

基于IGD⁺指标的两阶段选择高维多目标进化算法

张 伟, 刘建昌[†], 刘圆超, 郑恬子, 杨婉婷

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘要: 针对在高维空间下多目标进化算法难以维持种群收敛性和多样性平衡的问题, 本文提出一个基于IGD⁺指标的两阶段选择高维多目标进化算法(MaOEA-ITS). 在第1阶段, 算法基于IGD⁺指标选择收敛性良好的精英个体, 其所需的参考点通过引入切割平面截距法构建. 在第2阶段, MaOEA-ITS使用模糊c均值算法对参考向量进行聚类, 聚类后的参考向量引导种群分解策略对剩余个体进行环境选择, 从而维持种群的多样性. 另外, 为了保护能够提高种群多样性的极值解, 本文提出一个参考点分布自适应策略. 最后, 通过仿真实验来验证MaOEA-ITS的有效性和优越性.

关键词: 高维多目标优化; IGD⁺指标; 两阶段选择策略; 参考点分布自适应策略; 种群分解策略; 进化算法

引用格式: 张伟, 刘建昌, 刘圆超, 等. 基于IGD⁺指标的两阶段选择高维多目标进化算法. 控制理论与应用, 2023, 40(5): 801–816

DOI: 10.7641/CTA.2021.10402

IGD⁺ indicator based many-objective evolutionary algorithm with two stage selection

ZHANG Wei, LIU Jian-chang[†], LIU Yuan-chao, ZHENG Tian-zi, YANG Wan-ting

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China)

Abstract: In order to solve the problem that the multi-objective evolutionary algorithm is difficult to balance between the population convergence and diversity in high-dimensional space, in this paper, an IGD⁺ indicator based many-objective evolutionary algorithm with two stage selection (MaOEA-ITS) is proposed. In the primary stage, the proposed algorithm adopts IGD⁺ indicator as selection criterion to select individuals with favourable convergence, and the reference points required are constructed by introducing the intercepts way of cutting plane. In the second stage, the MaOEA-ITS uses a fuzzy c-means algorithm to cluster reference vectors. Then, reference vectors clustered guide population partition strategy to select remaining individuals of population, thereby maintaining the population diversity. In addition, for protecting the extreme solutions that enables to improve population diversity, a reference point distribution based on the adaptive strategy is proposed. Finally, simulation experiments are used to verify the effectiveness and superiority of MaOEA-ITS.

Key words: many-objective optimization; IGD⁺ indicator; two-stage selection strategy; adaptive strategy of reference point distribution; population partition strategy; evolutionary algorithm

Citation: ZHANG Wei, LIU Jianchang, LIU Yuanchao, et al. IGD⁺ indicator based many-objective evolutionary algorithm with two stage selection. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(5): 801–816

1 引言

在经济、科研、生产等诸多领域中, 很多优化问题同时拥有多个相互冲突的目标函数, 这些问题被称为多目标优化问题(multi-objective optimization problems, MOPs)^[1]. 当MOPs的目标数超过3时, 这个问题被称为高维多目标优化问题(many-objective optimization problem, MaOPs)^[2–3]. 随着各种科学技术的发

展, MaOPs的实际应用需求日益突出, 如: 电能调度^[4]、供水系统最优设计^[5]、污水处理^[6]、基于搜索的推荐系统^[7]等. 因此, 研究MaOPs具有较高的理论研究价值和实际应用价值.

多目标进化算法(multi-objective evolutionary algorithm, MOEAs)通过模拟自然界生物的进化过程来解决MOPs. 在处理MOPs(两个或者3个目标)时,

收稿日期: 2021–05–15; 录用日期: 2021–12–23.

[†]通信作者. E-mail: liujianchang@ise.neu.edu.cn; Tel.: +86 13889297755.

本文责任编辑: 从爽.

国家自然科学基金项目(61773106)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61773106).

MOEAs(如NSGA-II(nondominated sorting genetic algorithm II)^[8], SPEA(strength Pareto evolutionary algorithm)^[9], R2-EMO(expensive multi-objective evolutionary algorithm based on R2 indicator)^[10]等)表现出良好的鲁棒性和通用性. 然而, 随着目标数的增加, MOEAs的性能显著下降. 其主要原因是: 随着目标数的增加导致选择压力缺失, 从而使MOEAs难以逼近真实的Pareto前沿(Pareto front, PF)^[11]. 为解决该问题, 研究者们从不同角度对高维多目标进化算法(many-objective evolutionary algorithm, MaOEA)进行探讨^[12-15], 大致可以分为以下4类: 基于修改支配的算法^[16-17]、基于提高多样性管理机制算法^[18-19]、基于分解的算法^[20-22]、基于指标的算法^[23-25]. 在上述算法中, 基于分解和基于指标的MaOEAs受到了学术界的高度关注, 其主要原因分别是: 基于分解的MaOEAs在高维空间下能较好的维持种群多样性^[26]; 基于指标的MaOEAs容易执行且针对不同的PF整体性能表现相对较好^[27].

基于分解的MaOEAs最显著的特点是算法需要引入参考向量. 该类算法能够较好的维持种群多样性, 其主要原因是参考向量可以通过与种群个体的关联操作将种群分解为一系列子种群来同时搜索不同的目标空间区域, 从而提高种群的多样性. Cheng等^[28]人提出的RVEA(reference vector guided evolutionary algorithm)是基于该思想的典型代表, 该算法利用种群个体与参考向量的最小空间夹角关系, 将种群分解为一系列子种群. 随后, 以协同进化的方式优化每个子种群. 近期, Bi等^[29]人提出NSGA-III-OSD(an improved NSGA-III based on objective space decomposition for many-objective optimization), 该算法对均匀分布的参考向量进行基于角度的K均值聚类, 得到均匀分布在目标空间的 m 个中心向量, 用于将目标空间划分为 m 个子空间, 每个子空间对应一个子种群, 用以求解对应部分的多目标子问题. 此外, 基于参考向量的此优势已被成功的用于解决大规模^[30]、高维昂贵^[31]等复杂优化问题.

基于指标的MaOEAs采用性能指标作为环境选择的衡量标准. 早期, Zitzler等^[32]人提出IBEA(indicator based selection in multi-objective search), 该算法首次使用性能指标选择精英个体, 为基于性能指标的MOEAs提供了一个通用的框架. Beume等^[24]人提出基于超体积(hyper volume, HV)指标的MOEA算法SME-EMOA(hypervolume metric selection based on evolutionary multi-objective optimisation algorithm), 实验结果表明, 该算法能很好的处理多目标优化问题, 但随着目标数的增加, 计算HV值的成本呈指数增加. 为了降低计算成本, Bader等^[33]人提出HyPE(an algorithm for fast hypervolume-based many-objective opti-

mization), 该算法使用Monte Carlo近似估计法来近似计算HV值, 这使得在高维空间下计算HV值的效率明显提高. Trautmann等^[34]人提出R2-EMOA(R2 indicator based evolutionary multi-objective optimisation algorithm), 该算法采用NSGA-II框架, 但与NSGA-II不同的是该算法采用R2指标来管理临界层. 基于R2指标的算法还有MOMBI-II(improved metaheuristic based on R2 indicator for many-objective optimization)^[35]等. 最近一些研究表明, 基于改进的反世代距离指标(inverse generational distance plus, IGD⁺)能够很好的平衡种群收敛性和多样性. Lopez等^[36]人提出IGD⁺-EMOA(a multi-objective evolutionary algorithm based on IGD⁺), 该算法将基于IGD⁺指标的选择机制转换为线性分配问题, 选择使IGD⁺指标值之和最小的一组解. 最近, Sun等^[37]人提出MaOEA-IGD(IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems), 该算法使用由IGD⁺指标和高效分配解等级的支配表构成的精英策略来选择收敛性和多样性都良好的精英个体. 实验结果表明, 这些基于IGD⁺的算法在解决MOPs和MaOPs时都表现出了良好的性能. 此外, IGD⁺指标的Pareto一致性和低计算复杂度的特性非常适合嵌入算法的环境选择过程.

为了进一步开发基于指标的MaOEAs的优势和更好的维持种群收敛性和多样性平衡, 本文提出一个基于IGD⁺指标的两阶段选择高维多目标进化算法(IGD⁺ indicator based many-objective evolutionary algorithm with two stage selection, MaOEA-ITS). MaOEA-ITS中的两阶段选择策略将基于指标的选择策略和参考向量引导的种群分解策略创新的融合, 用于平衡收敛性和多样性, 充分利用它们在收敛性和多样性的优势. 具体地, 在第1阶段, 算法基于IGD⁺指标进行选择, 以保证收敛性, 其计算IGD⁺指标所需的参考点通过提出的切割平面截距法来构建. 在第2阶段, 采用经模糊c均值算法聚类的参考向量引导的种群分解策略来选择多样性良好的精英个体. 此外, 利用种群个体和参考向量的空间距离关系, 提出一个参考点分布自适应策略来动态调整计算IGD⁺指标所需的参考点位置, 用以保存能够提高种群多样性的极值解. 通过仿真实验来验证所提算法维持种群收敛性和多样性平衡的能力.

