

有向符号网络的边能控性研究

任世超, 关永强[†], 谌煜

(西安电子科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710071)

摘要: 符号网络是一类具有正负符号特征的网络. 在多智能体系统中, 符号网络能够描述智能体之间的合作与对抗交互关系, 因此受到学者的广泛关注. 本文主要研究有向符号网络的边能控性. 首先, 对具有符号网络的多智能体系统边动力学进行建模, 得到边能控性模型. 其次, 从网络拓扑结构角度对边能控子空间进行定量刻画, 利用有向符号网络的距离和等价划分得到能控子空间的上下界估计. 进一步, 讨论了符号网络边能控性与顶点能控性的关系. 所得结果表明: 当顶点符号图为结构非平衡时, 符号网络的边能控性与顶点能控性等价. 最后, 通过仿真结果验证所得理论的有效性.

关键词: 多智能体系统; 边能控性; 有向符号图; 图划分; 关联矩阵

引用格式: 任世超, 关永强, 谌煜. 有向符号网络的边能控性研究. 控制理论与应用, 2023, 40(1): 74–82

DOI: 10.7641/CTA.2021.10391

Edge controllability of directed signed networks

REN Shi-chao, GUAN Yong-qiang[†], SHEN Yu

(School of Mechano-electronic Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China)

Abstract: Signed network is a type of network with positive and negative signed characteristics. In multi-agent systems, the signed network can describe the cooperative and antagonistic interaction between agents, so it has received extensive attention from scholars. This paper mainly studies the edge controllability of directed signed networks. Firstly, the edge dynamics of the multi-agent systems with the signed network is modeled, and the edge controllability model is proposed. Secondly, the edge controllability subspace is quantitatively described from the perspective of the network topology, the upper and lower bounds of the edge controllable subspace are estimated by using the distance partition and equitable partition of the directed signed network, respectively. Furthermore, the relationship between edge controllability and vertex controllability of the signed network is discussed. The results show that when the vertex signed graph is structurally unbalanced, the edge controllability and the vertex controllability of signed network are equivalent. Finally, simulation results are given to verify the effectiveness of the theoretical analysis.

Key words: multi-agent system; edge controllability; signed directed graph; graph partition; incidence matrix

Citation: REN Shichao, GUAN Yongqiang, SHEN Yu. Edge controllability of directed signed networks. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(1): 74–82

1 引言

近年来, 随着计算机、通信、传感、机器人等技术的高速发展, 多智能体系统分布式协调控制受到诸多领域学者的广泛关注^[1–7], 相关研究成果已应用到智能电网优化^[8]、卫星簇网姿态控制^[9]、水下航行器控制^[10]等工程实践中. 能控性的概念最早是由Kalman于19世纪60年代提出的^[11]. 能控性是指在有限时间内, 通过外界控制输入使得系统从任意初始状态到达任意的最终状态. 实质上能控性描述的是外界控制输

入对系统状态的控制能力. 进一步, 多智能体系统能控性是由Tanner于2004年首次提出^[1]. 多智能体系统能控性是指通过对多智能体系统内的部分智能体(通常称为领导者(leader))施加外部控制输入, 通过智能体之间的交互使得其他智能体(通常称为跟随者(follower))从任意初始状态达到任意最终状态. 能控性是多智能体系统分布式协调控制中的一个基本而又重要的问题, 其研究为脑网络控制^[12]、机器人编队控制^[13]、网络信息处理^[14]等提供了理论指导. 由此,

收稿日期: 2021–05–10; 录用日期: 2021–09–24.

[†]通信作者. E-mail: guan-jq@163.com; Tel.: +86 13772115926.

本文责任编辑: 左志强.

国家自然科学基金项目(62073253, 62036002).

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62073253, 62036002).

越来越多的研究学者开始关注多智能体系统能控性问题. 文献[1,5,7]针对不同的多智能体系统, 通过分析系统矩阵的特征值与特征向量得到能控的代数判据. 需要指出, 代数判据并不直观, 且计算复杂度较大, 实际应用并不方便. 为此, 部分学者采用图论工具研究多智能体系统网络拓扑结构与能控性之间的关系, 从而获得能控性的图论判据. 文献[15–16]基于距离划分研究了多智能体系统能控子空间的下界; 文献[16–18]基于等价划分、几乎等价划分研究能控子空间的上界.

值得注意的是, 以上研究都是针对无符号网络, 即, 多智能体之间均是合作交互. 然而, 在现实世界中, 对抗交互是普遍存在的, 如社交网络中的竞争关系^[19]、信息领域中用户对某些信息的不信任态度^[20]、生物领域中神经元之间的抑制关系^[21]. 因此, 许多学者对符号网络下的多智能体系统分布式协调控制进行了深入研究^[22–25]. 文献[22]研究了符号网络下多智能体系统的二分一致性问题, 即在结构平衡图下达成一致的智能体收敛到一个绝对值相同的非零共同值; 文献[23]通过分析有向符号图的拉普拉斯矩阵, 得到结论: 如果有向符号图包含生成树, 则所有智能体达到区间二部一致性; 文献[24]基于广义几乎等价划分得到对抗交互下多智能体系统能控子空间的上界, 进一步给出了求解能控子空间上界的算法; 文献[25]研究了具有有向加权符号网络的多智能体系统的能控性, 结果表明: 结构平衡网络的能控性与无符号网络的能控性等价.

上述研究均是针对具有顶点动力学的多智能体系统, 即网络中的每个顶点具有一个动力学方程. 然而, 以边动力学为研究对象的多智能体系统同样具有十分重要的研究意义^[26–30]. 例如, 在研究城市交通流量控制问题中, 以每一条道路(交通网络中的边)的流量动态建立的交通流量控制模型比基于每个交通路口(交通网络中的顶点)的流量动态建立的模型更加符合实际^[26]; 在研究社交网络团队协作效率问题中, 以每对成员之间的沟通频率(社交网络中的边)建立的团队协作模型比基于团队中成员(社交网络中的顶点)的团队协作模型更加符合实际^[27]. 文献[28]刻画了具有合作和对抗相互作用的符号网络的边动力学, 并解决了由此产生的边系统的状态收敛问题, 进一步作者证明了对于一个符号网络, 无论其关联的符号有向图是结构平衡的还是结构非平衡的, 其边系统的状态都收敛到一个常数向量; 文献[29]基于网络的边动态研究了无向图的非负边一致性问题, 并构造了相应的分布式算法. 文献[30]基于SBD (switchboard dynamics)模型研究了具有边动力学的有向复杂网络的结构能控性. 截至目前, 有向符号网络下具有边动力学的多智能体系统能控性尚未有学者研究.

本文研究具有有向符号网络的多智能体系统边能控性问题. 首先, 在符号网络下建立具有边动力学的能控性模型, 并通过分析边拉普拉斯矩阵得到边能控性的基本性质; 其次, 定量刻画边系统能控子空间的大小, 特别地, 基于距离划分得到能控子空间的下界, 基于等价划分得到能控子空间的上界, 并且所得的上下界具有紧性(tight); 最后, 基于符号网络的关联矩阵, 给出了边能控性与顶点能控性的关系. 结果表明: 二者之间的关系取决于顶点图的结构平衡性, 特别地, 当顶点图是结构非平衡时, 边图能控性与顶点图能控性等价.

