

分支定价方法求解带二维装箱约束的车辆路径问题

季 彬[†], 周赛琦, 张 政

(中南大学 交通运输工程学院, 湖南 长沙 410075)

摘要: 面向家具、电器等货物的物流配送场景, 研究带二维装箱约束的车辆路径问题(2L-CVRP), 构建了2L-CVRP的混合整数线性规划模型. 为求解大规模2L-CVRP, 构建了该问题集合划分模型, 提出基于分支定价的方法. 针对分支节点的松弛模型, 基于列生成策略将其分解为线性规划主问题、带资源和二维装箱约束的最短路径子问题, 并提出基于ng-route松弛策略的标签算法和基于禁忌搜索的装箱算法有效求解复杂子问题. 仿真结果表明, 提出的方法可高效求解大规模2L-CVRP, 其中ng-route松弛策略能有效提升算法求解效率, 研究成果为装箱约束下大规模车辆路径问题的高效求解提供了有效途径.

关键词: 车辆路径; 混合整数线性规划; 分支定价; 二维装箱问题

引用格式: 季彬, 周赛琦, 张政. 分支定价方法求解带二维装箱约束的车辆路径问题. 控制理论与应用, 2023, 40(3): 409 – 418

DOI: 10.7641/CTA.2021.10292

Branch-and-price approach for solving the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints

Ji Bin[†], ZHOU Sai-qi, ZHANG Zheng

(School of Traffic & Transportation Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410075, China)

Abstract: Oriented to the logistics and distribution scenarios of goods such as furniture and appliances, this study addresses the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints (2L-CVRP). First, a mixed integer linear programming model of the 2L-CVRP is constructed. Then, a branch-and-price approach is proposed with a set partition model to solve the large-scale 2L-CVRPs. By using column generation approach, the relaxed 2L-CVRP at each branch-and-bound node is decomposed into a linear programming master problem and a pricing problem of the elementary shortest path with resource constraints and two-dimensional loading constraints. Meanwhile, a labeling algorithm based on the ng-route relaxation strategy and a tabu-search-based packing algorithm are proposed to effectively solve the complex pricing problem. Numerical experiments and comparison results show that the proposed approach can efficiently solve the large-scale 2L-CVRPs, and that the ng-route relaxation strategy can improve the efficiency of the approach. As such, this study provides an effective approach to solve the large-scale vehicle routing problems with loading constraints.

Key words: vehicle routing; mixed integer linear programming; branch-and-price; two-dimensional packing problem

Citation: Ji Bin, ZHOU Saiqi, ZHANG Zheng. Branch-and-price approach for solving the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(3): 409 – 418

1 引言

车辆路径问题 (vehicle routing problem, VRP) 由 Dantzig和Ramser^[1]提出, 是传统物流系统优化中的经典难题. 在实际配送中, 受外形特征、易碎性质影响, 家具、电器等特定货物在运输过程中不能堆叠摆放. 装车时, 若将这些货物的水平投影简化为矩形, 在配送中则需考虑对应的矩形在车厢内二维平面布局的

可行性. 传统带容量约束的车辆路径问题(capacitated vehicle routing problem, CVRP)仅考虑重量, 制定的调度计划不能确保车辆二维装载的可行性. 在这种配送场景下, 只有对路径和装箱同时优化才能保证调度计划的可行性和最优性, 从而有效降低企业物流成本, 由此衍生出带二维装箱约束的车辆路径问题(CVRP with two-dimensional loading constraints, 2L-CVRP).

收稿日期: 2021-04-09; 录用日期: 2021-10-13.

[†]通信作者. E-mail: cumtjbin@126.com; Tel.: +86 18908468853.

本文责任编辑: 柯良军.

国家自然科学基金项目(72001216), 湖南省自然科学基金项目(2020JJ5780), 国家自然科学基金项目(71672193)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (72001216), the Natural Science Foundation of Hunan Province (2020JJ5780) and the National Natural Science Foundation of China (71672193).

2L-CVRP由CVRP和二维装箱问题(two dimensional bin packing problem, 2BPP)耦合, 是一个复杂的组合优化问题, 在模型和方法方面均具有重要的研究价值。

Iori等^[2]首次建立了2L-CVRP数学模型, 提出分支-切割算法进行路径组合方案搜索, 并利用分支定界法检测路径装箱可行性。但其数学模型将路径和装箱约束分割开来独立建模, 未能形成可直接求解的完整模型。Hokama等^[3]在此求解框架下, 设计了更为精细的装箱策略, 更新了部分算例下界。由于精确算法难以有效求解较大规模的2L-CVRP, 学者们提出了各种启发式算法, 如禁忌搜索算法^[4-5]、文化算法^[6]、蚁群算法^[7]、大邻域搜索算法^[8]和模拟退火算法^[9]。不足的是, 这些文献均未对模型进行探究, 并且路径和装箱均用启发式算法交互求解难以确保结果的稳定性。最新研究表明, 精确算法已能够实现对CVRP的高效求解, 如Pecin等^[10]提出了一种分支-定价-切割算法可有效求解200个客户规模的算例, 是目前求解CVRP最有效的精确算法之一。然而, 目前尚未发现能高效求解2BPP的精确算法。Coté等^[11]提出的分支-切割算法是目前最有效的方法之一, 也难以高效求解50个货物规模的2BPP。因此, 对2BPP的求解主要为设计高效的启发式算法^[12-13], 其中, Wei等^[13]提出的一种基于独立待装区域的算法能高效求解786个货物规模的2BPP。综上所述, 目前尚未有文献建立2L-CVRP可用整数规划方法直接求解的完整数学模型, 已有的求解方法为精确算法交互或启发式算法交互, 存在求解效率低或稳定性差等不足。

为此, 本文构建了2L-CVRP的混合整数线性规划模型, 并鉴于分支定价算法求解CVRP的高效性能和启发式装箱算法的高效稳定表现, 提出了一种基于分支定价和启发式装箱的混合算法求解大规模2L-CVRP。为了加速定价子问题求解, 提出了包括ng-route松弛和启发式算法求解子问题等一系列的加速策略。最后, 通过大量不同特征的2L-CVRP算例对本文提出的模型、算法和加速策略有效性进行了仿真验证。

2 问题描述与数学模型

2.1 问题描述

存在有向图 $G = (V, A)$, 其中 $V = 0 \cup N$, 0代表配送中心, N 代表客户点集合, 弧集 $A = \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$, 弧 (i, j) 的成本 c_{ij} 为点 i 到 j 的欧几里得距离。配送中心有若干载重为 Q 的车辆, 记其集合为 K , 每辆车的车厢装载面是长为 L 、宽为 W 的矩形。 Φ 表示所有货物集合, Φ_i 表示客户 $i, i \in N$ 的货物集合。其中, 客户 i 的第 $m(m \in \Phi_i)$ 个货物重量为 q_m 、长为 l_m 、宽为 w_m , $q_i = \sum_{m \in \Phi_i} q_m$ 表示客户 i 的货物总重。研究的2L-CVRP要求货物按指定方向摆放, 不可旋转, 且需