本文其他部分的内容如下: 第2节介绍与本文相关的背景知识; 第3节详细阐述所提算法; 第4节设计对比实验来验证所提算法的优越性; 最后对本文进行总结.

2 背景知识

本节介绍多目标优化问题相关定义和IGD⁺指标.

2.1 多目标优化问题相关定义

多目标优化问题的数学描述如下:

$$\begin{aligned} \min F(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), \\ \text{s.t. } x &\in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是决策空间; $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ 是决策空间中的决策变量; $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 m 维相互冲突的目标函数, $\mathbb{R}^m$ 是目标空间; 当 $m > 3$ 时, 称其为高维多目标优化问题。

基于以上的数学定义, 多目标优化问题具有以下常见的基本定义:

定义 1 (Pareto 支配) 对于决策空间中的任意两个解 x, y (即 $x, y \in \Omega$), x 支配 y (记为 $x \prec y$), 当且仅当 x, y 满足

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, \dots, m, f_i(x) &\leq f_i(y) \wedge, \\ \exists j = 1, 2, \dots, m, f_j(x) &< f_j(y). \end{aligned} \quad (2)$$

定义 2 (Pareto 最优解) 在决策空间中, 一个解 x^* 不被任何其他解支配, 则称 x^* 为 Pareto 最优解, 即 $\neg x \in \Omega$ 使得 $x \prec x^*$ 。

定义 3 (Pareto 最优解集) Pareto 最优解的集合, 即

$$\text{PS} = \{x \in \Omega \mid \neg \exists y \in \Omega, x \succ y\}. \quad (3)$$

定义 4 (Pareto 前沿) Pareto 最优解集在目标空间中的映射, 即

$$\text{PF} = \{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in \text{PS}\}. \quad (4)$$

2.2 IGD⁺ 指标

IGD⁺ 指标是一种修改的反世代距离 (inverted generational distance, IGD^[37]) 指标^[37], 可以综合评价种群的收敛性和多样性。为了更好的理解 IGD⁺ 指标, 下面对 IGD 指标与 IGD⁺ 指标做对比分析。

IGD 的数学描述为

$$\text{IGD}(S, P^*) = \frac{\sum_{i=1}^{|P^*|} d(x, s)}{|P^*|}, \quad (5)$$

$$d(x, s) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (s_i - x_i)^2}, \quad (6)$$

其中: S 是算法运行得到的候选解集, P^* 是计算所需的参考点集, x 和 s 分别是 P^* 和 S 中的个体, $|P^*|$ 是参考点数目, s_i 是个体 s 的第 i 个目标值, x_i 是参考点 x 的第 i 个目标值, $d(x, s)$ 是从 $x \in P^*$ 到最近 $s \in S$ 的欧式距离。IGD 的物理意义为每个参考点到最近的候选解 s 的平均欧式距离。因此, IGD 值越低, 意味着候选解集和参考点集更为近似, 解集的综合性能越好。

图1给出了二维空间中计算 IGD 指标值的实例, $P^* = \{(0, 1), (10, 0)\}$ 为参考点集, $A = \{(5, 2)\}$ 和

$B = \{(6, 4), (10, 3)\}$ 是两组解集。根据 Pareto 支配的定义可知: 图1中解集 B 的每个个体都被解集 A 中的个体所支配。因此, 解集 A 优于解集 B 。根据式(5)–(6), 分别计算解集 A 和解集 B 的 IGD 指标值: $\text{IGD}(A) = 5.24$, $\text{IGD}(B) = 4.85$ 。

由 $A \prec B$ 且 $\text{IGD}(A) > \text{IGD}(B)$, 可知利用 IGD 指标评价解集与 Pareto 支配原则不一致。为使其具有 Pareto 一致性, Ishibuchi 等^[39] 人提出 IGD⁺ 指标, 该指标表示参考点到最近的候选解所支配区域的平均欧式距离, 其数学描述为

$$\text{IGD}^+(S, P^*) = \frac{\sum_{i=1}^{|P^*|} d'(x, s)}{|P^*|}, \quad (7)$$

$$d'(x, s) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \max(s_i - x_i, 0)^2}, \quad (8)$$

其中: $P^*, |P^*|, S, s_i, x_i$ 所表示的含义与 IGD 指标中的相同; $d'(x, s)$ 是从 $x \in P^*$ 到最近 $s \in S$ 所支配区域的欧式距离。它的物理意义为每个参考点到最近的候选解 s 所支配区域的平均欧式距离。同样以图1为例, 根据式(7)–(8), 分别计算解集 A 和解集 B 的 IGD⁺ 指标值: $\text{IGD}^+(A) = 3.55$, $\text{IGD}^+(B) = 4.85$ 。

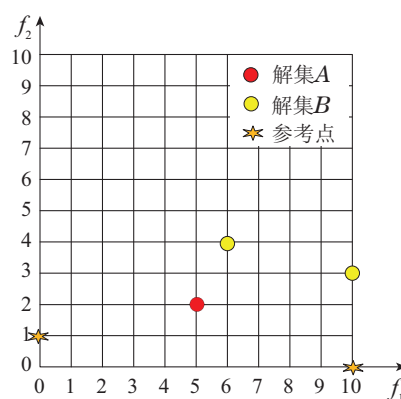


图1 二维空间中IGD指标计算

Fig. 1 The calculation of IGD indicator in 2-objective space

由 $A \prec B$ 且 $\text{IGD}^+(A) < \text{IGD}^+(B)$, 可知利用 IGD⁺ 指标评价解集与 Pareto 支配原则一致。因此, IGD⁺ 指标优于 IGD 指标。

3 MaOEA-ITS 算法

本节主要介绍 MaOEA-ITS 算法的具体实现, 包括算法的整体框架、参考点的构建、两阶段环境选择、基于 IGD⁺ 指标的第1阶段选择策略、基于参考向量引导的第2阶段选择策略与参考点分布自适应策略以及时间复杂度分析。

3.1 MaOEA-ITS 算法的整体框架

表1给出了 MaOEA-ITS 算法的整体框架。在初始化阶段, MaOEA-ITS 首先在决策空间产生数量为 N

的初始化种群 P_0 ; 然后采用Das和Dennis方法在目标空间生成 N 个均匀分布的参考点^[40]. 由于IGD⁺指标作为选择机制, 需要从真实PF采样 N 个均匀分布的参考点, 但是真实PF通常是未知的. 因此, 本算法引入切割平面截距法来构建计算IGD⁺指标所需参考点集. 在主循环中, 首先, 父代经模拟二进制交叉(simulated binary crossover, SBX)^[41]和多项式变异(polynomial mutation, PM)^[42]产生子代 Q_t 且将其与父代合并形成规模为 $2N$ 的混合种群; 然后, 通过两阶段环境选择策略从混合种群中选择 N 个精英个体进入下一代; 最后, 执行参考点分布自适应策略来动态的调整计算IGD⁺指标所需的参考点位置. 重复上述循环过程, 直到满足终止条件.

表 1 MaOEA-ITS算法的总体框架

Table 1 The general framework of MaOEA-ITS

输入: N (种群, 参考向量数目), $t_{\max}$ (最大进化代数)

输出: P_{t+1} (下一代种群)

```

1 /*初始化*/
2 Population: randomly produce  $P_0$ ; /*产生种群*/
3 Reference points: generate  $R$ ; /*产生均匀分布的参考点*/
4  $P_0^* = \text{Cutting-plane-intercepts-ways}(R, P_0)$ ; /*产生计算IGD+指标的参考点*/
5 /*主循环*/
6 while  $t < t_{\max}$  do
7    $Q_t = \text{Genetic-operation}(P_t)$ ;
8    $P_t = P_t \cup Q_t$ ;
9    $P_{t+1} = \text{Two-stage-selection}(P_t, P_t^*, R, N)$ ;
10   $P_{t+1}^* = \text{Adaptive-distribution-of-reference-points}(t, P_t^*, P_{t+1})$ ;
11   $t = t + 1$ ;
12 end while
13 Return  $P_{t+1}$ .

```

3.2 参考点的构建

本算法采用基于Das和Dennis的双层(边界层和内部层)方法来产生环境选择策略所需的参考点^[19,40], 参考点数目为

$$N = C_{H_1+m-1}^{m-1} + C_{H_2+m-1}^{m-1}, \quad (9)$$

其中: H_1 和 H_2 分别为边界层和内部层上每个目标方向的采样个数, m 为目标数. 以 $H_1 = 2$ 和 $H_2 = 1$ 的3目标($m = 3$)问题为例来阐述双层参考点在空间的分布, 如图2所示.