本文研究内容安排如下: 第2节介绍图论的相关概念; 第3节对边能控性问题进行描述; 第4节对边系统能控性进行分析; 第5节给出仿真实例; 第6节对本文的研究进行总结.

符号说明: 在本文中, $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 分别表示实数域与复数域. $\mathcal{I}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示从1到 n 的整数集合. 对于 $a \in \mathbb{R}$, 令 $|a|$ 与 $\text{sgn } a$ 分别表示 a 的绝对值与符号, 其中 a 可以是一条边、一个实数或者一条路径. I_n 表示 $n \times n$ 的单位矩阵, $\text{rank}(A)$ 表示矩阵 A 的秩, $\text{im}(A)$ 表示矩阵 A 的列空间, $[A]_{i \cdot}$ 表示矩阵 A 的第 i 行, $[A]_{ij}$ 表示矩阵 A 第 i 行第 j 列的元素. 对于任给两个集合 $S, R (S \subset R)$, 用 $R \setminus S$ 表示集合 S 在集合 R 的补集, $|S|$ 表示集合 S 中的元素个数.

2 预备知识

一个有向符号图由顶点集 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集 $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 构成, 记为 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$, 其中 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示邻接矩阵, 具有如下形式:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ 或 } -1, & (v_j, v_i) \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

注1 在这里 $a_{ij} = 1$ 表示智能体之间是合作关系, $a_{ij} = -1$ 表示智能体之间是对抗关系.

如果顶点 v_i 可以接收到顶点 v_j 的信息, 则称 v_j 是 v_i 的入-邻居, v_i 是 v_j 的出-邻居, v_j 是边 (v_j, v_i) 的起始顶点, v_i 是边 (v_j, v_i) 的终止顶点, $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$. $N_i^{\text{in}} = \{v_j \in \mathcal{V} | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$ 表示顶点 v_i 的所有入-邻居的集合. 本文研究的图 G 均为简单图, 即不包含自环与多重边. $P = (v_{i_0}, (v_{i_0}, v_{i_1}), v_{i_1}, \dots, (v_{i_{q-1}}, v_{i_q}), v_{i_q})$ 表示一个长度为 q 的路径, 其中 $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in \mathcal{E}, k = 0, 1, \dots, q-1$. 用 $\mathbf{d}_{ij}$ 表示 v_i 到 v_j 的最短路径(即 v_i 到 v_j 之间最少边的数目). 特别地, $\mathbf{d}_{ii} = 0$. $\text{diam}(G) = \max_{i,j} \mathbf{d}_{ij}$ 表示图 G 的直径. $\pi = \{C_1, C_2, \dots, C_q\}$ 表示图 G 的一个划分, 当 $i \neq j, i, j \in \mathcal{I}_q$ 时满足 $\bigcup_{k=1}^q C_k = \mathcal{V}$ 且 $C_i \cap C_j = \emptyset$.

定义1 将图 G 的所有有向边替换为无向边, 所

得到的无向图 G' 称为 G 的基图. 如果基图 G' 是连通的, 即 G' 中的任意两个顶点之间都存在路径, 则称有向图 G 是弱连通的.

定义 2^[22] 给定符号图 G . 对于两个集合 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$ 且 $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$, 使得 $\forall v_i, v_j \in \mathcal{V}_s$, ($s \in \{1, 2\}$), 有 $a_{ij} \geq 0$ 成立; $\forall v_i \in \mathcal{V}_s, v_j \in \mathcal{V}_t, s \neq t$ ($s, t \in \{1, 2\}$), 有 $a_{ij} \leq 0$ 成立, 那么称符号图 G 是结构平衡的; 否则称图 G 是结构非平衡的.

引理 1 考虑具有 n 个顶点 m 条边的弱连通图 G , 如果满足 $m = n - 1$, 那么 G 是结构平衡的.

证 当 $m = n - 1$ 时, 图 G 的基图 G' 是一棵生成树, 而生成树总是结构平衡的(参看文献[22]), 因此 G' 是结构平衡的. 进一步, 由结构平衡的定义可知, G' 中的顶点能被分成两个集合, 而这两个集合的划分对 G 也适用, 并不受边方向的影响. 因此, 结构平衡性并不改变, 即 G 也是结构平衡的. 证毕.

值得注意的是本文所述的顶点图与边图本质上都是有向符号图. 为了表述方便, 分别采用 G_v 与 G_e 进行标记.

2.1 顶点符号图

考虑一个具有 n 个顶点 m 条边的顶点图 G_v . 定义 G_v 的拉普拉斯矩阵为 $L_v = C_v - A_v$, 其中:

$$C_v = \text{diag}\left\{\sum_{j=1}^n |a_{1j}|, \sum_{j=1}^n |a_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^n |a_{nj}|\right\}$$

表示 G_v 的入度矩阵, A_v 表示 G_v 的邻接矩阵.

定义 3 G_v 的关联矩阵 $H = [h_{qk}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是一个仅包含 $\{0, \pm 1\}$ 的矩阵. 具体来说, 任取一条边 e_k , 相关联的两个顶点为 v_q 与 v_s , 那么 $\forall q, s \in \mathcal{I}_n, k \in \mathcal{I}_m$ 满足

$$h_{qk} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } v_q \text{ 是 } e_k \text{ 的起点;} \\ -a_{qs}, & \text{如果 } v_q \text{ 是 } e_k \text{ 的终点;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

为了区别一个顶点的入边与出边, 引入入-关联矩阵与出-关联矩阵的定义.

定义 4 给定 G_v 及任一条边 e_k , 相关联的两个顶点为 v_q 与 v_s , 入-关联矩阵 $H^{\text{in}} = [h_{qk}^{\text{in}}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 描述为: $\forall q, s \in \mathcal{I}_n, k \in \mathcal{I}_m$ 有

$$h_{qk}^{\text{in}} = \begin{cases} -a_{qs}, & \text{如果 } v_q \text{ 是 } e_k \text{ 的终点;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

出-关联矩阵 $H^{\text{out}} = [h_{qk}^{\text{out}}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 描述为: $\forall q, s \in \mathcal{I}_n, k \in \mathcal{I}_m$ 有

$$h_{qk}^{\text{out}} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } v_q \text{ 是 } e_k \text{ 的起点;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由定义3和定义4显然有 $H = H^{\text{in}} + H^{\text{out}}$.