考虑如下约束: 1) 要求每个客户点 $i, i \in N$ 被服务一次; 2) 车辆 $k, k \in K$ 从配送中心0出发, 经过相应客户点后需返回配送中心; 3) 车辆装载货物总重不能超过其载重 Q ; 4) 装箱方案满足二维装箱约束, 即同一辆车中的货物不能重叠和超出车厢范围(如图1所示)。值得一提的是, 车辆运输过程中为了利于装卸作业, 有时会尽量将先配送的货物装载在车厢的外侧, 即先进后出约束, 但是该约束对装箱顺序的严格限制会一定程度降低车辆装载率。考虑到实际配送中装卸成本相对运输成本较小, 本文暂未考虑该约束。该问题目标是使得各车辆总成本最小。

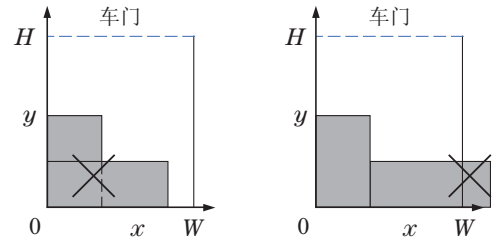


图1 错误装箱示意图

Fig. 1 Schematic diagram of error packing pattern

2.2 2L-CVRP的混合整数线性规划模型

基于VRP的三下标模型, 通过扩展二维装箱约束, 并引入合适的变量和逻辑耦合约束, 构建了2L-CVRP混合整数线性规划模型。定义符号和变量如下:

Z : 2L-CVRP目标函数值。

M : 表示一个足够大的正整数。

x_{ijk} : 0-1变量, 为1时表示车辆 $k \in K$ 经过弧 $(i, j) \in A$, 否则为0;

y_{ik} : 0-1变量, 为1时表示车辆 $k \in K$ 经过客户点 $i (i \in N)$, 否则为0;

s_i : 整数变量, 表示客户点在路径中的服务顺序, 用于消除子回路;

γ_m : 实数变量, 表示货物 $m \in \Phi$ 的左下角横坐标;

δ_m : 实数变量, 表示货物 $m \in \Phi$ 的左下角纵坐标;

f_{mn} : 0-1变量, 为1时表示货物 $m \in \Phi$ 完全在货物 $n \in \Phi$ 的前面, 否则为0;

ρ_{mn} : 0-1变量, 为1时表示货物 $m \in \Phi$ 完全在货物 $n \in \Phi$ 的左边, 否则为0。

则2L-CVRP的混合整数线性规划模型如下:

$$\min Z = \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} c_{ij} x_{ijk}, \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in K} y_{ik} = 1, \quad \forall i \in N, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{jik} = \sum_{j \in V} x_{ijk}, \quad \forall i \in N, k \in K, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i0k} = 1, \quad \forall k \in K, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in V} x_{0ik} = 1, \quad \forall k \in K, \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N} y_{ik} q_i \leq Q, \forall k \in K, \quad (6)$$

$$s_i + 1 \leq s_j + (1 - x_{ijk})M, \forall i, j \in N, k \in K, \quad (7)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ijk} = y_{jk}, \forall j \in N, k \in K, \quad (8)$$

$$\gamma_m + w_m \leq W, \forall m \in \Phi, \quad (9)$$

$$\delta_m + l_m \leq H, \forall m \in \Phi, \quad (10)$$

$$f_{mn} + f_{nm} + \rho_{mn} + \rho_{nm} \geq y_{ik} + y_{jk} - 1, \\ \forall m \in \Phi_i, n \in \Phi_j, i, j \in N, m \neq n, k \in K, \quad (11)$$

$$\delta_n + l_n \leq \delta_m + (1 - f_{mn})M, \forall m, n \in \Phi, \quad (12)$$

$$\gamma_m + w_m \leq \gamma_n + (1 - \rho_{mn})M, \forall m, n \in \Phi, \quad (13)$$

$$s_i, \gamma_m, \delta_m \geq 0, \forall i \in N, m \in \Phi, \quad (14)$$

$$x_{ijk}, y_{ik}, f_{mn}, \rho_{mn} \in \{0, 1\}, \\ \forall i, j \in V, k \in K, m, n \in \Phi, m \neq n, \quad (15)$$

其中: 目标函数(1)表示最小化车辆总成本; 约束(2)确保每个客户点*i*被一辆车服务一次; 约束(3)为流平衡约束; 约束(4)–(5)确保车辆从配送中心出发回到配送中心; 约束(6)确保货物重量不超载; 约束(7)确定路径中客户的先后顺序以消除子回路; 约束(8)指弧(*i*, *j*)被使用, 则必有车辆经过; 约束(9)–(13)表示二维装箱约束, 其中约束(9)–(10)表示货物装箱时不能超出车厢范围, 约束(11)–(13)表示同一辆车中货物之间不能重叠; 约束(14)–(15)表示变量的类型和取值范围。

2.3 2L-CVRP的集合划分模型

2L-CVRP混合整数线性规划模型含有三下标变量和大量约束, 难以直接用于求解较大规模算例^[14]. 文献[15]指出以列为变量, 对整数规划模型进行Danzig-Wolfe分解可得到基于集合划分的主问题和最短路径子问题. 其中, 集合划分模型能将大量变量隐式地处理, 有效减小约束规模并提供更紧的线性松弛边界. 由于列生成算法^[16]无需枚举所有列可求得问题下界, 结合分支定界算法可实现较大规模问题的高效求解. 为此, 以下给出2L-CVRP集合划分模型。

以可行路径为列, 定义 Ω 为所有列集合; $c_r = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ijr}$ 为路径 $r \in \Omega$ 的成本; a_{ir} 为常量, 当 r 经过客户点*i*时定义 $a_{ir} = 1$, 否则为0; λ_r 为整数变量, 指 r 使用的次数. 则2L-CVRP的集合划分模型为

$$\min Z = \sum_{r \in \Omega} c_r \lambda_r, \quad (16)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r \in \Omega} a_{ir} \lambda_r = 1, \forall i \in N, \quad (17)$$

$$\sum_{r \in \Omega} \lambda_r \leq |K|, \quad (18)$$

$$\lambda_r \in \mathbb{Z}_+, \forall r \in \Omega, \quad (19)$$

其中: 目标函数(16)表示最小化车辆总成本; 约束(17)表示每个客户点被服务一次; 约束(18)表示路径数不超过车辆数; 约束(19)指变量取值范围. 该模型中, 由于 Ω 包含的路径数量庞大, 对大规模问题直接枚举所有列的方式不可行. 为此, 在每个分支节点中, 可先枚举部分列构造一个规模较小的主问题模型, 然后将 λ_r 线性松弛, 通过迭代不断地向松弛主问题添加机会成本为负($\bar{c}_r < 0$)的有效列, 直到没有新的列添加为止, 得到的解为主问题的一个下界. 为松弛主问题迭代地添加有效列是通过对偶定理构造的子问题实现, 这个过程即为列生成算法。