为了精确计算IGD⁺指标值, 本文提出切割平面截距法来构建计算IGD⁺指标值所需的参考点集, 其核心过程如下:

1) 计算初始化种群(P_0)的 m 个极值点, 即每维目标值最大的个体;

2) 根据 m 个极值点, 确定产生参考点的下界 z^{lu} ;

3) 根据确定的 m 个极值点, 构建 m 维切割平面;

4) 计算切割平面与所有坐标轴的截距;

5) 根据截距, 确定产生参考点的上界 z^{up} ;

6) 利用确定的上界和下界, 使用式(10)约束产生参考点的范围, 即

$$P_0^* \leftarrow r \times (z^{\text{up}} - z^{\text{lu}}) + z^{\text{lu}}, \quad r \in R. \quad (10)$$

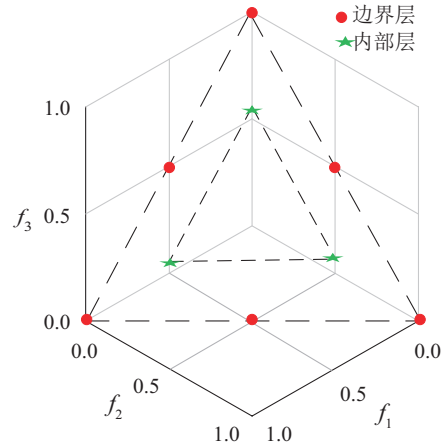


图 2 三维空间中双层参考点的分布

Fig. 2 Distribution of two-layer reference points in 3-objective space

3.3 两阶段选择过程

针对环境选择如何平衡种群收敛性和多样性的难题, 本文提出两阶段选择策略, 其流程如表2所示. 在进行环境选择之前, 采用NSGA-III^[19]中的归一化策略对混合种群的目标值进行归一化处理, 其目的是维持种群多样性.

经混合种群的目标值归一化处理后, 进入两阶段环境选择过程. 在第1阶段, 算法基于IGD⁺指标选择精英个体. 此时, IGD⁺指标虽然可以综合评价种群的收敛性和多样性, 但在求解MaOPs时, 仅采用IGD⁺指标更侧重于收敛性. 因此, 第1阶段仅选择收敛性良好的精英个体, 其详细过程见表3. 在第2阶段, 算法采用经模糊c均值算法聚类的参考向量引导的种群分解策略, 用于从第1阶段淘汰的个体中选择多样性良好的精英个体, 其选择标准是角度惩罚距离(angle penalized distance, APD)^[28], 即

$$\text{APD}_{t,i,j} = (1 + m \times (\frac{t}{t_{\max}})^{\alpha} \times \frac{\theta_{i,j}}{\theta_{r,j}}) \times \|f'_{t,i}(p)\|, \quad (11)$$

其中: m 为目标数; $\|f'_{t,i}(p)\|$ 为 $f'_{t,i}(p)$ 到理想点的距离, 评价解的收敛性; t 和 $t_{\max}$ 分别指的是当前代数和提前指定的最大循环代数; α 为提前指定的平衡收敛性和多样性的常数; $\theta_{r,j}$ 为一个参考向量和其他参考向量的最小夹角; $\theta_{i,j}$ 为个体与所关联参考向量的夹角.

表2 两阶段选择
Table 2 Two-stage selection

输入: P_t (合并种群), R (参考点), P_t^* (计算IGD⁺指标所需参考点)
输出: P_{t+1} (下一代种群)

```

1 /*种群的目标值的归一化处理*/
2 for  $i=1$  to  $m$  do
3    $Z_i^* = \min_{p \in |P_t|} f_{t,i}(p)$ ;
4    $Z_i^{\text{nad}} \leftarrow \max_{p \in |P_t|} f_{t,i}(p)$ ;
5    $f'_{t,i}(p) \leftarrow \frac{f_{t,i}(p) - z_i^*}{Z_i^{\text{nad}} - z_i^*}$ ;
6 end for
7 /*基于IGD+指标的第1阶段选择策略*/
8  $P_t^{\text{IGD}^+} = \text{IGD}^+ - \text{selection}(P_t, P_t^*, z_i^*)$ ;
9 if  $|P_t^{\text{IGD}^+}| = N$  then
10    $P_{t+1} = P_t^{\text{IGD}^+}$ ;
11 else
12   /*基于参考向量引导的第2阶段选择策略*/
13    $k = N - |P_t^{\text{IGD}^+}|$ ;
14    $P_t' \leftarrow P_t' / P_t^{\text{IGD}^+}$ ;
15    $R' = \text{Fuzzy-C-means (FCM)}(R, k)$ ; /*模糊c均值算法聚类参考向量*/
16    $P_t^{\text{RV}} = \text{Population-partition-guided-by-reference-vectors}(R_t', R', k)$ ; /*参考向量引导的种群分解策略*/
17    $P_{t+1} = P_t^{\text{IGD}^+} \cup P_t^{\text{RV}}$ ;
18 end if
19 Return  $P_{t+1}$ .
```

3.4 基于IGD⁺指标的第1阶段选择策略

基于IGD⁺指标的第1阶段选择过程如表3所示. 算法中的步骤2到步骤4是利用等式(7)–(8)来计算第 i 个参考点与所有种群(P_t)中的个体的IGD⁺指标值; 步骤5将使第 i 个参考点的IGD⁺指标值最小的个体与该参考点进行关联操作; 步骤6到步骤14统计该参考点所关联的个体的数目来完成第1阶段的选择任务. 选择标准是: 当仅有一个个体使第 i 个参考点的IGD⁺指标值最小时, 选择该个体进入下一代; 当有多个个体使第 i 个参考点的IGD⁺指标值最小时, 选择到该参考向量垂直距离最短的个体进入下一代, 其参考向量由该参考点和理想点构成. 为了避免选入重复解, 步骤15删除重复解.

3.5 基于参考向量引导的第2阶段选择策略

保证种群收敛性和多样性平衡对解决MaOPs是至关重要的. MaOEA-ITS的第1阶段选择策略已将收敛性好的个体选入下一代. 因此, 要求第2阶段选择能够较好的维持多样性. 受文献[28]启发, 第2阶段环境选择引入参考向量引导的种群分解策略来管理多样性, 具体过程如表4所示. 首先, 采用模糊c均值聚类算法对参考向量 R 进行聚类; 经聚类参考向量后, 以每个

类簇的中心作为新的参考向量来引导种群分解策略完成第2阶段选择任务. 具体地, 利用个体与参考向量的最小夹角关系完成个体与最近参考向量的关联操作, 进一步把IGD⁺指标选择策略淘汰的个体所形成的种群分解为一系列的子种群($P_t^1, P_t^2, \dots, P_t^V$). 经种群分解后, 计算各子种群内个体的APD值且选择APD值最小的个体进入下一代.

表3 基于IGD⁺指标的第1阶段选择策略
Table 3 IGD⁺ indicator based first-stage selection strategy

输入: P_t (合并种群), P_t^* (计算IGD⁺所需参考点)
输出: $P_t^{\text{IGD}^+}$ (IGD⁺指标选择的解)

```

1 for  $i = 1$  to  $\|P_t^*\|$  do
2   for  $j = 1$  to  $\|P_t\|$  do
3      $\text{IGD}_{i,j}^+ = \text{Calculate-IGD}^+(P_t, P_t^*)$ ;
4   end for
5    $c = \underset{j \in \{1, \dots, |P_t|\}}{\text{argmin}} \text{IGD}_{i,j}^+$ ;
6   if  $|c| == 1$  then
7      $S_i = c$ ;
8   else if  $|c| > 1$  then
9     for  $n = 1$  to  $|c|$  do
10       $d_n = \text{Vertical-distance}(P_t^*, P_{t,c(n)})$ ; /*计算个体到关联参考向量的垂直距离*/
11       $S_i = c(d)$ ;
12    end for
13  end if
14 end for
15  $S \leftarrow \text{delete the same index}$ ;
16  $P_t^{\text{IGD}^+} = P_t'(S)$ ;
17 Return  $P_t^{\text{IGD}^+}$ .
```

3.6 参考点分布自适应策略

研究表明, 保存位于边界区域的极值解有利于提高种群的多样性^[43–44], 边界区域的极值解如图3所示. 在MaOEA-ITS中, 为了保存极值解, 根据每个个体到其最近参考向量(由理想点 z^* 和参考点 P_t^* 构成)的垂直距离来自适应的调整计算IGD⁺指标所需的参考点分布, 具体过程如表5所示. 首先, 根据每个个体到参考向量的垂直距离关系, 将每个个体与最近的参考向量关联起来, 间接的获得每个个体到关联参考向量的垂线段与关联参考向量的交点; 随后, 将个体所关联的参考点转移到对应交点处, 以实现调整参考点分布.

3.7 时间复杂度分析

MaOEA-ITS的时间复杂度主要取决于它的两阶段环境选择和参考点分布自适应策略. 对于两阶段环境选择的计算开销包括以下3方面: 1) 将规模为 $2N$ 的种群归一化需要 $O(mN)$ 的计算开销; 2) 完成基于IGD⁺指标的第1阶段选择需要 $O(mN^2)$ 的计算开销;

3) 在最坏情况下, 完成参考向量引导的第2阶段选择需要的时间开销为 $O(mN^2)$. 对于参考点分布自适应策略而言, 它的时间复杂度为 $O(mN/(f_r \times t_{\max}))$, 其 f_r 和 $t_{\max}$ 分别表示执行该策略的频率和最大迭代代数. 综上可知, 在最坏情况下, MaOEA-ITS迭代一次的时间复杂度为 $O(mN^2)$.