引理 2^[31] 令 $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 表示 G_v 的关联矩阵, 那么有以下结果成立:

$$\text{rank}(H) = \begin{cases} n - 1, & G_v \text{ 是结构平衡的;} \\ n, & G_v \text{ 是结构非平衡的.} \end{cases}$$

2.2 符号边图

给定一个图 G_v , $G_e = (\mathcal{V}_e, \mathcal{E}_e, A_e)$ 表示 G_v 对应的边图, 其中 $\mathcal{V}_e$ 表示边图 G_e 的顶点集, $\mathcal{E}_e$ 表示边图 G_e 中的连接边集, A_e 表示边图 G_e 的邻接矩阵. 取 G_v 中的两条边 $e_h = (v_j, v_i)$ 和 $e_k = (v_s, v_q)$, 其中 $h \neq k$. 如果 e_k 指向 e_h 的任一顶点, 那么称 e_k 是 e_h 的入-邻居. 为了便于理解, 给出 e_h 的入-邻居如图1所示. 定义 $N_{e_h}^{\text{in}} = \{e_k = (v_s, v_q) : e_k \in \mathcal{E}, e_k \neq e_h \text{ 且 } v_q = v_j \text{ 或 } v_q = v_i\}$ 表示 e_h 的入-邻居集合. $A_e = [\bar{a}_{hk}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 满足: 如果 $e_h \in N_{e_k}^{\text{in}}$, 有 $[\bar{a}_{hk}] \in \{1, -1\}$; 否则 $[\bar{a}_{hk}] = 0$, 即

$$\bar{a}_{hk} = \begin{cases} -a_{qs}, & e_k \in N_{e_h}^{\text{in}} \text{ 且 } v_q = v_j; \\ a_{qs}a_{ij}, & e_k \in N_{e_h}^{\text{in}} \text{ 且 } v_q = v_i; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

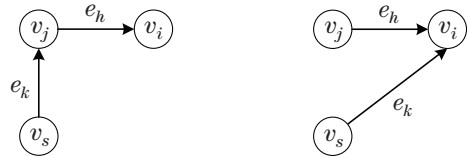


图1 e_h 的入-邻居的两种情况

Fig. 1 Two cases of in-neighbors of edge e_h

定义 5 给定一个具有 n 个顶点 m 条边的顶点图 G_v , G_v 对应的边图 G_e 的拉普拉斯矩阵定义为

$$L_e = I_m + A_e. \quad (1)$$

引理 3^[28] 给定一个顶点图 G_v , 对应的边图 G_e , H 与 H^{in} 分别表示 G_v 的关联矩阵与入-关联矩阵, 则顶点拉普拉斯矩阵 $L_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 与边拉普拉斯矩阵 $L_e \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 分别满足

$$L_v = H^{\text{in}} H^{\text{T}}, \quad (2)$$

$$L_e = H^{\text{T}} H^{\text{in}}. \quad (3)$$

基于引理3有 $H^{\text{T}} L_v = L_e H^{\text{T}}$ 成立.

3 问题描述

考虑一个具有 n 个顶点 m 条连接关系的多智能体系统. 假设边集 $\mathcal{V}_e$ 被分为领导者集合 $\mathcal{V}_{\text{el}}$ 以及跟随者集合 $\mathcal{V}_{\text{ef}}$, 其中 $\mathcal{V}_{\text{el}} \cup \mathcal{V}_{\text{ef}} = \mathcal{V}_e$, $\mathcal{V}_{\text{el}} \cap \mathcal{V}_{\text{ef}} = \emptyset$. 不失一般性, 假设前 p ($p < m$)条边选作为领导者, 即 $\mathcal{V}_{\text{el}} = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$, 那么跟随者集合为 $\mathcal{V}_{\text{ef}} = \{e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_m\}$.

定义 6 给定边图 G_e , 如果对于每一个跟随者都至少有一条从某一个领导者出发的路径, 那么称图 G_e 是领导者-跟随者(leader-follower)连通的.

注2 本文中考虑的图均为领导者-跟随者连通的.

在领导者-跟随者框架下, 边 e_i 的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -x_i(t) - \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij}x_j(t) + u_i(t), & i \in \mathcal{V}_{el}, \\ \dot{x}_i(t) = -x_i(t) - \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij}x_j(t), & i \in \mathcal{V}_{ef}, \end{cases} \quad (4)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbb{R}$ 表示边 e_i 的状态, $u_i(t)$ 表示作用在第 i 条边上的外界控制输入.

令 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$, $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_p(t)]^T \in \mathbb{R}^p$. 整个多智能体系统的演化边动力学方程为

$$\dot{x}(t) = -L_e x(t) + Bu(t). \quad (5)$$

其中: $L_e \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是边拉普拉斯矩阵, $B = [I_p \ 0]^T \in \mathbb{R}^{m \times p}$ 是控制输入矩阵. 系统(5)可采用矩阵对 $(-L_e, B)$ 表示.

定义7 如果存在一个控制输入 $u(t)$ 能在有限时间 $t_1 - t_0$ ($t_1 > t_0$)内使得系统(5)由任意初始状态 $x(t_0)$ 能够到达任意最终状态 $x(t_1)$, 则称系统(5)是能控的.

定义矩阵 $Q = [B \ L_e B \ \cdots \ L_e^{m-1} B]$ 和矩阵 $\bar{Q} = [B \ A_e B \ \cdots \ A_e^{m-1} B]$ 分别表示系统(5)以及矩阵对 (A_e, B) 的能控性矩阵.

定理1 系统(5)的能控性等价于矩阵对 (A_e, B) 的能控性, 即 $\text{rank}(Q) = \text{rank}(\bar{Q})$.

证 首先, 系统(5)的能控性矩阵 Q 可写成如下形式:

$$\begin{aligned} Q &= [B, L_e B, \cdots, L_e^{m-1} B] = \\ &= [B, (I_m + A_e)B, \cdots, (I_m + A_e)^{m-1} B] = \\ &= [B, B + A_e B, \cdots, B + \\ &\quad (m-1)A_e B + \cdots + A_e^{m-1} B]. \end{aligned}$$

显然存在一个可逆矩阵 $K \in \mathbb{R}^{mp \times mp}$ (在矩阵 Q 上经过多次列变换所得), 使得 $\bar{Q} = QK$. 因此, $\text{rank}(Q) = \text{rank}(\bar{Q})$, 表明系统(5)的能控性等价于矩阵对 (A_e, B) 的能控性. 证毕.

4 边能控性分析

在本节中, 从图论的角度对系统(5)的能控性进行分析. 特别地, 基于符号边图的距离划分得到能控子空间的下界, 基于符号边图的等价划分得到能控子空间的上界. 进一步, 分析了边能控性与顶点能控性的关系.

4.1 边能控子空间下界

给定边图 G_e . 用 $\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d} = (e_i, \ell_1, e_{i+1}, \ell_2, \cdots, \ell_d, e_j)$ 表示从 e_i 到 e_j 长度为 d 的一条路径, 其中 $e_i \in$

$\mathcal{V}_e, \ell_d \in \mathcal{E}_e$. 考虑路径 $\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}$ 的符号

$$\text{sgn}(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}) = \prod_{\ell_d \in \mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}} \text{sgn}(\ell_d). \quad (6)$$

考虑路径 $\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}$ 的权重 $\omega(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d})$

$$\omega(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}) = \prod_{\ell_d \in \mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}} \omega(\ell_d), \quad (7)$$

其中 $\omega(\ell_d)$ 表示边 ℓ_d 的权值. 不难发现, 从 e_i 到 e_j 的路径可能不唯一, 因此 $\text{sgn}(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d})$ 可能也不唯一. 如果 $\text{sgn}(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}) = 1$, 称该路径为正路; 如果 $\text{sgn}(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}) = -1$, 称该路径为负路.

注3 本文所考虑的边图 G_e 的权重值 $\bar{a}_{ij} \in \{\pm 1, 0\}$, 因此 $|\text{sgn}(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d})| = |\omega(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d})|$.

