prey model with distributed delay. *Applied Mathematics Letters*, 2018, 78: 79 – 87.
- [5] JI C Y, LIU Q, JIANG D Q. Dynamics of a stochastic cell-to-cell HIV-1 model with distributed delay. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2018, 492(15): 1053 – 1065.
- [6] HU Zhixing, WANG Hui, MA Zhien. A SIRS epidemiological model with distributional delay. *Journal of Engineering Mathematics*, 1997, 14(4): 44 – 48.
(胡志兴, 王辉, 马知恩. 具有分布时滞的SIRS传染病模. 工程数学学报, 1997, 14(4): 44 – 48.)
- [7] GU K Q. An improved stability criterion for systems with distributed delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(9): 819 – 831.
- [8] HAN Q L. A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral systems with discrete and distributed delays. *Automatica*, 2004, 40(10): 1791 – 1796.
- [9] CHEN W H, ZHENG W X. Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays. *Automatica*, 2007, 43(1): 95 – 104.
- [10] LI X G, ZHU X J. Stability analysis of neutral systems with distributed delays. *Automatica*, 2008, 44(8): 2197 – 2201.
- [11] IKEDA K, AZUMA T, UCHIDA K. Infinite-dimensional LMI approach to analysis and synthesis for linear time-delay systems. *Kybernetika*, 2001, 37(4): 505 – 520.
- [12] LI Yanbo, GAO Cunchen, YING Lisheng. Exponential stability of distributed parameter systems with uncertain time delay. *Journal of Hefei University of Technology*, 2010, 33(7): 1109 – 1111.
(李延波, 高存臣, 殷礼胜. 不确定时滞分布参数系统的指数稳定性. 合肥工业大学学报, 2010, 33(7): 1109 – 1111.)
- [13] FRIDMAN E, ORLOV Y. Exponential stability of linear distributed parameter systems with time-varying delays. *Automatica*, 2009, 45(1): 194 – 201.
- [14] ZHOU Bifeng, LUO Yiping. Distributed parameter systems of Neutralization control with delay. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(12): 2222 – 2227.
(周笔锋, 罗毅平. 时滞分布参数中和控制器设计. 自动化学报, 2018, 44(12): 2222 – 2227.)
- [15] GAO Cunchen, LIU Zhen, XU Ruiping. Feedback control for a class of distributed parameter systems with continuous distributed time-delay. *Control and Decision*, 2013, 28(3): 445 – 450.
(高存臣, 刘振, 徐瑞萍. 一类具有连续分布时滞的分布参数系统的反馈控制. 控制与决策, 2013, 28(3): 445 – 450.)
- [16] LU Z H, WANG W J, ZHU Q X, et al. The mean square stability analysis of a stochastic dynamic model for electricity market. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2015, 8(4): 1071 – 1079.
- [17] LU Z H, JI M F, WANG W J, et al. Stability of the stochastic model for power markets with interval parameters. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016, 2016: 1 – 10.
- [18] TORNATORE E, STEFANIA M B, VETRO. Stability of a stochastic SIR system. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2015, 354(15): 111 – 126.
- [19] DENG F Q, MAO W H, WAN A H. A novel result on stability analysis for uncertain neutral stochastic time-varying delay systems. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 221: 132 – 143.
- [20] NIU Y G, DANIEL W C HO, JAMES L. Robust integral sliding mode control for uncertain stochastic systems with time-varying delay. *Automatica*, 2005, 41(5): 873 – 880.
- [21] LIU M, SHI P. Sensor fault estimation and tolerant control for Itô stochastic systems with a descriptor sliding mode approach. *Automatica*, 2013, 49(5): 1242 – 1250.
- [22] HELGE H. *Stochastic Partial Differential Equations—A Modeling White Noise Functional Analysis Approach*. Boston: Birkhauser, 1996.
- [23] LUO Qi, DENG Feiqi, MAO Xuerong, et al. Theory and application of stability of stochastic reaction diffusion systems. *Scientia Sinica: Information Science*, 2007, 37(10): 1272 – 1284.
(罗琦, 邓飞其, 毛学荣, 等. 随机反应扩散系统稳定性的理论与应用. 中国科学: 信息科学, 2007, 37(10): 1272 – 1284.)
- [24] LUO Qi, DENG Feiqi, BAO Jundong. Stabilization of a class of stochastic distributive parameter systems with feedback control. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(3): 477 – 480.
(罗琦, 邓飞其, 包俊东. 一类随机分布参数系统反馈控制的镇定. 控制理论与应用, 2005, 22(3): 477 – 480.)
- [25] CHEN B, CHEN W, ZHANG W. Robust filter for non-linear stochastic partial differential systems in sensor signal processing: fuzzy approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(5): 957 – 970.
- [26] ZHOU X Y. On the necessary conditions of optimal controls for stochastic partial differential equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1993, 31(6): 1462 – 1478.
- [27] QKSENDAL B. Optimal control of stochastic partial differential equations. *Stochastic Analysis and Applications*, 2005, 23(1): 165 – 179.
- [28] TANIGUCHI T. The exponential stability for stochastic delay partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, 331(1): 191 – 205.
- [29] DAI X S, DENG F Q, ZHANG J X. Robust H_∞ control for linear stochastic partial differential systems with time delay. *Mathematical Problem in Engineering*, 2014, DOI:10.1155/2014/489408.
- [30] CUI Baotong, LOU Xuyang. *Theory and Its Application for Distributed Parameter Systems with Time-delays*. Beijing: National Defense Industry Press, 2009.
(崔宝同, 楼旭阳. 时滞分布参数系统理论及其应用. 北京: 国防工业出版社, 2009.)
- [31] GU K. An improved stability criterion for systems with distributed delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(9): 819 – 831.
- [32] DAI Xisheng. *Stability, controllability of infinite dimensional stochastic systems with applications*. Guangzhou: South China University of Technology, 2010.
(戴喜生. 无穷维随机系统的稳定性、可控性及其应用. 广州: 华南理工大学, 2010.)
- [33] LUO Yiping, XIA Wenhua, LIU Guorong, et al. LMI approach to exponential stabilization of distributed parameter control systems with delay. *Acta Automatica Sinica*, 2009, 35(3): 299 – 304.
(罗毅平, 夏文华, 刘国荣, 等. 时滞分布参数控制系统指数镇定的LMI方法. 自动化学报, 2009, 35(3): 299 – 304.)
- [34] XIE Shengli. *Stability and variable structure control of time-delay distributed parameter systems*. Guangzhou: South China University of Technology, 1996.
(谢胜利. 滞后分布参数系统的稳定与变结构控制. 广州: 华南理工大学, 1996.)
- [35] LI Enqi, LEI Yongjun, LI Jiutian. Dynamic analysis of passive constrained layer damping beam with randomness of viscoelastic material. *Journal of National University of Defense Technology*, 2007,