表4 基于参考向量引导的第2阶段选择策略

Table 4 Reference vector guided second-stage selection strategy

输入: P'_t (IGD⁺指标选择策略淘汰的个体), R (参考点), k (聚类数目)
 输出: P_t^{RV} (种群分解策略选择的解)
 1 利用Fuzzy c-means算法对参考向量进行聚类, $R' \leftarrow \text{Clustering}(R, k)$;
 2 **for** $i = 1$ to $|P'_t|$ **do**
 3 **for** $j = 1$ to $|R'|$ **do**
 4 $\omega_{t,i,j} \leftarrow \arg \cos \frac{f'_{t,i}(p) \cdot R'_j}{\|f'_{t,i}(p)\|}, \forall p \in P'_t$; /*计算个体与向量夹角*/
 5 **end for**
 6 **end for**
 7 **for** $i = 1$ to $|P'_t|$ **do**
 8 $c = \arg \min_j \omega_{t,i,j}, j \in \{1, \dots, |R'|\}$;
 9 $S_{t,c} = S_{t,c} \cup \{P'_{ti}\}$;
 10 **end for**
 11 /*每个子种群进行基于APD的选择*/
 12 **for** $j = 1$ to $|P'_t|$ **do**
 13 **for** $i = 1$ to $|S_t|$ **do**
 14 根据式(11)计算种群个体的APD值;
 15 **end for**
 16 **end for**
 17 **for** $i = 1$ to $|R'|$ **do**
 18 $s = \arg \min \text{APD}_{t,i,j}, j \in \{1, \dots, |P'_t|\}$;
 19 $P_t^{RV} \leftarrow P_t^{RV} \cup P'_{t,s}$;
 20 **end for**.

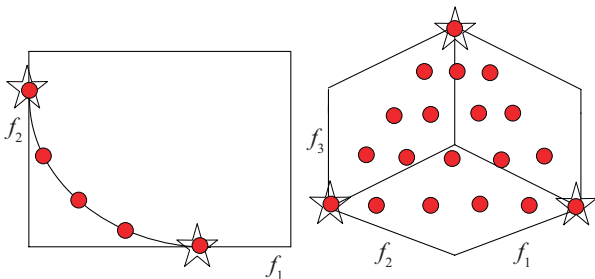


图3 二维和三维空间中不同帕累托前沿的极值解(五角星)

Fig. 3 Extreme solutions (white stars) of different PFs in 2-objective and 3-objective space

4 仿真实验及结果分析

本节通过对比仿真实验来验证 MaOEA-ITS 求解高维多目标优化问题的综合性能. 首先, 给出

DTLZ^[45]和WFG^[46]系列测试问题的参数设置、评价算法质量的性能指标和实验设置; 然后, 进入实验环节. 实验环节包括以下3部分内容:

1) 将 MaOEA-ITS 与 RVEA^[28], VaEA^[44], MOEAD-M2M^[47], MaOEA-IGD^[37], MOMBI-II^[35]具有代表性的高维多目标进化算法在DTLZ和WFG系列基准测试问题上进行对比实验;

2) 为了分析MaOEA-ITS核心策略中的每一部分策略的有效性, 本文对其变体进行比较研究;

3) 分析MaOEA-ITS的参数 α (平衡收敛性和多样性的常数)和 f_r (控制更新参考点的频率)对算法的影响.

表5 参考点分布自适应策略

Table 5 Adaptive strategy of reference point distribution

输入: P_{t+1} (种群), P_t^* (当前计算IGD⁺指标所需的参考点), t (当前代数)
 输出: P_{t+1}^* (计算IGD⁺指标所需的参考点)
 1 **if** $\text{mod}(t, f_r \times t_{\max}) = 0$ **then**
 2 计算当前种群(P_{t+1})的理想值 z^* ;
 3 **for each** reference points $p^* (p^* \in P_t^*)$ **do**
 4 **for each** solution $p (p \in P_{t+1})$ **do**
 5 $d(p, r) = \|f(p)\| \sin(z^* \times p^*, f(p))$;
 6 **end for**
 7 $p \leftarrow \arg \min d(p, p^*)$;
 8 /*获得新的参考点*/
 9 $p_i^{*'} = p_i^* / \|p^*\| \cdot \|f(p)\| \cos(z^* \times p^*, f(p))$;
 10 $\forall i \in \{1, \dots, m\}$;
 11 $P_{t+1}^* = P_{t+1}^* \cup p^{*'}$;
 12 **end for**
 13 Return: new reference points (P_{t+1}^*);
 14 **else**
 15 $P_{t+1}^* = P_t^*$;
 16 **end if**.

4.1 测试问题以及性能指标

本文选取DTLZ和WFG测试问题集来验证所提算法的性能. 在实验中, 目标数(m)为3, 5, 8, 10, 15. 在DTLZ中, 决策变量的大小由 $D = m + k - 1$ 决定, 其中DTLZ1, DTLZ2-6, DTLZ7的 k 分别取5, 10, 20. 在WFG中, 决策变量数设置为 $D = k + l$, 其中 $k = 2 \times (m - 1)$ 为位置相关变量, $l = 20$ 表示距离相关变量.

为了评价算法的综合性能, 本文选用反世代距离指标IGD和超体积指标HV来评价算法的性能.

HV指标值的计算公式为

$$\text{HV}(S) = \text{VOL}(\cup_{x \in S} [f_1(x), z_1^r] \times \dots \times [f_m(x), z_m^r]), \quad (12)$$

其中: $VOL(\cdot)$ 表示Lebesgue评估, $z = \{z_1^r, \dots, z_m^r\}$ 表示提前指定的参考点, S 表示算法运行得到的近似解集. 当目标数小于5时, 采用 $z = \{1.1, 1.1, \dots, 1.1\}$ 来计算HV指标值. 当目标数大于等于5时, Monte Carlo评估方法采用1000000个采样点来近似计算HV指标值^[33]. 由定义可知, HV值越大, 算法性能越好.

4.2 实验设置

本文的详细实验设置如下所示:

- 1) 种群大小设置: 所有算法的种群大小设置见表6.

表6 种群大小设置

Table 6 Population size setting

目标数/ m	H_1, H_2	种群规模/ N
3	(12, 0)	91
5	(6, 0)	210
8	(3, 2)	156
10	(3, 2)	275
15	(2, 1)	135

- 2) 交叉变异参数设置: 本文涉及的所有算法都采用SBX^[41]和PM^[42]来产生子种群, 交叉和变异概率分别设置为1和1/ D , D 为决策变量的个数, 相应的分布指数为30和20.

- 3) 对比算法参数设置: 对于MaOEA-ITS和RVEA, 它们有相同的参数 α 和 f_r , 分别用来权衡算法的收敛性和多样性以及控制更新参考点的频率, 设置为 $\alpha = 2$, $f_r = 0.1$. 对比算法的参数与原文保持一致.

- 4) 统计方法: 所有的算法在每个测试问题上独立的运行30次, 运行得到的实验结果使用置信度 $\alpha = 0.05$ 的Wilcoxon秩和检验方法进行统计. 为了使统计结果更加直观, 使用+, $\approx$, -分别来表示MaOEA-ITS算法优于对比算法, MaOEA-ITS算法与对比算法没有显著差异, MaOEA-ITS算法劣于对比算法.

- 5) 终止条件: 所有算法运行一次结束的条件是提前指定的最大迭代代数. 对每个测试问题, 不同目标数上的最大迭代代数不同. 3目标和5目标的最大迭代代数设置为1000, 在8目标和10目标上分别设置为1200和1500, 而在15目标上设置为1800.

4.3 算法在DTLZ测试问题上对比分析

表7和表8给出了所有算法在DTLZ测试问题上获得的IGD和HV值的平均值和标准差且最好的结果以加粗显示. 从统计结果可看出: MaOEA-ITS在大多数DTLZ测试问题上表现优异, 尤其在多维空间中. 说明该算法所采取的策略可以使种群收敛且均匀分布于真实PF. 下面将详细分析所有算法在每个DTLZ测试问题上的性能.

DTLZ1和DTLZ3有较多的局部PF, 求解此类问题

的难点在于如何跳出局部PF. 从表8和9可看出: 这两问题的最优性能由MaOEA-ITS和RVEA获得, 可能是因为基于参考向量的选择策略可以协助种群跳出局部PF, 从而增强算法求解该类MaOPs的能力; 在主要挑战算法维持种群多样性能力的DTLZ2和DTLZ4上, MaOEA-ITS大多数目标上获得最优结果, 原因是参考向量引导的种群分解策略和参考点自适应分布策略可以有效地维持种群多样性.

DTLZ5-DTLZ7是不规则PF测试问题, 但在决策空间中它们有不同的特性. DTLZ5和DTLZ6有相同的凹状PF和退化特性. 由统计结果可知, MaOEA-ITS在5, 8, 10, 15目标上表现优越, 其得益于由两阶段选择策略和参考点分布自适应策略所组成的融合机制. 在不连续PF的DTLZ7上, MaOEA-ITS获得了一般的性能.