考虑 $\text{sgn}(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}) = 1$ 的所有路径的总权重为

$$\rho_{e_i \rightarrow e_j, d}^+ = \sum_{\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d} \in \Gamma_{e_i \rightarrow e_j, d}^+} \omega(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}), \quad (8)$$

其中 $\Gamma_{e_i \rightarrow e_j, d}^+$ 表示 $\text{sgn}(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}) = 1$ 的所有路径.

考虑 $\text{sgn}(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}) = -1$ 的所有路径的总权重

$$\rho_{e_i \rightarrow e_j, d}^- = \sum_{\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d} \in \Gamma_{e_i \rightarrow e_j, d}^-} \omega(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}), \quad (9)$$

其中 $\Gamma_{e_i \rightarrow e_j, d}^-$ 表示 $\text{sgn}(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d}) = -1$ 的所有路径.

因此, 从 e_i 到 e_j 长度为 d 的所有路径的总权重为

$$\rho_{e_i \rightarrow e_j, d} = \rho_{e_i \rightarrow e_j, d}^+ + \rho_{e_i \rightarrow e_j, d}^-. \quad (10)$$

特别地, 当 $|\text{sgn}(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d})| = |\text{sgn}(\mathcal{P}_{e_i \rightarrow e_j, d})| = -1$ 时, 有 $\rho_{e_i \rightarrow e_j, d} = 0$.

引理4 给定边图 G_e , 则如下等式成立:

$$[A_e^d]_{ji} = \rho_{e_i \rightarrow e_j, d}, \quad (11)$$

其中 d 表示 e_i 到 e_j 的长度.

证 采用对 d 的数学归纳法进行证明.

首先, 当 $d = 1$ 时, 从 e_i 到 e_j 有长度为1的路径当且仅当 $\bar{a}_{ji} = \pm 1$;

其次, 假设 $[A_e^{d-1}]_{ji} = \rho_{e_i \rightarrow e_j, d-1}$ 成立;

最后, 对于 $[A_e^d]_{ji}$ 有

$$\begin{aligned} [A_e^d]_{ji} &= [A_e A_e^{d-1}]_{ji} = \sum_{r=1}^m [A_e]_{jr} [A_e^{d-1}]_{ri} = \\ &= \sum_{r=1}^m [A_e]_{jr} \rho_{e_i \rightarrow e_r, d-1} = \rho_{e_i \rightarrow e_j, d}. \end{aligned}$$

综上所述, 等式(11)成立. 证毕.

考虑边图 G_e , 用 $\pi_D(e_i) = \{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_q\}$ 表示关于 e_i 的距离划分(distance partition). 其中 $\mathcal{C}_\kappa = \{e_k \in \mathcal{V}_e | d_{ik} = \kappa\}$. 如果 $\forall e_j \in \mathcal{C}_\kappa$ 都有 $\rho_{e_i \rightarrow e_j, \kappa} = 0$, 那么记 $\rho_{e_i \rightarrow \mathcal{C}_\kappa, \kappa} = 0$, 其中 $1 \leq \kappa \leq \text{diam}(G_e)$. 令 $z_C = \{\kappa | \rho_{e_i \rightarrow \mathcal{C}_\kappa, \kappa} = 0\}$, $\delta_{e_i} = |\pi_D(e_i)| - |z_C|$.

定理2 系统(5)的能控性矩阵 Q 满足

$$\text{rank}(Q) \geq \max\{\delta_{e_1}, \delta_{e_2}, \cdots, \delta_{e_p}\}. \quad (12)$$

证 首先考虑单领导者的情况. 不失一般性, 假设 e_1 为领导者, 令 $\pi_D(e_1) = \{C_0, C_1, \dots, C_q\}$ 为相对于 e_1 的距离划分, 其中 $q \leq \text{diam}(G_e)$, 那么 $C_0 = \{e_1\}$, $C_\kappa = \{e_{i_\kappa+1}, e_{i_\kappa+2}, \dots, e_{i_{\kappa+1}}\}$, $1 \leq \kappa \leq \text{diam}(G_e)$. 即 $\mathcal{V}_{e_1} = \{e_1\}$, 给定 $e_i \neq e_1$, 则

$$[A_e^{d_{1i}} B]_{i1} = \sum_{r=1}^n [A_e^{d_{1i}}]_{ir} [B]_{r1} = [A_e^{d_{1i}}]_{i1} B = [A_e^{d_{1i}}]_{i1}.$$

因此, 当 $[A_e]_{i1}^{d_{1i}} = 0$, 有 $[A_e^{d_{1i}} B]_{i1} = 0$; 否则 $[A_e^{d_{1i}} B]_{i1} \neq 0$. 给定一个整数 κ , 其中 $1 \leq \kappa \leq \text{diam}(G_e)$. 当 $\kappa < d_{1i}$, 不难发现 $[A_e^\kappa B]_{i1} = 0$. 构造矩阵 $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{m \times \text{diam}(G_e)}$

$$\mathcal{M} = [B \quad A_e B \quad \dots \quad A_e^\kappa B \quad \dots \quad A_e^{\text{diam}(G_e)} B] = \begin{bmatrix} 1 & * & \dots & * & \dots & * \\ \mathbf{0} & M_1 & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & M_\kappa & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & M_{\text{diam}(G_e)} \end{bmatrix},$$

其中 $M_\kappa = [\rho_{e_1 \rightarrow e_{i_\kappa+1}, \kappa} \quad \rho_{e_1 \rightarrow e_{i_\kappa+2}, \kappa} \quad \dots \quad \rho_{e_1 \rightarrow e_{i_{\kappa+1}}, \kappa}]^T \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}_\kappa|}$, $1 < i_r \leq |\mathcal{C}_\kappa|$. 显然 $\mathcal{M}$ 表示能控性矩阵 $\bar{Q}$ 的一个子矩阵. 接下来, 分两种情况来讨论 $\text{rank}(\mathcal{M})$:

- 1) 如果 $\rho_{e_1 \rightarrow \mathcal{C}_\kappa, \kappa} \neq 0$, $\forall 1 \leq \kappa \leq \text{diam}(G_e)$, 可得 $\text{rank}(\mathcal{M}) \geq \text{diam}(G_e) = |\pi_D(e_1)| = \delta_{e_1}$;
- 2) 如果 $\rho_{e_1 \rightarrow \mathcal{C}_\kappa, \kappa} = 0$, $\exists 1 < \kappa \leq \text{diam}(G_e)$, 可得 $\text{rank}(\mathcal{M}) \geq |\pi_D(e_1)| - |z_C| = \delta_{e_1}$.

综上所述, $\text{rank}(\mathcal{Q}) = \text{rank}(\bar{Q}) \geq \text{rank}(\mathcal{M}) \geq \delta_{e_1}$.

在多领导者的情况下, 针对每个领导者单独分析, 按照单领导者的情况易得 $\text{rank}(\mathcal{Q}) = \text{rank}(\bar{Q}) \geq \max\{\delta_{e_1}, \delta_{e_2}, \dots, \delta_{e_p}\}$. 证毕.

注4 定理2所得到的下界是紧的. 事实上, 可以构造一些边图使得下界成立.