- 29(4): 22 – 26.
(李恩奇, 雷勇军, 李九天. 考虑黏弹性材料随机性的被动约束层阻尼梁动力学分析. 国防科技大学学报, 2007, 29(4): 22 – 26.)
- [36] CHEN C Y, LIU F, WU L H, et al. Tracking performance limitations of networked control systems with repeated zeros and poles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, DOI: 10.1109/TAC.2020.2999444.
- [37] CHEN C Y, GUI W H, WU L H, et al. Tracking performance limitations of MIMO networked control systems with multiple communication constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(7): 2982 – 2995.
- [38] JIANG B P, KAO Y G, HAMID R K, et al. Stability and stabilization for singular switching semi-Markovian jump systems with generally uncertain transition rate. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(11): 3919 – 3926.
- [39] JIANG B P, HAMID R K, KAO Y G, et al. Adaptive control of nonlinear semi-Markovian jump T-S fuzzy systems with immeasurable premise variables via sliding mode observer. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(2): 810 – 820.

作者简介:

李延波 博士, 教授, 目前主要研究随机系统、分布参数系统的稳定性和滑模控制, E-mail: apples729@163.com;

陈超洋 博士, 教授, 目前主要研究复杂系统建模、分析、控制与应用, E-mail: ouzk@163.com;

张晶华 博士, 副教授, 目前主要研究微分方程稳定性, E-mail: 379646903@qq.com;

李成群 硕士, 副教授, 目前主要研究时滞系统的稳定性, E-mail: 190596469@qq.com.