4.4 算法在WFG测试问题上对比分析

表9汇总了所有算法在WFG测试问题上获得的HV的平均值和标准差且突出显示最好的结果. 在所有测试问题中, MaOEA-ITS获得了29个最优结果, 其远高于5个对比算法获得最优结果的个数, 说明所提算法有能力平衡种群收敛性和多样性. 下面将详细分析所有算法在每个WFG测试问题上的性能表现.

WFG1是测试算法处理带有凸状、偏见的和混合PF问题的能力. 由表9可知, MaOEA-ITS明显优于RVEA, VaEA, MaOEA-IGD和MOEA-D-M2M, 但略劣于MOMBI-II, 说明采取的融合机制可增强算法求解MaOPs的能力. WFG2具有不连续、凸状的和多模态特性的PF. MaOEA-ITS优于所有对比算法, 说明所提算法在保证综合性能的同时也可以更好地增强算法的收敛能力. WFG3是一个困难的测试问题, 具有线性、退化的PF. MaOEA-ITS优于大多数对比算法, 归因于所采取的融合机制可以有效地平衡种群收敛性和多样性. 然而, 所有算法不能解决15目标该问题.

WFG4到WFG9都具有凹状PF, 但在决策空间中它们有不同的特性. WFG4和WFG6分别被设计带有欺骗、多模的PF和决策变量不可分离、多模的PF. 它们有共同的属性都是多模PF测试问题, 主要挑战算法收敛于真实PF的能力. MaOEA-ITS在这两类问题上获得了最优性能, 说明所提算法具有较强的收敛能力. 对具有欺骗性特性的WFG5而言, MaOEA-ITS优于大多数对比算法, 但在3, 5和10目标上与RVEA无明显区别. 相对于其他WFG测试问题, WFG7-WFG9引入不同的偏好特性. 因此, 增加了算法维持种群多样性的困难. 对WFG7而言, MaOEA-ITS总体上获得良好性能, 但仅在3和10目标上获得最优结果. 对决策变量不可分离特性的WFG8而言, MaOEA-ITS优于除RVEA和VaEA的所有对比算法. WFG9具有多模态、

欺骗和决策变量不可分离特性的. MaOEA-ITS在3, 8和15目标上获得了最优结果, 其他最优结果由RVEA获得. 图4展示了各算法在15目标的WFG9上获得的近似Pareto前沿分布图. 虽然各个算法都能收敛于真实PF, 但它们的多样性存在很大差异. MaOEA-IGD

和MOMBI-II展现了较差的多样性. 然而, MaOEA-ITS获得了与RVEA相似但优于VaEA和MOEAD-M2M的PF. 由此可见, 参考向量引导的种群分解策略和参考点分布自适应策略能够较好地维持种群多样性.

表7 6个对比算法在不同目标维数的DTLZ测试问题上获得的IGD均值和标准差

Table 7 IGD mean and standard deviations obtained by each algorithms on the DTLZ test suite

测试问题 m	MaOEA-ITS	RVEA	VaEA	MaOEA-IGD	MOEAD-M2M	MOMBI-II
DTLZ1	3 0.0190(7.42e-5)	0.0207(1.14e-4)+	0.0279(7.10e-3)+	0.7625(5.381e-1)+	0.6323(5.36e-1)+	0.0209(1.97e-4)+
	5 0.0614(2.04e-2)	0.0527(3.10e-5)-	0.1049(2.97e-2)+	0.2090(2.37e-1)+	2.0746(1.34e-0)+	0.0529(1.70e-4)-
	8 0.1235(1.47e-2)	0.0970(1.67e-4)-	0.2200(6.57e-2)+	0.4472(3.84e-1)+	2.4012(1.66e-0)+	0.2064(4.71e-2)+
	10 0.1039(3.70e-3)	0.1081(3.84e-4)+	0.3052(1.37e-1)+	0.1893(2.50e-1)+	0.1893(2.50e-1)+	0.2346(2.92e-2)+
	15 0.1397(3.60e-3)	0.1743(5.30e-3)+	0.2878(1.85e-1)+	0.5079(5.06e-1)+	17.528(5.53e-0)+	0.2785(1.68e-2)+
DTLZ2	3 0.0500(6.03e-4)	0.0546(1.84e-4)+	0.0579(6.98e-4)+	0.1714(5.61e-4)+	0.1395(5.90e-3)+	0.0551(3.18e-4)+
	5 0.1650(1.05e-4)	0.1652(2.21e-5)≈	0.1681(1.20e-3)+	0.1690(7.59e-4)+	0.4413(8.40e-3)+	0.1674(1.40e-3)+
	8 0.3093(2.20e-3)	0.3155(4.07e-4)≈	0.3630(2.00e-3)+	0.3453(9.40e-3)+	0.8142(9.10e-3)+	0.3282(1.40e3)+
	10 0.4287(3.80e-3)	0.4208(3.81e-4)≈	0.4239(4.20e-3)≈	0.4354(3.10e-3+)	0.8182(8.80e-3)+	0.4414(1.93e-2)+
	15 0.6267(1.10e-3)	0.6275(8.60e-3)≈	12.2663(4.61e-0)+	5.2975(4.11e-0)+	211.2782(3.71e+1)+	0.8657(8.23e-2)+
DTLZ3	3 0.0451(1.50e-3)	0.0547(4.90e-4)+	0.0582(1.90e-3)+	17.2454(6.65e-0)+	71.4122(18.44e-0)+	0.0549(2.90e-4)+
	5 0.0796(5.35e-2)	0.1652(6.01e-5)+	0.3378(1.606e-1)+	10.461(3.97e-0)+	49.7211(16.28e-0)+	0.1660(6.81e-4)+
	8 0.576(2.36e-2)	0.3162(1.00e-3)-	3.3436(21.30e-0)+	3.3621(4043e-0)+	14.1086(55.72e-0)+	0.1551(6.82e-1)-
	10 0.5626(1.53e-2)	0.4203(4.65e-4)-	21.3040(6.56e-0)+	4.4331(2.22e-0)+	55.7195(1.85e+1)+	0.6816(1.54e-1)+
	15 0.6243(3.30e-3)	0.6291(1.05e-2)+	12.2663(4.61e-0)+	5.2975(4.11e-0)+	11.2782(3.71e-0)+	1.0678(2.96e-2)+
DTLZ4	3 0.0532(1.60e-3)	0.0545(2.41e-6)+	0.1206(1.68e-1)+	0.5167(9.57e-2)+	0.1201(1.13e-2)+	0.0715(8.88e-2)+
	5 0.1650(1.21e-4)	0.1651(8.50e-6)≈	0.1705(1.20e-3)+	0.1842(6.08e-2)+	0.4385(3.00e-2)+	0.1662(9.24e-4)+
	8 0.3097(2.30e-3)	0.3189(2.05e-2)≈	0.3642(3.20e-3)+	0.3728(7.83e-2)+	0.7830(3.08e-2)+	0.3556(3.81e-2)+
	10 0.4316(4.50e-3)	0.4314(3.33e-4)≈	0.4351(7.80e-3)+	0.4428(1.49e-2)+	0.8648(2.24e-2)+	0.4602(1.77e-2)+
	15 0.6193(7.60e-3)	0.6294(3.20e-3)+	0.5931(3.00e-3)-	0.6453(1.76e-2)+	1.7618(2.74e-1)+	0.6595(1.72e-2)+
DTLZ5	3 0.0204(4.50e-3)	0.0651(2.40e-3)+	0.0055(2.42e-4)-	0.5573(1.90e-1)+	0.0344(4.70e-3)+	0.0251(3.79e-5)+
	5 0.0326(8.70e-3)	0.1959(1.56e-2)+	0.1162(2.21e-2)+	0.3846(1.71e-1)+	0.1752(2.25e-2)+	0.2611(2.90e-2)+
	8 0.0794(1.08e-2)	0.3366(2.39e-2)+	0.3097(8.32e-2)+	0.5689(1.84e-1)+	0.3243(1.06e-1)+	0.2708(1.66e-1)+
	10 0.0663(1.72e-2)	0.3208(5.87e-2)+	0.4035(1.14e-1)+	0.2005(6.36e-1)+	0.0680(1.06e-0)+	0.1004(7.19e-1)+
	15 0.1101(3.47e-2)	0.3409(1.60e-1)+	0.5883(1.41e-1)+	0.6357(1.74e-1)+	1.0593(3.80e-1)+	0.7188(2.68e-2)+
DTLZ6	3 0.0193(1.90e-3)	0.1008(2.07e-2)+	0.0500(2.00e-3)+	0.6683(4.94e-1)+	0.8488(5.51e-1)+	0.0251(2.21e-6)+
	5 0.0471(1.28e-2)	0.1107(1.84e-2)+	0.2587(5.57e-2)+	0.5763(1.27e-2)+	0.2429(1.62e-1)+	0.3143(2.89e-5)+
	8 0.0740(2.62e-2)	0.2725(5.46e-2)+	1.6382(8.95e-1)+	0.6891(7.67e-2)+	0.1975(1.83e-1)+	0.5411(1.44e-1)+
	10 0.0905(2.58e-2)	0.3099(7.49e-2)+	2.7585(7.07e-1)+	0.6763(9.76e-2)+	0.8905(7.99e-1)+	0.6355(9.27e-2)+
	15 0.0915(2046e-2)	0.2001(3.54e-2)+	0.8144(5.30e-1)+	0.7225(2.30e-2)+	6.4115(2.59e-0)+	0.6865(4.37e-2)+
DTLZ7	3 0.2063(1.16e-1)	0.1059(1.20e-3)-	0.0834(7.26e-2)-	1.2431(5.36e-1)+	0.6863(9.49e-2)+	0.1381(1.42e-1)-
	5 0.9889(1.78e-1)	0.5023(5.00e-3)-	0.2714(5.00e-3)-	0.6741(5.30e-3)-	0.8118(3.32e-2)-	0.3971(6.03e-2)-
	8 1.1228(2.65e-1)	1.8965(1.29e-1)+	0.7050(1.17e-2)-	1.2461(3.62e-2)+	2.2659(6.61e-1)+	3.2355(7.69e-1)+
	10 2.0204(5.30e-1)	2.6731(2.14e-1)+	1.0233(2.14e-2)-	1.4645(4.98e-2)-	2.3785(4.97e-1)+	4.5248(8.26e-1)+
	15 3.1845(1.40e-0)	2.4998(3.02e-1)+	2.4388(1.85e-1)-	2.7149(1.66e-1)-	25.1800(14.86e-0)+	10.8747(6.65e-1)+
+/-/≈		22/7/6	27/1/7	32/0/3	34/0/1	31/0/4