例1 给定一个如图2所示的边图 G_e . 在此假设 e_1 是唯一的领导者, 基于距离划分有 $\pi_D(e_1) = \{C_0, C_1, C_2, C_3\} = \{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3, e_4\}, \{e_5\}\}$. 对于 $C_3 = \{e_5\}$ 来说, 有两条从 e_1 到 e_5 长度为3的路径 $\mathcal{P}_{e_1 \rightarrow e_5, 3}^1 = (e_1, (e_1, e_2), e_2, (e_2, e_3), e_3, (e_3, e_5), e_5)$ 和 $\mathcal{P}_{e_1 \rightarrow e_5, 3}^2 = (e_1, (e_1, e_2), e_2, (e_2, e_4), e_4, (e_4, e_5), e_5)$, 其中 $(e_i, e_j) \in \mathcal{E}_e$. 不难发现 $\mathcal{P}_{e_1 \rightarrow e_5, 3}^1$ 是一条正路, $\mathcal{P}_{e_1 \rightarrow e_5, 3}^2$ 是一条负路, 因此有 $\rho_{e_1 \rightarrow \mathcal{C}_3, 3} = 0$, $z_C = \{3\}$, $|z_C| = 1$ 且 $\delta_{e_1} = 3$, 通过计算能控性矩阵 $\mathcal{Q}$, 有 $\text{rank}(\mathcal{Q}) = \delta_{e_1} = 3$.

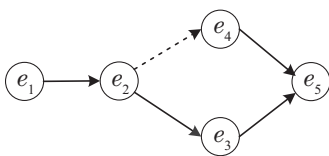


图2 有向符号边图 G_e . 实线和虚线分别表示正边与负边
Fig. 2 Signed edge graph G_e . The solid and the dashed lines represent the positive and negative edges, respectively

同理, 当选择 e_1 和 e_2 作为领导者时, 有 $\pi_D(e_2) = \{C_0, C_1, C_2\} = \{\{e_2\}, \{e_3, e_4\}, \{e_5\}\}$, $z_C = \{2\}$ 且 $\delta_{e_2} = 2$. 通过计算能控性矩阵 $\mathcal{Q}$, 可得 $\text{rank}(\mathcal{Q}) = \max\{\delta_{e_1}, \delta_{e_2}\} = 3$.

4.2 边能控子空间上界

令 $\pi = \{C_1, C_2, \dots, C_q\}$ 是边图 G_e 的一个划分, 定义

$$\beta_{ij} = \frac{\sum_{e_k \in C_i} \sum_{e_g \in C_j} \bar{a}_{kg}}{|C_i|}, \quad i, j \in \mathcal{I}_q,$$

β_{ij} 表示在划分 π 下 C_j 到 C_i 中的度. 用 $G_e/\pi = (\mathcal{V}_\pi, \mathcal{E}_\pi, \mathcal{B}_\pi)$ 表示边图 G_e 在划分 π 下的商图, 其中 $\mathcal{V}_\pi = \{C_1, C_2, \dots, C_q\}$ 表示商图 G_e/π 顶点集, $\mathcal{E}_\pi = \{(C_j, C_i) | \beta_{ij} \neq 0\}$ 表示商图 G_e/π 边集, $[\mathcal{B}_\pi]_{ij} = \beta_{ij}$ 表示商图 G_e/π 邻接矩阵第 i 行第 j 列的元素. 对于给定的划分 π 的特征矩阵定义为 $P_\pi = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times q}$, 若 $e_i \in C_j$, 则 $p_{ij} = 1$; 否则 $p_{ij} = 0$.

定义8 令 $\pi = \{C_1, C_2, \dots, C_q\}$ 是边图 G_e 的一个划分, 如果划分 π 下有如下等式成立:

$$\sum_{e_s \in C_i} \bar{a}_{ks} = \sum_{e_g \in C_i} \bar{a}_{tg}, \quad \forall e_k, e_t \in C_j, \quad (13)$$

则称 π 是一个等价划分 (equitable partition).

引理5 $\pi = \{C_1, C_2, \dots, C_q\}$ 是边图 G_e 的一个等价划分当且仅当 $A_e P_\pi = P_\pi \mathcal{B}_\pi$, 即 $\text{im}(P_\pi)$ 是 A_e 的不变子空间.

证 充分性: 不失一般性, 假设 $e_k \in C_j$. 如果 $A_e P_\pi = P_\pi \mathcal{B}_\pi$, 有

$$[A_e P_\pi]_{kj} = \sum_{r=1}^m [A_e]_{kr} [P_\pi]_{rj} = \sum_{r=1}^m \bar{a}_{kr} [P_\pi]_{rj} = \sum_{e_s \in C_j} \bar{a}_{ks}.$$

由于 $[P_\pi \mathcal{B}_\pi]_{k \cdot} = [\mathcal{B}_\pi]_{j \cdot}$, 那么对于 $e_t \in C_j$ 有

$$[A_e P_\pi]_{kj} = [A_e P_\pi]_{tj},$$

即

$$\sum_{e_s \in C_i} \bar{a}_{ks} = \sum_{e_g \in C_i} \bar{a}_{tg}, \quad e_k, e_t \in C_j.$$

因此 π 是一个等价划分.

必要性: 假设 π 是一个等价划分, 令 $e_k \in C_j$, 进而 $A_e P_\pi$ 的第 k 行可以表示为

$$[A_e P_\pi]_{k \cdot} = \left[\sum_{e_t \in C_1} \bar{a}_{kt} \quad \dots \quad \sum_{e_t \in C_{j-1}} \bar{a}_{kt} \quad \sum_{e_t \in C_j} \bar{a}_{kt} \quad \dots \quad \sum_{e_t \in C_q} \bar{a}_{kt} \right] = [\beta_{j1} \quad \dots \quad \beta_{j(j-1)} \quad \beta_{jj} \quad \dots \quad \beta_{jq}].$$

由特征矩阵 P_π 的定义可得, $P_\pi \mathcal{B}_\pi$ 的第 k 行可以表示为

$$[P_\pi \mathcal{B}_\pi]_{k \cdot} = [\mathcal{B}_\pi]_{j \cdot} =$$

$$[\beta_{j1} \cdots \beta_{j(j-1)} \beta_{jj} \cdots \beta_{jq}],$$

因此, $A_e P_\pi = P_\pi B_\pi$ 是成立的. 证毕.

定义 9 给定一个等价划分 π , 如果选取的每个领导者都单独在一个胞腔中, 则称 π 为领导者孤立的等价划分 (leader-isolated equitable partition, LEP), 简记为 π_{LEP} .

引理 6 假设 π_{LEP} 是边图 G_e 的一个领导者孤立的等价划分, 则系统 (5) 的能控性矩阵 Q 满足

$$\text{rank}(Q) \leq |\pi_{\text{LEP}}|. \quad (14)$$

证 令 $P_{\pi_{\text{LEP}}}$ 表示 π_{LEP} 的特征矩阵, 不难得到 $\text{im}(B) \subseteq \text{im}(P_{\pi_{\text{LEP}}})$. 进一步地, 结合式 (11) 可得

$$\begin{aligned} \text{im}(Q) &= \text{im}(\bar{Q}) = \\ \text{im}([B \ A_e B \ \cdots \ A_e^{m-1} B]) &= \\ \text{im}(B) + A_e \text{im}(B) + \cdots + A_e^{m-1} \text{im}(B) &\subseteq \\ \text{im}(P_{\pi_{\text{LEP}}}) + \cdots + A_e^{m-1} \text{im}(P_{\pi_{\text{LEP}}}) &= \\ \text{im}(P_{\pi_{\text{LEP}}}), \end{aligned}$$

这里运算符 “+” 表示两个空间的并. 证毕.