设 $\pi_i (i \in N)$, π_0 分别对应约束(17)–(18)的对偶变量, 则路径*r*的机会成本为

$$\bar{c}_r = c_r - \sum_{i \in V} a_{ir} \pi_i, \forall r \in \Omega. \quad (20)$$

子问题转化为求解 $\bar{c}_r$ 最小的可行路径, 即含有资源约束和二维装箱约束最短路径问题 (elementary shortest path problem with resource constraints and two dimensional loading constraint, 2L-ESPPRC). 当最短路径的 $\bar{c}_r < 0$ 时, 将其加入松弛主问题, 不断迭代求解直到不存在 $\bar{c}_r < 0$ 的路径. 令 SZ 为子问题目标函数值, e_{ij} 为1时表示弧(*i*, *j*)被使用, 否则为0. 则子问题数学模型为

$$\min SZ = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (c_{ij} - \pi_i) e_{ij}, \quad (21)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in V} e_{ji} \leq 1, \forall i \in N, \quad (22)$$

$$\sum_{j \in V} e_{ji} = \sum_{j \in V} e_{ij}, \forall i \in N, \quad (23)$$

$$\sum_{i \in N} e_{i0} = 1, \quad (24)$$

$$\sum_{i \in N} e_{0i} = 1, \quad (25)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} q_i e_{ij} \leq Q, \quad (26)$$

$$s_i < s_j + (1 - e_{ij})M, \forall i \in N, \forall j \in N, \quad (27)$$

$$f_{mn} + f_{nm} + \rho_{mn} + \rho_{nm} \geq e_{ij}, \\ \forall m \in \Phi_i, n \in \Phi_j, i, j \in N, m \neq n, \quad (28)$$

约束式(9)–(10)(12)–(15).

其中: 目标函数(21)表示最小化路径机会成本; 约束(22)表示每个客户点至多被服务一次; 约束(23)为流平衡约束; 约束(24)–(25)表示车辆从配送中心出发需回到配送中心; 约束(26)表示货物重量不能超载; 约束(27)确定路径中客户的先后顺序以消除子回路; 约束(28)表示被装载货物间存在平面位置关系; 该模型

应同时满足二维装箱约束(9)–(10)和(12)–(13)以及变量的类型和取值范围约束(14)–(15)。

3 基于分支定价的方法求解2L-CVRP

分支定价算法最早被Sesrosiers等^[17]用于求解VRP, 其本质是将列生成方法与分支定界方法相结合。针对本文研究的2L-CVRP, 对分支定界的每个节点, 首先从包含部分列的松弛主问题中获取对偶变量值, 然后利用标签算法求解子问题以获取 $\bar{c}_r < 0$ 的列, 再将其中满足装箱约束的列加入主问题。基于列生成算法反复执行上述操作直到无法获得 $\bar{c}_r < 0$ 的列, 则松弛主问题当前解为节点的下界。若该下界不是最优整数解, 则进行分支定界操作, 选择下界最小的节点继续求解, 直到求得最优整数解。其主要求解流程如图2所示。

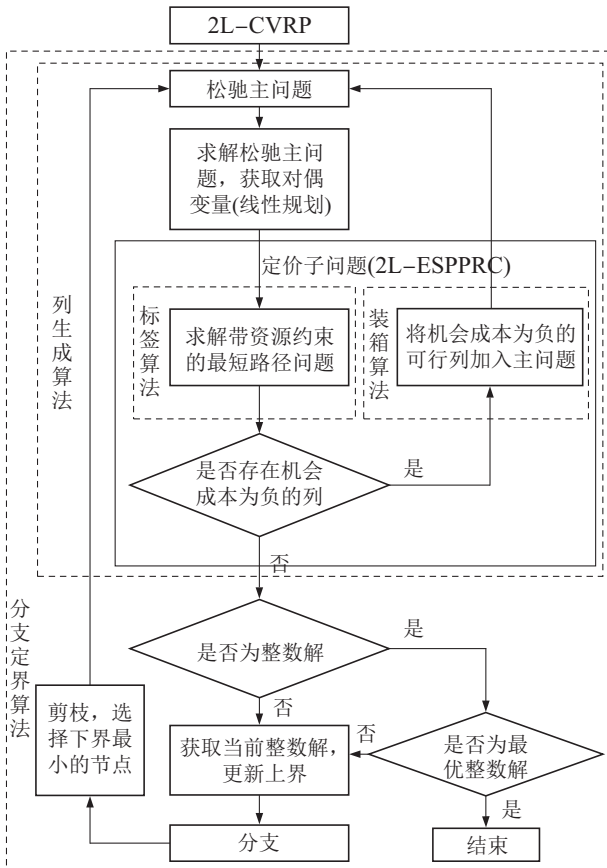


图2 分支定价方法求解2L-CVRP流程图

Fig. 2 Flow chart of branch-and-price approach for solving 2L-CVRP

3.1 定价子问题求解

2L-ESPPRC是带资源约束的最短路径问题 (elementary shortest path problem with resource constraints, ESPPRC)的拓展, 亦为NP-难问题。对于此类问题的求解, 一般采用动态规划的思想^[18]。本文根据子问题路径需满足二维装箱约束的特征, 提出了一种基于ng-route松弛策略的标签算法和基于禁忌搜索的装箱算法进行求解。其主要求解思路如下:

步骤1 生成初始标签存入标签集合(见3.1.1)。

步骤2 遍历标签集合。若有可探索标签, 则按照标签生成规则(见3.1.1和3.1.2)生成新标签; 否则, 转步骤4。

步骤3 基于标签支配规则(见3.1.2), 判断新标签与其他标签的关系, 删除被支配标签, 并更新标签集合, 转步骤2。

步骤4 基于装箱算法检测标签集合中机会成本为负(见3.1.3)的标签对应的路径(列)可行性, 将其中的可行路径加入松弛主问题。

3.1.1 标签算法

设由起点到客户点 i 对应的路径 $R = (0, \dots, i)$, $i \in N$ 由标签 $L(R) = (\bar{c}(R), i(R), \Pi(R), q(R), \text{Area}(R), r(R))$ 表示, 其中 $\bar{c}(L)$ 为路径机会成本, $i(R)$ 为路径当前抵达点, $\Pi(R)$ 为当前限制抵达点的集合, $q(R)$ 为路径上货物重量, $\text{Area}(R)$ 为路径上货物总面积, $r(R)$ 为路径客户点顺序。配送中心作为初始标签 $L_0 = (0, 0, \emptyset, 0, 0, \emptyset)$ 。令 $\text{Area}(\Phi_j)$ 表示客户点 j 的货物总面积, 标签 $L(R)$ 对弧 (i, j) 探索时, 若同时满足 $i(R) = i$, $q(R) + q_j \leq Q$ 和 $\text{Area}(R) + \text{Area}(\Phi_j) \leq L \times W$, 则新标签生成规则如下:

$$\bar{c}(R') = \bar{c}(R) + c_{ij} - \pi_i, \quad (29)$$

$$i(R') = j, \quad (30)$$

$$\Pi(R') = \Pi(R) \leftarrow j, \quad (31)$$

$$q(R') = q(R) + q_j, \quad (32)$$

$$\text{Area}(R') = \text{Area}(R) + \text{Area}(\Phi_j), \quad (33)$$

$$r(R') = r(R) \leftarrow j. \quad (34)$$

反之, 若违背车辆载重约束或车厢面积约束则表明车辆不能继续装下客户 i 的所有货物, 因而无需生成新标签。其中, 关于面积的约束条件能更严格约束标签产生数量, 从而提高算法效率。此外, 通过支配规则来判断和删除劣势标签能有效加速求解进程。标签 L' 支配标签 L 当且仅当同时满足如下条件:

$$\bar{c}(R') \leq \bar{c}(R), \quad (35)$$

$$i(R') = i(R), \quad (36)$$

$$\Pi(R') \subseteq \Pi(R), \quad (37)$$

$$q(R') \leq q(R). \quad (38)$$

即标签 L' 的机会成本优于标签 L , 且能探索标签 L 的所有后续路径, 该支配规则可以确保满足二维装箱约束的最短路径被保留。例证如下: 设标签 L 对应的路径为 $R = (0, 1, 2, 3)$ 满足二维装箱约束, 若标签 L' 支配标签 L , 则对应的路径 $R' \in \{(0, 3), (0, 1, 3), (0, 2, 3)\}$ 也一定满足。即路径可行的标签才能支配另一个可行的标签。在此规则下, 满足二维装箱约束的最短

路径一旦产生将不会被支配. 然而, 得到的 $\bar{c}_r < 0$ 的路径并不一定满足二维装箱约束, 因此, 在添加到主问题之前还需进行二维装箱可行性的判定, 即检测是否满足约束(9)–(10)和(12)–(15).

3.1.2 基于ng-route松弛策略的标签算法

随着客户点规模增大, 标签量会成倍增加, 上述算法难以在有效时间内遍历和探索所有标签. ng-route 松弛策略由Baldacci等^[19]提出, 一方面允许客户点在一定条件下被服务多次, 另一方面强化支配规则, 使得大规模的CVRP子问题能在较短时间求解. 本文借鉴该思路, 引入ng-route松弛策略求解2L-CVRP子问题. 本文对ng-route松弛作如下定义: 设 NG_i 为客户点 i 的邻域集, 即距离该点最近的 ζ 个客户点集合, τ 为标签 L' 标记路径 R' 中客户点的序号, t 为路径 R' 中客户点总数, 则生成新标签规则中式(31)由式(39)代替.

$$\begin{aligned} \Pi(L') &= \{j\} \cup \{i_\tau : i_\tau \in \bigcap_{s=\tau+1}^t NG_{i_s}, \\ &\quad \tau = 1, \dots, t-1\}, \end{aligned} \quad (39)$$

其中: j 指标签 L' 对应的路径 R' 中当前抵达的客户点, $\{i_\tau : i_\tau \in \bigcap_{s=\tau+1}^t NG_{i_s}, \tau = 1, \dots, t-1\}$ 是指特定的客户点集合, 这些点存在于其后的所有客户点邻域集中. 例如, 设标签 L 对应的路径 $R = (0, 1, 2, 3)$, $NG_1 = \{4, 5, 2\}$, $NG_2 = \{1, 4, 3\}$, $NG_3 = \{1, 6, 5\}$. 由于客户点1存在于邻域集 NG_2 和 NG_3 中, 而客户点2不在邻域集 NG_3 中, 则 $\Pi(L) = \{1, 3\}$. 邻域规模 ζ 的大小影响子问题求解效率, 当 NG_i 的规模设为0时, 子问题即为最短路径问题 (shortest path problem with resource constraints, SPPRC)^[20]; 反之, 当 NG_i 的规模设为客户点总规模时, 子问题即为ESPPRC.

此外, 在支配规则中, 基于ng-route松弛策略的标签算法用式(40)替换式(38), 从而减少支配判断次数.

$$q(R') = q(R). \quad (40)$$

值得注意的是, 在ng-route松弛策略中, 装箱不可行路径对应的标签可能支配可行的标签. 例如, 设标签 L 的路径 $R = (0, 1, 2, 3)$ 装箱可行, 标签 L' 的路径 $R' = (0, 1, 4, 3)$ 装箱不可行, $NG_1 = \{4, 5, 2\}$, $NG_2 = \{1, 4, 3\}$, $NG_3 = \{1, 6, 5\}$, $NG_4 = \{2, 3, 5\}$. 当 $\bar{c}(R') \leq \bar{c}(R)$ 且 $q(R') = q(R)$ 时, 标签 L' 会支配 L . 即在ng-route松弛策略下, 装箱可行的最短路径可能被支配. 但算法每次迭代时, 松弛主问题对应的对偶变量值不断更新, 同一路径对应的机会成本 $\bar{c}(R)$ 将发生变化, 路径之间的支配关系也将不断改变, 因而在一次迭代中可行路径对应的标签被不可行路径对应标签支配的关系并不会阻止算法在整个迭代过程中找到最短的可行路径.

3.1.3 二维装箱可行性检测

分支定价算法中需要频繁调用装箱算法, 为保证求解效率, 本文结合文献中的Skyline^[8]和Random-LS^[9]两种方法提出基于禁忌搜索的装箱算法. 具体而言, 首先调用改进的Skyline装箱算法进行求解, 若不能获得可行的装箱方案, 则调用基于禁忌的独立待装区域装箱算法求解, 若依然无法获得可行的装箱方案, 则判定路径不可行.

1) 改进的Skyline装箱算法.