注: “+”表示此算法劣于所提算法, “-”表示此算法优于所提算法, “≈”表示与所提算法性能相近.

表8 6个对比算法在不同目标维数的DTLZ测试问题上获得的HV均值和标准差

Table 8 HV mean and standard deviations obtained by each algorithms on the DTLZ test suite

测试问题	<i>m</i>	MaOEA-ITS	RVEA	VaEA	MaOEA-IGD	MOEAD-M2M	MOMBI-II
DTLZ1	3	0.8443(1.82e-4)	0.8404(9.82e-4)+	0.8205(1.70e-2)+	0.0821(1.40e-1)+	0.2261(2.98e-1)+	0.8397(1.40e-3)+
	5	0.9801(9.68e-5)	0.9798(1.45e-4)+	0.9061(4.38e-2)+	0.0000(0.00e-0)+	0.0242(8.21e-2)+	0.9796(2.17e-4)+
	8	0.9902(7.20e-3)	0.9976(6.71e-5)≈	0.8462(1.96e-1)+	0.4554(3.94e-1)+	0.0197(6.41e-2)+	0.9176(6.32e-2)+
	10	0.9981(1.40e-3)	0.9997(1.83e-5)≈	0.6528(3.59e-1)+	0.8713(2.67e-1)+	0.0064(3.37e-2)+	0.9294(4.70e-2)+
	15	0.9964(2.30e-3)	0.9998(4.86e-5)≈	0.8054(3.03e-1)+	0.4443(4.16e-1)+	0.0000(0.00e-0)+	0.8374(6.79e-2)+
DTLZ2	3	0.7489(3.69e-4)	0.5591(2.00e-4)+	0.5546(1.30e-3)+	0.5431(2.43e-4)+	0.4064(1.49e-2)+	0.5589(1.08e-4)+
	5	0.8127(4.52e-16)	0.8122(4.19e-4)+	0.7921(2.50e-3)+	0.8126(5.31e-4)+	0.3648(1.45e-2)+	0.8115(4.11e-4)+
	8	0.9242(1.68e-4)	0.9238(3.09e-4)+	0.9045(2.40e-3)+	0.9196(3.30e-3)+	0.0648(1.15e-2)+	0.9241(4.50e-4)+
	10	0.9701(1.56e-4)	0.9698(1.68e-4)+	0.9309(6.70e-3)+	0.9691(6.78e-4)+	0.0478(7.70e-3)+	0.9692(6.00e-3)+
	15	0.9905(1.41e-4)	0.9887(4.70e-3)+	0.9423(1.00e-2)+	0.6617(1.73e-1)+	0.0123(1.02e-2)+	0.8056(9.39e-2)+
DTLZ3	3	0.7612(2.50e-3)	0.5560(2.80e-3)+	0.5556(3.30e-3)+	0.0000(0.00e-0)+	0.0000(0.00e-0)+	0.5559(2.30e-3)+
	5	0.7615(1.60e-3)	0.8120(6.07e-4)-	0.6027(1.29e-1)+	0.0000(0.00e-0)+	0.0000(0.00e-0)+	0.8112(7.61e-4)-
	8	0.6792(4.43e-2)	0.9217(1.80e-3)-	0.0206(1.13e-1)+	0.0000(0.00e-0)+	0.0000(0.00e-0)+	0.8764(9.87e-2)-
	10	0.8700(1.88e-2)	0.9697(2.59e-4)-	0.0000(0.00e-0)+	0.0064(1.73e-2)+	0.0000(0.00e-0)+	0.8248(1.21e-1)+
	15	0.9901(6.37e-4)	0.9893(4.20e-3)+	0.0000(0.00e-0)+	0.0040(1.69e-2)+	0.0000(0.00e-0)+	0.4760(5.72e-2)+
DTLZ4	3	0.7485(4.74e-4)	0.5596(3.72e-5)+	0.5250(7.14e-2)+	0.2397(3.39e-2)+	0.4307(2.10e-2)+	0.5520(3.98e-2)+
	5	0.9605(2.31e-1)	0.8126(4.75e-4)+	0.7889(2.30e-3)+	0.8064(2.50e-2)+	0.4845(2.05e-2)+	0.8120(5016e-4)+
	8	0.9243(3.79e-4)	0.9233(4.10e-3)+	0.8985(5.30e-3)+	0.9118(3.13e-2)+	0.2748(5.28e-2)+	0.9241(1.04e-2)+
	10	0.9731(1.43e-4)	0.9697(1.45e-4)+	0.9198(1.07e-2)+	0.9702(3.10e-3)≈	0.2719(4.62e-2)+	0.9715(4.30e-3)≈
	15	0.9881(1.90e-3)	0.9901(1.40e-3)-	0.9571(3.90e-3)+	0.9843(7.10e-3)+	0.0008(2.50e-3)+	0.9816(6.00e-3)+
DTLZ5	3	0.1299(5.96e-4)	0.1610(3.50e-3)-	0.1991(2.98e-4)-	0.0762(3.82e-2)+	0.1759(5.30e-3)-	0.1898(1.84e-5)-
	5	0.1197(2.80e-3)	0.1070(2.60e-3)+	0.0983(5.10e-3)+	0.0912(2.48e-2)+	0.1046(4.10e-3)+	0.0915(1.90e-3)+
	8	0.0989(1.80e-3)	0.0909(5.37e-6)+	0.0906(2.90e-4)+	0.0829(2.81e-2)+	0.0106(2.34e-2)+	0.0922(1.60e-3)+
	10	0.0950(1.30e-3)	0.0909(1.24e-4)+	0.0829(6.50e-3)+	0.0883(1.67e-2)+	0.0016(8.5e-3)+	0.0922(1.60e-3)+
	15	0.0921(6.29e-4)	0.0910(2.25e-4)+	0.0910(3.40e-4)+	0.0909(3.28e-4)+	1.5e-16(7.96e-16)+	0.0912(3.91e-4)+
DTLZ6	3	0.1302(3.42e-4)	0.1323(1.27e-2)≈	0.1994(2.10e-3)-	0.0526(4.95e-2)+	0.0208(4.12e-2)+	0.1898(5.64e-7)-
	5	0.1160(1.5e-3)	0.1066(4.40e-3)+	0.0749(3.46e-2)+	0.0910(2.47e-2)+	0.0969(1.83e-2)+	0.0909(2.43e-4)+
	8	0.0964(2.40e-3)	0.0937(1.70e-3)+	0.0091(2.77e-2)+	0.0733(3.56e-2)+	0.0932(2.18e-2)+	0.0933(2.20e-3)+
	10	0.0947(1.50e-3)	0.0927(6.07e-4)+	0.0000(0.00e-0)+	0.0886(1.67e-2)+	0.0423(4.70e-2)+	0.0929(1.60e-3)+
	15	0.0925(7.06e-4)	0.0849(2.31e-2)+	0.0517(4.56e-2)+	0.0791(3.15e-2)+	0.0030(1.66e-2)+	0.0916(5.67e-4)+
DTLZ7	3	0.2511(2.17e-2)	0.2648(1.40e-3)-	0.2738(9.10e-3)-	0.1188(5.99e-2)+	0.0279(1.10e-3)+	0.2712(1.58e-2)-
	5	0.1892(8.10e-3)	0.2184(3.80e-3)-	0.2458(3.30e-3)-	0.1836(2.00e-3)+	0.0066(1.70e-3)+	0.2588(4.80e-3)-
	8	0.1538(5.30e-3)	0.1666(1.62e-2)-	0.1651(5.80e-3)-	0.0517(2.38e-2)+	3.47e-7(6.56e-7)+	0.1737(9.80e-3)-
	10	0.1779(2.52e-2)	0.1639(1.83e-2)+	0.1185(7.30e-3)+	0.0063(3.20e-3)+	1.91e-8(4.08e-8)+	0.1601(1.09e-2)+
	15	0.1232(4.20e-3)	0.1238(4.10e-3)≈	0.0982(3.60e-3)+	6.99e-4(5.80e-4)+	1.6e-16(6.65e-3)+	0.1219(1.20e-3)+
+/-			22/5/8	30/0/5	34/1/0	34/0/1	27/1/7

注: “+”表示此算法劣于所提算法, “-”表示此算法优于所提算法, “≈”表示与所提算法性能相近.