值得注意的是, 一个边图 G_e 的领导者孤立的等价划分可能不唯一. 假设 $\pi_{\text{LEP}1}, \pi_{\text{LEP}2}$ 是边图 G_e 的两个不同的领导者孤立的等价划分, 如果对于每一个在 $\pi_{\text{LEP}1}$ 的胞腔是 $\pi_{\text{LEP}2}$ 中一些胞腔的子集, 那么称 $\pi_{\text{LEP}1}$ 比 $\pi_{\text{LEP}2}$ 更好 (finer), 用 $\pi_{\text{LEP}1} \leq \pi_{\text{LEP}2}$ 来表示. 如果 $\pi_{\text{LEP}1} \leq \pi_{\text{LEP}2}$, 易得 $\text{im}(P_{\pi_{\text{LEP}2}}) \subseteq \text{im}(P_{\pi_{\text{LEP}1}})$. 因此在寻找能控子空间的上界时, 要求去找到一个最好的领导者孤立的等价划分, 简记为 π_{LEP}^* .

定理 3 假设 π_{LEP}^* 是边图 G_e 的最好领导者孤立的等价划分, 那么系统 (5) 的能控性矩阵 Q 满足

$$\text{rank}(Q) \leq |\pi_{\text{LEP}}^*|. \quad (15)$$

例 2 给定如图 3 中左图所示的边图 G_e . 假设 e_1 作为领导者, 可以得出 $\pi_{\text{LEP}}^* = \{\{e_1\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_5, e_6, e_7\}\}$. 通过计算易得 $A_e P_{\pi_{\text{LEP}}^*} = P_{\pi_{\text{LEP}}^*} B_{\pi_{\text{LEP}}^*}$. 进一步有 $\text{rank}(Q) = |\pi_{\text{LEP}}^*| = 3$ 成立.

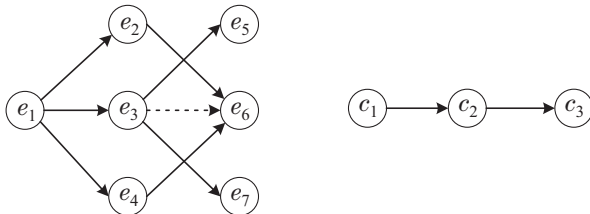


图 3 边图 G_e (左) 与其商图 G_e/π_{LEP}^* (右).

Fig. 3 Edge graph G_e (left) and quotient graph G_e/π_{LEP}^* (right). The solid line and the dashed lines represent the positive and negative edges, respectively

4.3 边能控性与顶点能控性

本节研究顶点能控性与边能控性之间的关系. 首

先引入顶点能控性模型. 考虑一个具有 n 个顶点 m 条边的顶点图 G_v , 假设前 p ($p < n$) 个顶点作为领导者集 $\mathcal{V}_l = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, 那么剩余的顶点集即为跟随者集 $\mathcal{V}_f = \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_l$. 令 $u(t)$ 表示对顶点施加的控制量, 每一个智能体服从以下的动态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_v^i(t) = \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} [x_v^j(t) - \text{sgn}(a_{ij}) x_v^i(t)] + u_i(t), & i \in \mathcal{V}_l, \\ \dot{x}_v^i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} [x_v^j(t) - \text{sgn}(a_{ij}) x_v^i(t)], & i \in \mathcal{V}_f, \end{cases}$$

其中: $x_v^i(t) \in \mathbb{R}$ 表示第 i 个智能体的状态, $u_i(t)$ 表示对智能体 i 施加外部的控制输入.

令 $x_v(t) = [x_v^1(t) \ x_v^2(t) \ \cdots \ x_v^n(t)]$, $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_p(t)]$. 整个多智能体系统的顶点动力学方程为

$$\dot{x}_v(t) = -L_v x_v(t) + \tilde{B} u(t), \quad (16)$$

其中: $L_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B} = [I_p \ 0]^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 表示控制输入矩阵.

考虑顶点图 G_v 中的一条边 $e_k = (v_j, v_i)$, 定义边 e_k 的状态为

$$x_k(t) = x_v^j(t) - a_{ij} x_v^i(t). \quad (17)$$

从式 (17) 得所有边的状态可以表达为 $x(t) = H^T x_v(t)$. 因此, 基于式 (17) 边系统模型可以描述为

$$\dot{x}(t) = -L_e x(t) + \bar{B} u(t), \quad (18)$$

其中 $\bar{B} = H^T \tilde{B} \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

注 5 系统 (16) 的控制输入是一个独立控制输入 (如图 4 中左图所示), 即 $\tilde{B} = [e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 其中 e_i 表示 I_n 的第 i 列; 系统 (18) 的控制输入为广播控制输入 (如图 4 中右图所示), 即 $\bar{B} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_p] \in \mathbb{R}^{m \times p}$, 其中 $b_k \in \{-1, 0, 1\}^m$, $k \in \mathcal{I}_p$.

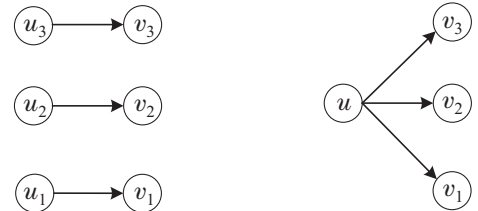


图 4 独立控制输入 (左) 和广播控制输入 (右)

Fig. 4 Independent control input (left) and broadcast control input (right)

定义如下 3 个矩阵:

$$\begin{aligned} Q_v &:= [\tilde{B} \ L_v \tilde{B} \ \cdots \ L_v^{n-1} \tilde{B}] \in \mathbb{R}^{n \times np}, \\ Q_e &:= [\bar{B} \ L_e \bar{B} \ \cdots \ L_e^{m-1} \bar{B}] \in \mathbb{R}^{m \times mp}, \\ Q' &:= [\tilde{B} \ L_v \tilde{B} \ \cdots \ L_v^{m-1} \tilde{B}] \in \mathbb{R}^{n \times mp}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中: Q_v 表示系统 (16) 的能控性矩阵; Q_e 表示系统 (18) 的能控性矩阵. 根据引理 3 不难得出 $Q_e = H^T Q'$.

定理4 假设一个具有 n 个顶点 m 条边的顶点图 G_v , 边状态服从式(17). 以下结果成立:

1) 如果 G_v 是结构平衡的, 则有 $\text{rank}(\mathcal{Q}_e) \leq \text{rank}(\mathcal{Q}_v)$.

2) 如果 G_v 是结构非平衡的, 则有 $\text{rank}(\mathcal{Q}_e) = \text{rank}(\mathcal{Q}_v)$.

证 显然, 对于一个领导者-跟随者连通的顶点图 G_v , 有 $m \geq n - 1$.