Skyline算法中装箱图案由一条Skyline分割的已装载区和未装载区组成. 其中, Skyline由装箱图案最高边缘连接而成, 其多个凹点处对应不同装箱点(图3(a)中加粗虚线为Skyline, 加粗点为装箱点). 该算法将货物装入不同装箱点后, 计算浪费空间的个数, 并将其作为适应值, 其中, 浪费空间指无法容纳待装货物的未装载矩形区域(如图3(b)中阴影部分). 该算法将货物按照一定顺序装入某装箱点(如图3(b)所示), 确保不违反装箱约束且适应值最优, 重复更新Skyline和装箱点以继续装载. 若算法不能装入所有货物, 则随机交换两货物装箱顺序, 并将它们存入禁忌表, 在一定周期内不再重复交换.

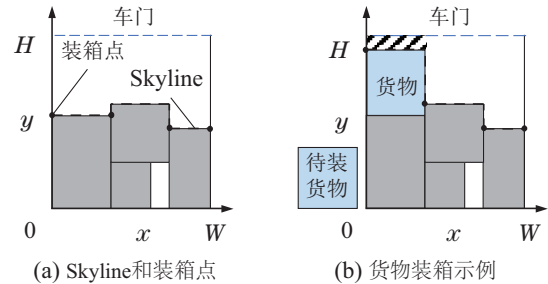


图3 Skyline算法装箱示意图

Fig. 3 Schematic diagram of Skyline packing algorithm

由于浪费空间的总面积同样会对装箱效果产生一定影响, 本文通过综合考虑货物装入后造成的浪费空间个数和总面积, 改进了算法的最优适应值计算方法. 具体而言, 改进的Skyline算法首先计算货物装入装箱点后产生的浪费空间个数, 优先选择个数最少的装箱点, 若有多个这样的位置, 则计算浪费空间总面积并优先选择总面积最小的装箱点装入. 改进的Skyline算法能有效利用车厢面积, 从而提高车辆装载率.

2) 基于禁忌的独立待装区域装箱算法.

RandomLS算法中, 装箱图案由已装载区(图4(a)中阴影部分)和未装载区(图4(a)中空白部分)组成. 未装载区可沿其边界线分割为多个矩形, 其中, 存在一条边与车门重叠的矩形称为待装区域. 若某待装区域包含在另一待装区域内, 则认为该待装区域被支配, 需删除. 所有未被支配的待装区域称为独立待装区域, 以下简称SP, 如图4(a)中 SP_1 , SP_2 和 SP_3 所示. Random

LS算法将货物按照一定顺序装入某SP左下角位置,使得不违反装箱约束且装入后车厢中的SP数量最小.如图4(b)所示,货物装入SP₁后共产生3个SP.若不能装下所有货物,RandomLS算法随机交换两货物装箱顺序以重新求解.然而,随机交换容易产生重复的装箱顺序影响算法求解性能.

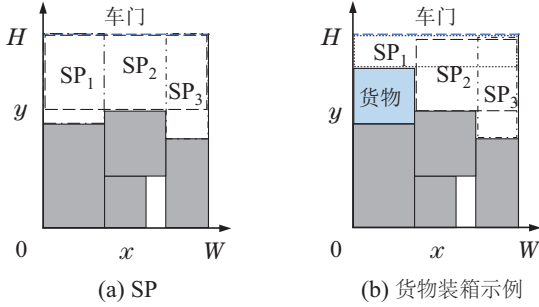


图4 基于禁忌的独立待装区域装箱算法装箱示意图

Fig. 4 Schematic diagram of tabu-based SP packing algorithm

为克服上述不足,本文在交换货物装箱顺序时引入禁忌策略.改进后的基于禁忌的独立待装区域装箱算法首先按照货物长、宽和面积对货物综合排序,使得长宽比最大的货物优先装入,若长宽比相同则选择面积大的货物优先装入.若不能装下所有货物则随机交换两货物顺序,并将它们存入禁忌表中.改进后的装箱算法通过加入禁忌表能有效避免货物重复交换顺序,从而提高算法效率.

3.1.4 定价子问题求解流程

设 $F(i, q)$ 为储存 $i(L) = i$ 且 $q(L) = q$ 的标签集合,则定价子问题求解算法的具体流程如算法1所示.

通过改变当前路径限制抵达客户点集合 $\Pi(R)$ 的生成规则和标签支配规则,即可在算法1中取消ng-route松弛策略.当去除第7行的标签生成规则(式(33))和第22行对路径二维装箱可行性的判定时,算法1可直接用于求解SPPRC.

3.2 分支策略

若得到的松弛主问题的解为非整数解,则需在分支定界树上执行分支策略搜寻整数解.本文借鉴常用的分支策略,即路径数分支^[21]和弧分支^[17]对非整数解节点进行分支操作.路径数分支指主问题中 $\sum_{r \in \Omega} \lambda_r$ 不为整数时,通过限制

$$\sum_{r \in \Omega} \lambda_r \leq \lfloor \sum_{r \in \Omega} \lambda_r \rfloor \text{ 和 } \sum_{r \in \Omega} \lambda_r \geq \lceil \sum_{r \in \Omega} \lambda_r \rceil + 1$$

进行分支.弧分支指存在 $\lambda_r (r \in \Omega)$ 不为整数时,选择 $\lfloor \sum_{r \in \Omega} (i, j)_r - 0.5 \rfloor$ 最小的弧 (i, j) 进行分支,对支节点分别限制 $(i, j) = 1$ 和 $(i, j) = 0$,前者表示经过点 i 后必须到点 j ,后者表示经过点 i 后不能到点 j .本文结合两种分支策略,采用组合分支的方法,首先选择下界

最小的节点优先分支,若 $\sum_{r \in \Omega} \lambda_r$ 不为整数则选择路径数分支;否则,若 $\sum_{r \in \Omega} (i, j)_r$ 不为整数,选择弧分支.

算法1 定价子问题求解流程伪代码

输入: π

输出: Ω

```

1:  $F(0, 0) \leftarrow (0, 0, \emptyset, 0, 0, \emptyset)$ 
2: for  $q = 0$  to  $Q$  do
3:   for all  $(i, j) \neq 0$  do
4:     for all  $L_1 = (\bar{c}_1, i_1, \Pi_1, q, \text{Area}(R), r_1)$  do
5:       if  $j \notin \Pi_1$  then
6:          $\bar{c}_2 = \bar{c}_1 + c_{ij} - \pi_i$ , insert = true
7:          $L_2 \leftarrow (\bar{c}_2, j, \Pi_1 \cap NG_j \cup \{j\}, q + q_j, \text{Area}(R') = \text{Area}(R) + \text{Area}(\Phi_j), r_1 \cup j)$ 
8:         for all  $L \in F$  do
9:           if  $L_2$  dominates  $L$  then delete  $L$ 
10:          else if  $L$  dominates  $L_2$  then
11:            insert = false break
12:          end if
13:          if insert = true then  $F(j, q + q_j) \leftarrow L_2$ 
14:          end if
15:        end for
16:      end if
17:    end for
18:  end for
19: end for
20: for all  $L \in F(i, q)$  do  $\bar{c}(L)' = \bar{c}(L) + \bar{c}_{i0}$ 
21:   if  $\bar{c}(L)' < 0$  then
22:     if  $r(L)$  is an element and two dimensional feasible route then  $\Omega \leftarrow r(L)$ 
23:   end if
24: end if
25: end for