4.5 验证MaOEA-ITS主要部分的有效性

本节通过比较MaOEA-ITS与它的3种变体算法来分析MaOEA-ITS所采取的基于IGD⁺指标选择策略、参考向量引导的种群分解策略和参考点分布自适应策略中每一个策略的有效性. 3种变体为:

1) 变体1(MaOEA-ITS-v1): 该变体保留基于IGD⁺指标的第1阶段选择策略和参考点分布自适应策略, 去除基于参考向量引导的第2阶段选择策略, 用

于分析第2阶段选择策略的有效性.

2) 变体2(MaOEA-ITS-v2): 该变体去除基于IGD⁺指标的第1阶段选择策略, 保留基于参考向量引导的第2阶段选择策略和参考点分布自适应策略, 用于分析第1阶段选择的有效性.

3) 变体3(MaOEA-ITS-v3): 该变体去除参考点分布自适应策略, 保留两阶段选择策略, 用于分析参考点分布自适应策略的有效性.

表9 6个算法在不同目标维数的WFG测试问题上获得的HV均值和标准差

Table 9 HV mean and standard deviations obtained by each algorithms on the WFG test suite

测试问题	m	MaOEA-ITS	RVEA	VaEA	MaOEA-IGD	MOEAD-M2M	MOMBI-II
WFG1	3	0.8505(1.35e-4)	0.8658(1.80e-2)≈	0.8789(1.38e-2)-	0.1264(6.06e-2)+	0.3421(1.80e-2)+	0.9138(1.44e-2)-
	5	0.9474(3.50e-3)	0.6476(2.65e-2)+	0.4626(2.40e-2)+	0.1032(4.24e-2)+	0.2967(3.50e-3)+	0.9803(2.21e-2)-
	8	0.7759(3.90e-3)	0.5269(3.69e-2)+	0.3193(1.54e-2)+	0.1351(9.23e-2)+	0.2489(4.90e-3)+	0.8708(1.03e-1)-
	10	0.8844(6.62e-4)	0.4698(3.00e-2)+	0.2452(6.30e-3)+	0.2271(9.20e-2)+	0.2250(2.50e-3)+	0.7498(5.57e-2)+
	15	0.7351(2.67e-4)	0.7073(5.40e-2)+	0.2570(1.56e-2)+	0.2565(4.59e-2)+	0.1748(1.20e-3)+	0.8097(1.12e-1)+
WFG2	3	0.9333(8.27e-4)	0.9248(1.40e-3)+	0.9222(1.80e-3)+	0.4747(1.03e-1)+	0.8639(1.0e-2)+	0.8950(9.50e-3)+
	5	0.9945(6.47e4)	0.9788(3.20e-3)+	0.9748(1.90e-3)+	0.8688(5.30e-2)+	0.9521(7.40e-3)+	0.9824(1.17e-2)≈
	8	0.9970(3.37e-4)	0.9530(1.32e-2)+	0.9696(5.10e-3)+	0.8994(6.78e-2)+	0.9463(1.11e-2)+	0.9695(4.14e-2)+
	10	0.9962(1.91e-4)	0.9432(1.44e-2)+	0.9535(5.90e-3)+	0.9110(1.07e-1)+	0.9107(1.32e-2)+	0.9427(7.66e-2)+
	15	0.9904(4.05e-4)	0.8887(2.45e-2)+	0.9499(1.36e-2)+	0.7773(1.97e-1)+	0.8720(1.83e-2)+	0.7814(1.12e-1)+
WFG3	3	0.4042(1.50e-3)	0.3360(1.21e-2)+	0.3683(3.70e-2)+	0.0813(3.90e-3)+	0.2726(1.74e-2)+	0.4006(1.70e-3)≈
	5	0.2634(1.80e-2)	0.1183(2.11e-2)+	0.0570(1.34e-2)+	0.0528(6.50e-2)+	0.1050(2.27e-2)+	0.0808(7.30e-3)+
	8	0.057(2.80e-3)	0.0000(0.00e-0)+	0.049(1.75e-2)≈	0.0000(0.00e-0)+	0.0000(0.00e-0)+	0.0899(1.27e-2)-
	10	0.1732(4.70e-3)	0.0000(0.00e-0)+	0.0000(0.00e-0)+	0.0000(0.00e-0)+	0.0000(0.00e-0)+	0.0133(1.33e-2)+
	15	0.0000(0.00e-0)	0.0000(0.00e-0)≈	0.0000(0.00e-0)≈	0.0000(0.00e-0)≈	0.0000(0.00e-0)≈	0.0000(0.00e-0)≈
WFG4	3	0.5619(5.24e-5)	0.5515(1.30e-3)+	0.5454(3.00e-3)+	0.1081(3.91e-2)+	0.4788(6.70e-3)+	0.5331(7.40e-3)+
	5	0.8056(6.40e-4)	0.7791(3.50e-3)+	0.7397(5.30e-3)+	0.1001(2.58e-2)+	0.6548(1.55e-2)+	0.7058(4.48e-2)+
	8	0.9112(1.40e-3)	0.8761(6.20e-3)+	0.8427(5.40e-3)+	0.1053(3.00e-2)+	0.6595(1.81e-2)+	0.7753(3.04e-2)+
	10	0.9604(8.21e-4)	0.8919(9.30e-3)+	0.8441(8.00e-3)+	0.1085(3.33e-2)+	0.6810(2.23e-2)+	0.6973(7.21e-2)+
	15	0.9752(5.20e-3)	0.9160(1.78e-2)+	0.8721(8.40e-3)+	0.1388(5.69e-2)+	0.3910(2.21e-2)+	0.3785(3.84e-2)+
WFG5	3	0.5136(3.53e-5)	0.5174(2.36e-4)-	0.5150(1.29e-3)≈	0.0970(4.03e-2)+	0.4817(4.20e-3)+	0.5004(6.71e-3)+
	5	0.7603(3.39e-4)	0.7568(7.66e-4)≈	0.7251(4.20e-3)+	0.1158(4.52e-2)+	0.6679(1.63e-2)+	0.7331(1.25e-2)+
	8	0.8613(4.08e-4)	0.8567(1.20e-3)+	0.8241(4.00e-3)+	0.0978(2.97e-2)+	0.6796(1.59e-2)+	0.7440(1.94e-2)+
	10	0.8734(1.14e-2)	0.8884(1.60e-3)≈	0.8278(5.10e-3)+	0.0960(3.39e-2)+	0.6961(1.72e-2)+	0.6848(3.49e-2)+
	15	0.9165(2.28e-4)	0.9112(1.40e-3)+	0.8437(5.40e-3)+	0.1208(5.23e-2)+	0.3033(4.80e-2)+	0.2232(2.79e-2)+
WFG6	3	0.5289(9.21e-5)	0.5230(4.00e-3)≈	0.5190(4.90e-3)≈	0.1329(5.95e-2)+	0.4354(4.20e-3)+	0.5116(1.28e-2)+
	5	0.7707(3.98e-4)	0.7552(5.30e-3)+	0.7157(7.00e-3)+	0.1387(5.80e-2)+	0.6524(4.80e-3)+	0.6966(4.71e-2)+
	8	0.8693(4.38e-4)	0.8496(2.27e-2)+	0.8350(8.80e-3)+	0.1385(5.85e-2)+	0.7121(7.90e-3)+	0.7011(1.43e-2)+
	10	0.9056(5.42e-4)	0.8731(9.60e-3)+	0.8263(8.10e-3)+	0.1701(6.07e-2)+	0.7762(9.30e-3)+	0.6457(2.32e-2)+
	15	0.9337(3.51e-4)	0.6950(6.79e-2)+	0.8615(1.14e-2)+	0.1528(5.67e-2)+	0.3646(3.98e-2)+	0.4408(7.07e-2)+
WFG7	3	0.5627(4.50e-5)	0.5540(6.65e-4)+	0.5483(2.10e-3)+	0.1379(6.38e-2)+	0.4891(7.80e-3)+	0.5400(1.16e-2)+
	5	0.7387(2.30e-3)	0.7961(1.80e-3)-	0.7147(3.10e-3)+	0.1988(5.81e-2)+	0.6122(2.12e-2)+	0.7775(1.57e-2)-
	8	0.7811(2.70e-3)	0.8943(1.01e-2)-	0.8885(5.70e-3)-	0.2087(6.29e-2)+	0.5876(2.60e-2)+	0.7364(1.01e-2)+
	10	0.9123(7.99e-4)	0.9105(6.40e-3)≈	0.8897(6.20e-3)+	0.2123(1.17e-1)+	0.5751(2.17e-2)+	0.8241(1.23e-2)+
	15	0.8105(1.66e-4)	0.7810(8.08e-2)+	0.9360(5.30e-3)-	0.1593(5.20e-2)+	0.2722(2.29e-2)+	0.4659(5.70e-2)+
WFG8	3	0.3248(5.48e-4)	0.5060(2.30e-3)-	0.4980(4.40e-3)-	0.0576(1.61e-2)+	0.3988(1.20e-2)-	0.4805(3.20e-3)-
	5	0.5137(2.70e-3)	0.7244(5.00e-3)-	0.6880(5.00e-3)-	0.0716(7.16e-2)+	0.4835(1.73e-2)+	0.3782(9.20e-3)+
	8	0.5668(2.50e-3)	0.6807(2.43e-2)-	0.7243(9.20e-3)-	0.3867(2.09e-1)+	0.4506(1.73e-2)+	0.6362(1.52e-2)-
	10	0.5021(8.63e-4)	0.6655(2.01e-2)-	0.7433(1.01e-2)-	0.4622(2.20e-1)+	0.5122(1.66e-2)≈	0.6929(1.98e-2)-
	15	0.3105(2.98e-4)	0.4673(1.44e-1)-	0.7329(1.94e-2)-	0.1981(1.11e-1)+	0.1985(2.78e-2)+	0.2889(7.57e-2)+
WFG9	3	0.5697(3.27e-5)	0.5253(1.63e-2)+	0.5154(1.91e-2)+	0.1808(4.82e-2)+	0.4953(1.42e-2)+	0.4933(2.20e-2)+
	5	0.7051(2.93e-4)	0.7263(9.30e-3)-	0.6876(1.73e-2)+	0.2487(7.49e-2)+	0.6367(2.52e-2)+	0.4811(4.37e-2)+
	8	0.7405(8.47e-4)	0.7138(3.96e-2)+	0.7005(3.70e-2)+	0.4880(1.69e-1)+	0.5994(2.88e-2)+	0.7367(2.23e-2)+
	10	0.7434(2.70e-3)	0.7584(3.12e-2)≈	0.7491(2.53e-2)≈	0.4809(1.99e-1)+	0.6540(3.41e-2)+	0.6694(3.19e-2)+
	15	0.7560(9.92e-4)	0.7055(5.58e-2)+	0.6972(5.30e-2)+	0.2258(1.60e-1)+	0.4998(5.14e-2)+	0.2137(4.68e-2)+
+/-/-			30/7/8	32/5/8	44/1/0	42/2/1	34/3/8