1) 顶点图 G_v 是结构平衡时, 由引理2可得

$$\text{rank}(H^T) = n - 1,$$

当 $m = n - 1$ 时, 有

$$\text{rank}(\mathcal{Q}') \leq \text{rank}(\mathcal{Q}_v)$$

成立; 当 $m > n - 1$ 时,

$$\text{rank}(\mathcal{Q}') = \text{rank}(\mathcal{Q}_v)$$

成立. 因此可得

$$\text{rank}(\mathcal{Q}_e) \leq \min\{\text{rank}(H^T), \text{rank}(\mathcal{Q}')\} = \min\{n - 1, \text{rank}(\mathcal{Q}')\} \leq \text{rank}(\mathcal{Q}') \leq \text{rank}(\mathcal{Q}_v).$$

2) 顶点图 G_v 是结构非平衡时, 由引理1可知 $m > n - 1$, $\text{rank}(\mathcal{Q}') = \text{rank}(\mathcal{Q}_v)$ 成立. 进一步, 由引理2可得 $\text{rank}(H^T) = n$. 因此 $\text{rank}(\mathcal{Q}_e) = \text{rank}(H^T \mathcal{Q}') = \text{rank}(\mathcal{Q}') = \text{rank}(\mathcal{Q}_v)$. 证毕.

例3 给定如图5(a)所示的结构平衡顶点图 G_{v1} . 假设 v_1 作为单独的领导者, 即 $\tilde{B} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. 根据式(17)得 $\bar{B} = [1 \ 0 \ 0]^T$. 通过计算可得 $\text{rank}(\mathcal{Q}_e) = \text{rank}(\mathcal{Q}_v) = 3$ 成立. 同理, 给定如图5(c)所示的结构非平衡顶点图 G_{v2} , 仍然假设 v_1 作为单独的领导者, 有 $\text{rank}(\mathcal{Q}_e) = \text{rank}(\mathcal{Q}_v) = 4$.

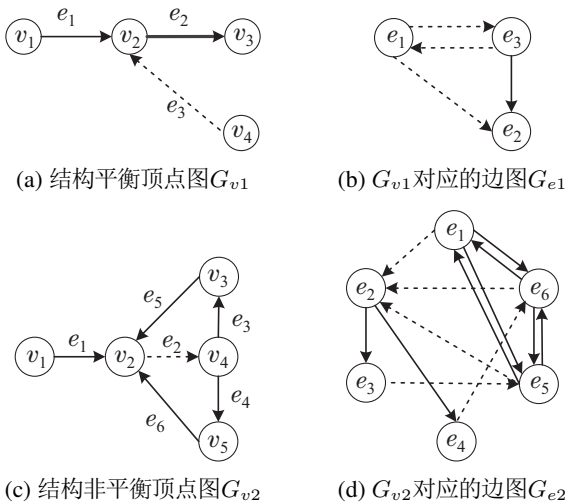


图5 数值例子. 实线和虚线分别表示正边与负边

Fig. 5 Numerical example. The solid and the dashed lines represent the positive and negative edges, respectively

推论1 假设顶点图 G_v 对应的系统(16)是能控

的, 则

1) 如果 G_v 是结构平衡的, 那么 $\text{rank}(\mathcal{Q}_e) = n - 1$.

2) 如果 G_v 是结构非平衡的, 那么 $\text{rank}(\mathcal{Q}_e) = n$.

例4 给定如图6(a)所示的结构平衡顶点图 G_{v1} . 假设 v_1 作为单独的领导者, 即 $\tilde{B} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. 根据式(17)得 $\bar{B} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. 通过计算可得 $\text{rank}(\mathcal{Q}_v) = 4$, $\text{rank}(\mathcal{Q}_e) = 3$. 同理, 给定如图6(c)所示的结构非平衡顶点图 G_{v2} , 仍然假设 v_1 作为单独的领导者, 有 $\text{rank}(\mathcal{Q}_e) = \text{rank}(\mathcal{Q}_v) = 4$.

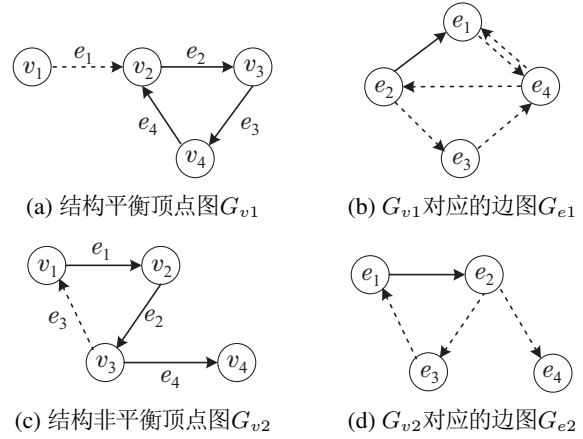


图6 数值例子. 实线和虚线分别表示正边与负边

Fig. 6 Numerical example. The solid and the dashed lines represent the positive and negative edges, respectively

5 仿真实例

为了验证本文所得到的理论结果, 考虑由4个智能体构成的顶点图 G_v , 如图7中左图所示. G_e 表示 G_v 对应的边图, 如图7中右图所示. 给出 G_e 的拉普拉斯矩阵

$$L_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

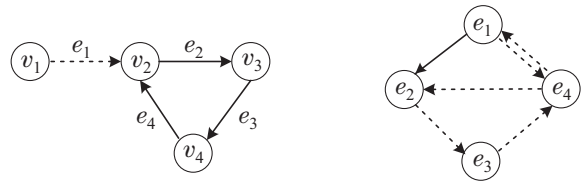


图7 有向符号顶点图 G_v (左)与其对应的边图 G_e (右).

实线和虚线分别表示正边与负边

Fig. 7 Directed signed vertex graph G_v (left) and its corresponding edge graph G_e (right). The solid and dashed lines represent the positive and negative edges, respectively

假设 e_4 作为领导者, 即 $B = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, 通过计算可得 $\text{rank}(\mathcal{Q}) = 4$, 表明系统(5)是能控的. 为了更加直观的理解, 给定边初始状态 $x(t_0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 边最终状态 $x(t_f) = [-5 \ 10 \ 10 \ 10]^T$, 在有限时间 $t_f =$

10内边状态的变化曲线如图8所示, 控制输入的变化曲线如图9所示.