```

3.3 加速策略

3.3.1 启发式算法求解子问题

在根节点中,求解子问题时满足 $\bar{c}_r < 0$ 的列通常很多,算法每次迭代生成大量标签,需耗费大量时间进行遍历.研究表明,使用启发式方法求解子问题能获取大部分 $\bar{c}_r < 0$ 的列,有效减少后续标签算法搜索时间^[22].因此,本文提出两阶段启发式算法对子问题进行预求解,第1阶段采用节约算法,第2阶段采用松弛的标签算法.使用节约算法时,每次将距离当前客户点机会成本最小的点加入路径,直到违反装箱或载重约束.使用松弛的标签算法时,以式(35)–(36)(40)为支配规则,即每个标签集合 $F(i, q)$ 中只储存机会成本最小的标签.若启发式算法无法求得机会成本为负的列则再调用第3.1节标签算法.

3.3.2 装箱可行路径存储

子问题需反复迭代求解,是影响算法性能的关键,

尤其加入二维装箱约束后, 每次检测路径可行性会耗费大量时间. 因此, 本文采用路径存储机制通过储存二维装箱可行的路径, 以避免对其子路径的检测. 前期节约算法生成的路径中车辆基本接近满载状态, 即一条路径中包含多个客户点, 将这些路径储存能有效减少后续大量子路径的装箱可行性判定.

3.3.3 路径枚举

将 $\bar{c}_r < 0$ 的列加入主问题中可改善下界, 但这些列不一定包含最优整数解的所有路径. Baldacci等^[23]指出将 $\bar{c}_r < Z - \text{DRZ}$ 的列加入主问题能改善上界从而加快求得最优整数解, 其中 Z 指当前最优整数解目标值, DRZ 指松弛主问题对偶问题目标值. 考虑到CPLEX的求解性能, 只对已有列数不超过一定数量的节点获取 $\bar{c}_r < Z - \text{DRZ}$ 的列加入主问题. 使用该策略获得较好上界, 可剪去大量下界劣于上界的支节点以加快算法求解.

4 数值测试与分析

本文的算法在visual studio 2019 c++上编程实现, 其中混合整数线性规划模型求解和集合划分模型松弛主问题求解均调用ILOG CPLEX 12.9. 整个测试过程运行在Windows10系统, 配置为Intel (R)Core (TM) i5-8500 CPU@3.0 GHz, 内存为8 GB的PC机上.

4.1 测试算例

Gendreau等^[4]基于经典CVRP算例的客户信息, 根据5种规则生成客户货物数量以及每个货物的长宽, 得到了大量2L-CVRP测试算例. 其中, 规则1下客户货物数量和长宽都为1, 即CVRP; 规则2-5针对每个客户 i 随机生成 $|\Phi_i|$ 个货物, 对每个货物 $m \in \Phi_i$ 通过在表1中的3种不同分布规则下随机生成货物的长和宽, 由此生成5类算例, 其中, 客户数在15~255之间, 客户间距离为欧式距离, 车厢的 L 和 W 分别为40和20. 考虑到Cplex求解问题规模和计算机内存限制, 本文从中选取了75个客户规模为15~50之间的算例进行测试.

4.2 2L-CVRP求解结果与分析

测试中, CPLEX求解时长和算法总求解时长均设置为2 h, ng-route的邻域规模 ζ 设为8. 本文首先验证

了提出的混合整数线性规划模型求解小规模2L-CVRP的有效性. 然后, 测试了基于分支定价的方法求解不同特征2L-CVRP的结果. 为了进一步分析算法性能, 将求解结果与文献[9]中启发式方法求得的已知最优解进行了对比. 同时, 分析了基于ng-route松弛策略的标签算法求解子问题的优势. 测试结果如表2所示, 其中“-”表示在2小时内未获得整数解.

4.2.1 与精确算法结果对比分析

表2中加粗数据表示CPLEX求得相应算例最优解, 验证了2L-CVRP混合整数线性规划模型的有效性. 但2 h内只有17个小规模算例被求得最优解, 该方法无法求解较大规模算例. 分析Iori等^[2]使用精确算法求解考虑先进后出约束问题的结果发现, 0304, 0305, 0505等13个算例的下界劣于文献[9]已知最优解, 说明该精确算法由于对装箱求解时间的限制导致其不能确保解的最优性. CVRP算例(尾号为1)包含15至50个客户规模, 由表2可知, CPLEX能在2 h内求得了客户规模为25的算例的最优解, 然而对于50个客户规模的算例, 上下界相差30.76%. 相比而言, 基于分支定价的算法能求得除算例1901外其他所有算例的最优解, 其平均求解时间为793 s, 其中大部分算例求解时间仅需几分钟, 说明算法求解效率高.

4.2.2 与启发式算法结果对比分析

如表2, 使用标签算法求解子问题时, 算法在有效时间内求解了50个算例, 其中46个结果为已知最优解, 其他结果与对应的已知最优解相差小于0.83%. 使用ng-route松弛求解子问题时, 算法在有效时间内求得了75个算例的上界, 其中64个为已知最优解, 其他与已知最优解相差小于2.23%. 算例1901~1905的客户规模较大, 即使不带装箱约束也难以通过精确算法求解^[23], 而本文算法在2 h内求得结果与已知最优解平均只相差1.43%. 由此可知, 基于分支定价的方法求解2L-CVRP时, 使用标签算法或基于ng-route松弛的标签算法求解子问题, 均能得到较好的效果. 同时, 对比结果验证了本文基于分支定价和启发式装箱算法求解2L-CVRP的有效性.

表1 测试算例产生规则

Table 1 Rules for generating the benchmark instances

规则	$ \Phi_i $	垂直		同质		水平	
		l_m	w_m	l_m	w_m	l_m	w_m
2	[1, 2]	[0.4 L, 0.9 L]	[0.1 W, 0.2 W]	[0.2 L, 0.5 L]	[0.2 W, 0.5 W]	[0.1 L, 0.2 L]	[0.4 W, 0.9 W]
3	[1, 3]	[0.3 L, 0.8 L]	[0.1 W, 0.2 W]	[0.2 L, 0.5 L]	[0.2 W, 0.4 W]	[0.1 L, 0.2 L]	[0.3 W, 0.8 W]
4	[1, 4]	[0.2 L, 0.7 L]	[0.1 W, 0.2 W]	[0.1 L, 0.4 L]	[0.1 W, 0.4 W]	[0.1 L, 0.2 L]	[0.2 W, 0.7 W]
5	[1, 5]	[0.1 L, 0.6 L]	[0.1 W, 0.2 W]	[0.1 L, 0.3 L]	[0.1 W, 0.3 W]	[0.1 L, 0.2 L]	[0.1 W, 0.6 W]

表 2 2L-CVRP测试算例结果对比
Table 2 Comparison results of 2L-CVRP benchmark instances

算例 编号	客户 数	已知 最好解	分支定价算法结合启发式装箱算法							
			CPLEX	Iori等 ^[2]	标签算法求解子问题			基于ng-route松弛策略 的标签算法求解子问题		
					上界	求解 时间/s	与已知最好 解对比/%	上界	求解 时间/s	与已知最好 解对比/%
0101	15	278.73	278.726	273	278.726	7	0	278.726	30	0
0102	15	278.73	278.726	285	278.726	123	0	278.726	104	0
0103	15	284.52	327.178	280	284.519	51	0	284.519	114	0
0104	15	282.59	294.250	288	282.946	32	0	282.946	61	0
0105	15	278.73	286.347	279	278.726	6	0	278.726	22	0
0201	15	334.96	334.964	329	334.964	21	0	334.964	13	0
0202	15	334.96	334.964	342	334.964	43	0	334.964	32	0
0203	15	352.16	352.159	347	352.159	18	0	352.159	25	0
0204	15	334.96	334.964	336	334.964	31	0	334.964	17	0
0205	15	334.96	334.964	329	334.964	18	0	334.964	12	0
0301	20	358.40	358.402	351	358.402	14	0	358.402	26	0
0302	20	387.70	393.539	396	387.704	153	0	387.704	1140	0
0303	20	394.72	427.930	387	394.721	919	0	394.721	104	0
0304	20	362.41	368.563	374	362.414	54	0	362.414	138	0
0305	20	358.40	376.958	369	358.402	30	0	358.402	49	0
0401	20	430.88	430.885	423	430.885	2	0	430.885	1	0
0402	20	430.88	430.885	434	430.885	21	0	430.885	24	0
0403	20	430.88	451.494	432	430.885	52	0	430.885	11	0
0404	20	447.37	459.008	438	447.373	49	0	447.373	280	0
0405	20	430.88	435.933	423	430.885	23	0	430.885	5	0
0501	21	375.28	375.280	367	375.280	81	0	375.280	5	0
0502	21	375.28	375.280	380	375.280	73	0	375.280	43	0
0503	21	381.69	460.911	373	381.690	66	0	381.690	47	0
0504	21	383.87	392.885	377	383.875	82	0	383.875	48	0
0505	21	375.28	387.543	389	375.280	76	0	375.280	23	0
0601	21	495.85	495.848	488	495.848	127	0	495.848	54	0
0602	21	495.85	498.157	491	495.848	97	0	495.848	82	0
0603	21	497.17	510.773	496	498.157	1201	0.2	498.157	648	0.2
0604	21	498.32	565.463	489	498.316	78	0	498.316	93	0
0605	21	495.75	508.559	488	495.848	127	0.02	495.848	32	0.02
0701	22	568.56	568.563	558	—	—	—	568.563	2085	0
0702	22	725.46	773.724	724	—	—	—	725.459	7200	0
0703	22	678.75	825.577	698	—	—	—	678.748	1079	0
0704	22	700.72	1185.08	714	—	—	—	700.716	4281	0
0705	22	657.77	888.01	742	—	—	—	657.769	3448	0
0801	22	568.56	568.563	657	—	—	—	568.563	513	0
0802	22	674.55	760.581	720	—	—	—	685.062	7200	1.53
0803	22	738.43	881.539	730	—	—	—	740.848	7200	0.33
0804	22	692.47	1141.32	701	—	—	—	692.474	3278	0
0805	22	609.90	815.163	721	—	—	—	609.900	1773	0
0901	25	607.65	607.651	609	607.651	12	0	607.651	2	0
0902	25	607.65	607.651	612	607.651	43	0	607.651	32	0
0903	25	607.65	670.019	615	607.651	37	0	607.651	68	0
0904	25	621.23	667.073	626	625.096	363	0.62	625.096	85	0.62

(接下一页)

(接上一页)

算例 编号	客户 数	已知 最好解	分支定价算法结合启发式装箱算法							
			CPLEX	Iori等 ^[2]	标签算法求解子问题			基于ng-route松弛策略 的标签算法求解子问题		
					上界	求解 时间/s	与已知最好 解对比/%	上界	求解 时间/s	与已知最好 解对比/%
0905	25	607.65	—	609	607.651	83	0	607.651	50	0
1201	30	610.00	637.950	—	610.003	173	0	610.003	66	0
1202	30	610.57	—	—	610.570	343	0	610.570	121	0
1203	30	610.00	—	—	610.003	116	0	610.003	72	0
1204	30	614.23	—	—	614.235	162	0	614.235	408	0
1205	30	610.00	—	—	610.003	9	0	610.003	27	0
1601	35	698.61	754.344	682	698.605	9	0	698.605	153	0
1602	35	698.61	—	682	698.605	35	0	698.605	246	0
1603	35	698.61	—	682	698.605	10	0	698.605	140	0
1604	35	703.35	—	691	703.353	738	0	703.353	843	0
1605	35	698.61	—	682	698.605	14	0	698.605	55	0
1701	40	861.79	1109.06	—	861.787	194	0	861.787	161	0
1702	40	863.66	—	—	870.856	219	0.83	870.856	102	0.83
1703	40	861.79	—	—	861.787	187	0	861.787	252	0
1704	40	861.79	—	—	861.787	184	0	861.787	71	0
1705	40	861.79	—	—	861.787	162	0	861.787	52	0
1901	50	524.61	757.653	—	—	—	—	525.902	7200	0.25
1902	50	754.53	—	—	—	—	—	759.942	7200	0.71
1903	50	771.66	—	—	—	—	—	788.116	7200	2.09
1904	50	775.87	—	—	—	—	—	793.527	7200	2.23
1905	50	644.59	—	—	—	—	—	656.941	7200	1.88