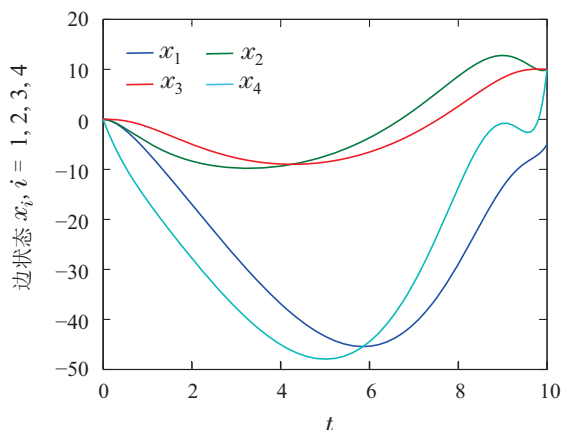


图8 边状态曲线

Fig. 8 Curves of edge state

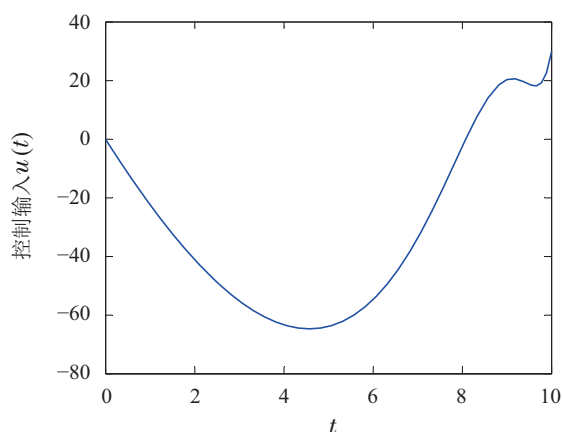


图9 控制输入曲线 $u(t)$

Fig. 9 Curve of control input $u(t)$

6 结论与展望

本文基于领导者-跟随者结构研究了有向符号网络下多智能体系统边能控性问题. 首先, 在符号网络下建立具有边动力学能控性模型, 通过分析边拉普拉斯矩阵得到边能控性的一些性质; 其次, 从图论的角度对边能控性子空间进行定量分析. 特别地, 基于距离划分给出了边能控子空间的下界以及基于等价划分给出了边能控子空间的上界, 并且得到的上下界具有紧性. 最后, 基于图的关联矩阵研究了顶点图能控性与对应边图能控性之间的关系, 得出当顶点图为结构非平衡时, 顶点图的能控性等价于对应边图的能控性. 本文考虑了固定拓扑结构的情形, 未来将进一步考虑动态拓扑结构下的边能控性. 此外, 文本考虑的边权取值范围是 $\{0, \pm 1\}$, 当系统的权重为任意取值时, 同样是一个值得研究的问题.

参考文献:

[1] TANNER H G. On the controllability of nearest neighbor interconnections. *Proceedings of the 43th IEEE Conference on Decision and*

Control. Paradise Island, the Bahamas: Springer, 2004, 3: 2467 – 2472.

- [2] LI A, CORNELIUS S P, LIU Y, et al. The fundamental advantages of temporal networks. *Science*, 2017, 358(6366): 1042 – 1046.
- [3] GUAN Y, LI A, WANG L. Structural controllability of directed signed networks. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021, DOI: 10.1109/TCNS.2021.3059836.
- [4] GUAN Yongqiang, JI Zhijian, ZHANG Lin, et al. Recent developments on controllability of multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(4): 421 – 431.
(关永强, 纪志坚, 张霖, 等. 多智能体系统能控性研究进展. 控制理论与应用, 2015, 32(4): 421 – 431.)
- [5] JI Z, WANG Z, LIN H, et al. Interconnection topologies for multi-agent coordination under leader-follower framework. *Automatica*, 2009, 45(12): 2857 – 2863.
- [6] CHEN Shiming, WANG Pei, LI Haiying, et al. Controllable containment control of multi-agent systems with strongly connected sub-graph. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(3): 401 – 407.
(陈世明, 王培, 李海英, 等. 带强连通分支的多智能体系统可控包含控制. 控制理论与应用, 2017, 34(3): 401 – 407.)
- [7] LIU S, JI Z, MA H. Jordan form-based algebraic conditions for controllability of multi-agent systems under directed graphs. *Complexity*, 2020, 7685460: 1 – 18.
- [8] FIORETTO F, DOVIER A, PONTELLI E. Distributed multi-agent optimization for smart grids and home automation. *Intelligenza Artificiale*, 2019, 12(2): 67 – 87.
- [9] DO K D. Formation control of underactuated ships with elliptical shape approximation and limited communication ranges. *Automatica*, 2012, 48(7): 1380 – 1388.
- [10] WANG Yintao, YAN Weisheng. Consensus formation tracking control of multiple autonomous underwater vehicle systems. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(3): 379 – 384.
(王银涛, 严卫生. 多自主水下航行器系统一致性编队跟踪控制. 控制理论与应用, 2013, 30(3): 379 – 384.)
- [11] KALMAN R E, HO Y C. Controllability of linear dynamical systems. *Contributions to Differential Equations*, 1963, 1(2): 189 – 213.
- [12] GU S, PASQUALETTI F, CIESLAK M, et al. Controllability of structural brain networks. *Nature Communications*, 2015, 6(1): 1 – 10.
- [13] LAFFERRERE G, WILLIAMS A, CAUGHMAN J, et al. Decentralized control of vehicle formations. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(9): 899 – 910.
- [14] DECKE K S, SYCARA K. Intelligent adaptive information agents. *Journal of Intelligent Information Systems*, 1997, 9(3): 239 – 260.
- [15] YAZICIOĞLU A Y, ABBAS W, EGERSTEDT M. Graph distances and controllability of networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(12): 4125 – 4130.
- [16] ZHANG S, CAO M, CAMLIBEL M K. Upper and lower bounds for controllable subspaces of networks of networks of diffusively coupled agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(3): 745 – 750.
- [17] RAHMANI A, JI M, MESBAHI M, et al. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 48(1): 162 – 186.
- [18] ZHANG Anhui, ZHANG Shijie, CHEN Jian, et al. Graph-theoretic characterization of controllability for multi-agent systems. *Control and Decision*, 2011, 26(11): 1621 – 1626, 1631.
(张安慧, 张世杰, 陈健, 等. 多智能体系统能控性的图论刻画. 控制与决策, 2011, 26(11): 1621 – 1626, 1631.)
- [19] HEIDER F. Attitudes and cognitive organization. *Journal of Psychology*, 1946, 21(1): 107 – 112.

- [20] GUHA R, KUMAR R, RAGHAVAN P, et al. Propagation of trust and distrust. *Proceedings of the 13th International Conference on World Wide Web*. New York, USA: ACM, 2004: 403 – 412.
- [21] PARISIEN C, ANDERSON C H, ELIASMITH C. Solving the problem of negative synaptic weights in cortical models. *Neural Computation*, 2008, 20(6): 1473 – 1494.
- [22] ALTAFINI C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(4): 935 – 946.
- [23] MENG D, DU M, JIA Y. Interval bipartite consensus of networked agents associated with signed digraphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(12): 3755 – 3770.
- [24] SUN C, HU G, XIE L. Controllability of multi-agent networks with antagonistic interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(10): 5457 – 5462.
- [25] GUAN Y, WANG L. Controllability of multi-agent systems with directed and weighted signed networks. *Systems & Control Letters*, 2018, 116: 47 – 55.
- [26] GRANDINETTI P, CANUDAS-DE-WIT C, GARIN F. Distributed optimal traffic lights design for large-scale urban networks. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, 27(3): 950 – 963.
- [27] PENTLAND A S. The new science of building great teams. *Harvard Business Review*, 2012, 90(4): 60 – 69.
- [28] DU M, MA B, MENG D. Edge convergence problems on signed networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(11): 4029 – 4041.
- [29] WANG X, SU H, CHEN M, et al. Reaching non-negative edge consensus of networked dynamical systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(9): 2712 – 2722.
- [30] NEPUSZ T, VICSEK T. Controlling edge dynamics in complex networks. *Nature Physics*, 2012, 8(7): 568 – 573.
- [31] BELARDO F, SIMIĆ S K. On the Laplacian coefficients of signed graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, 2015, 475: 94 – 113.

作者简介:

任世超 硕士研究生, 主要研究方向为多智能体系统能控性,

E-mail: screen0401@163.com;

关永强 副教授, 主要研究方向为多智能体系统分布式协同控制,

E-mail: guan-jq@163.com;

湛煜 硕士研究生, 主要研究方向为多智能体系统能控性, E-

mail: shenyu6111@163.com.