4.2.3 ng-route松弛策略性能分析

表2中,对于有无ng-route松弛策略均能求解的50个算例,使用ng-route松弛策略平均求解时间减少了9.58 s。在2L-ESPPRC中,虽然ng-route松弛后的支配规则不能保证解的最优性,但通过反复迭代能有效消除支配规则的负面影响,使得其解趋近或达到最优解。另外,使用ng-route松弛策略相比传统的标签算法可多求解15个算例。分析算例特征发现,0701~0705,0801~0805这10个算例均是车辆容量与客户最小需求量比值较大(相差75倍),即在最优解的路径方案中一条路径可以服务较多客户的场景。尤其对于算例1901~1905,客户规模为50个,且车辆容量与客户最小需求量比值达到53.33。在这种场景下,客户点规模增大、车辆可以容纳更多客户均会造成路径规模成倍增加,直接使用标签算法求解子问题,则需要耗费大量时间进行遍历。而ng-route松弛策略一方面允许客户点在一定条件下被服务多次,另一方面强化了支配规则,能有效减少标签数量,更为高效地求解2L-CVRP子问题。

另外,从结果发现,算例0605(已知最优解为

495.75,由Leung等^[24]提供)具有二维装箱约束限制,其结果不可能优于不具装箱约束限制的算例0601(最优解为495.85),由此可知Leung等^[24]通过启发式算法求得的已知最优解存在谬误。

5 结论

本文研究了带二维装箱约束的车辆路径问题,分别建立了其混合整数线性规划和集合划分模型,通过CPLEX求解小规模算例验证了混合整数线性规划模型的有效性。同时,基于集合划分模型设计了基于分支定价的方法进行求解。针对子问题提出了基于ng-route松弛策略的标签算法和基于禁忌搜索的二维装箱算法。此外,提出了启发式算法预求解、装箱可行路径存储和路径枚举融合的加速策略。仿真结果表明,提出的基于分支定价的方法能高效求解较大规模2L-CVRP。另外,分析算例特征和ng-route松弛策略对算法求解性能的影响表明,该松弛策略能有效提升算法求解效率、实现对较大规模2L-CVRP的求解。下一步研究方向将分为改进算法以求解更加复杂的约束(如可旋转和先进后出等)和设计高效的精确装箱算法以求解更大规模的2L-CVRP最优整数解。

参考文献:

- [1] DANTZIG G B, RAMSER J H. The truck dispatching problem. *Management Science*, 1959, 6(1): 80 – 91.
- [2] IORI M, SALAZAR-GONZALEZ J J, VIGO D. An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Transportation Science*, 2007, 41(2): 253 – 264.
- [3] HOKAMA P, MIYAZAWA F K, XAVIER E C. A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with loading constraints. *Expert Systems with Applications*, 2016, 47: 1 – 13.
- [4] GENDREAU M, IORI M, LAPORTE G, et al. A Tabu search heuristic for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Networks: An International Journal*, 2008, 51(1): 4 – 18.
- [5] ZACHARIADIS E E, TARANTILIS C D, KIRANOUDIS C T. A guided tabu search for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 2009, 195(3): 729 – 743.
- [6] WANG Zheng, HU Xiangpei, WANG Xuping. Vehicle routing problem in distribution with two-dimensional loading constraint. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2011, 31(12): 2328 – 2341.
(王征, 胡祥培, 王旭坪. 带二维装箱约束的物流配送车辆路径问题. 系统工程理论与实践, 2011, 31(12): 2328 – 2341.)
- [7] FUELLERER G, DOERNER K F, HARTL R F, et al. Ant colony optimization for the two-dimensional loading vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 2009, 36(3): 655 – 673.
- [8] WEI L, ZHANG Z, ZHANG D, et al. A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 2015, 243(3): 798 – 814.
- [9] WEI L, ZHANG Z, ZHANG D, et al. A simulated annealing algorithm for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 2018, 265(3): 843 – 859.
- [10] PECIN D, PESSOA A, POGGI M, et al. Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing. *Mathematical Programming Computation*, 2017, 9(1): 61 – 100.
- [11] COTE J F, GENDREAU M, POTVIN J Y. An exact algorithm for the two-dimensional orthogonal packing problem with unloading constraints. *Operations Research*, 2014, 62(5): 1126 – 1141.
- [12] SHANG Zhengyang, GU Jinan, DING Wei, et al. Heuristic algorithm for 2D rectangle packing problem. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2018, 24(3): 583 – 590.
(尚正阳, 顾寄南, 丁卫, 等. 求解二维矩形装箱问题的启发式算法. 计算机集成制造系统, 2018, 24(3): 583 – 590.)
- [13] WEI L, WANG Y, CHENG H, et al. An open space based heuristic for the 2D strip packing problem with unloading constraints. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 70: 67 – 81.
- [14] TOTH P, VIGO D. *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.
- [15] VANDERBECK F. On Dantzig-Wolfe decomposition in integer programming and ways to perform branching in a branch-and-price algorithm. *Operations Research*, 2000, 48(1): 111 – 128.
- [16] DESAULNIERS G, DESROSIERS J, SOLOMON M M. *Column Generation*. US: Springer, 2005.
- [17] DESROSIERS J, SOUMIS F, DESROCHERS M. Routing with time windows by column generation. *Networks*, 1984, 14(4): 545 – 565.
- [18] FEILLET D, DEJAX P, GENDREAU M, et al. An exact algorithm for the elementary shortest path problem with resource constraints: Application to some vehicle routing problems. *Networks: An International Journal*, 2004, 44(3): 216 – 229.
- [19] BALDACCI R, MINGOZZI A, ROBERTI R. New route relaxation and pricing strategies for the vehicle routing problem. *Operations Research*, 2011, 59(5): 1269 – 1283.
- [20] IRNICH S, DESAULNIERS G. *Shortest Path Problems with Resource Constraints*. Boston, MA: Springer, 2005: 33 – 65.
- [21] COSTA L, CONTARDO C, DESAULNIERS G. Exact branch-price-and-cut algorithms for vehicle routing. *Transportation Science*, 2019, 53(4): 946 – 985.
- [22] FUKASAWA R, LONGO H, LYSGAARD J, et al. Robust branch-and-cut-and-price for the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical Programming*, 2006, 106(3): 491 – 511.
- [23] BALDACCI R, CHRISTOFIDES N, MINGOZZI A. An exact algorithm for the vehicle routing problem based on the set partitioning formulation with additional cuts. *Mathematical Programming*, 2008, 115(2): 351 – 385.
- [24] LEUNG S C H, ZHOU X, ZHANG D, et al. Extended guided tabu search and a new packing algorithm for the two-dimensional loading vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 2011, 38(1): 205 – 215.

作者简介:

季彬 博士, 教授, 目前研究方向为优化理论、算法及应用、物流配送优化理论与应用、航运网络优化和资源调度等, E-mail: cumtjbin@126.com;

周赛琦 硕士研究生, 目前研究方向为车辆路径问题求解算法及应用, E-mail: zhou.saiqi@csu.edu.cn;

张政 硕士研究生, 目前研究方向为车辆路径问题求解算法及应用, E-mail: Zhengzhang@csu.edu.cn.