注：“+”表示此算法劣于所提算法，“-”表示此算法优于所提算法，“≈”表示与所提算法性能相近。

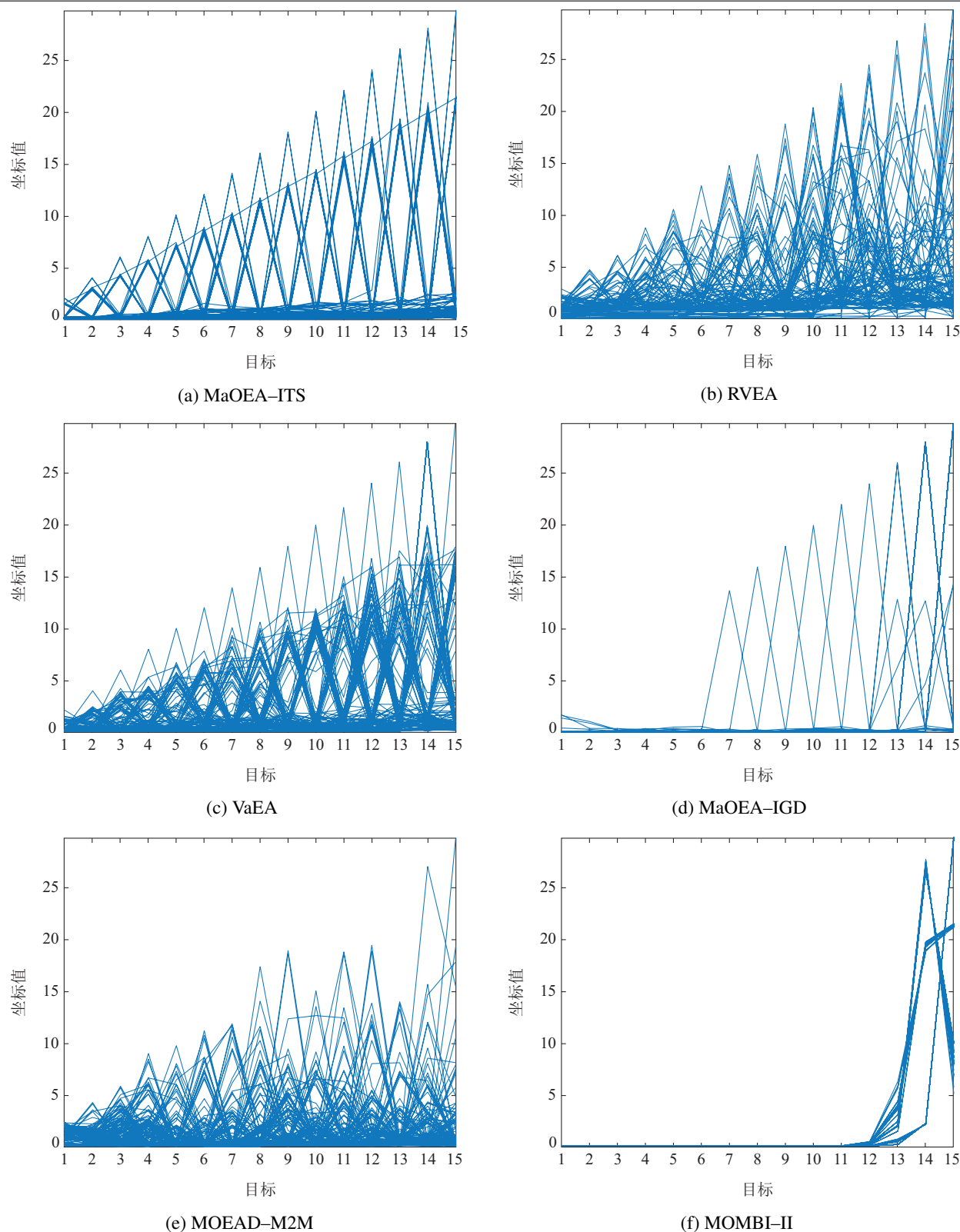


图4 6种算法在15目标WFG9测试问题上最终解集的平行坐标图

Fig. 4 Parallel coordinate of the optimal solutions obtained by each algorithm on the 15-objective WFG9

表10给出了4种算法在10和15目标WFG测试问题上运行30次获得的HV指标值的统计结果(均值和标准差)且突出显示最好的结果. 此外, 为了更加直观形象的展示统计结果, 4种算法在15目标WFG测试问题获得的HV值以盒子图展示, 如图5所示. 另外, 所有算

法在15目标WFG3上的HV值为0, 所以未展现WFG3上的盒子图. 根据统计结果和盒子图可知, MaOEA-ITS在所有WFG测试问题上获得最具有竞争力的性能, 得益于基于IGD⁺指标的选择策略、基于参考向量引导种群分解策略与参考点分布自适应策略的融合.

对比MaOEA-ITS算法与MaOEA-ITS-v1算法,该变体劣于所提算法,主要原因在于该变体算法偏重收敛性轻多样性,无法平衡种群的收敛性和多样性.对于MaOEA-ITS-v2算法,仅采用基于参考向量引导的第2阶段选择策略来选择精英解,实验结果表明该变体在所有测试问题上都劣于MaOEA-ITS,原因在于该变体算法偏重多样性轻收敛性.例如,该变体算法在WFG2和WFG4两个多模态问题上获得较差的性能,其原因是该算法的收敛能力较差.对比MaOEA-ITS算法与MaOEA-ITS-v3算法,该变体的整体性能稍劣于MaOEA-ITS,其主要原因是在高维空间下,该变体算法不能将对算法性能有较大影响且位于边界区域的极值解保留.综上可知,两阶段选择策略的每一阶段选择策略以及参考点分布自适应策略对MaOEA-ITS求解MaOPs都是至关重要的,它们的创新融合不仅增强了算法求解高维多目标优化问题的能力,而且可以有效地权衡种群的收敛性和多样性.

4.6 MaOEA-ITS算法的参数分析

MaOEA-ITS主要有两个参数:平衡收敛性和多样

性的常数 α 和控制执行参考点分布自适应策略的频率 f_r .通过取不同的值分析其对算法性能的影响,其中 $\alpha \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 且 $f_r \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$.另外,选择15目标上较为困难的IDTLZ1, DTLZ7, WFG1和WFG9来比较不同 α 和 f_r 组合下所提算法获得的IGD指标值,且每种组合在不同测试问题上独立运行30次.在每种组合下, MaOEA-ITS在各问题所获得的IGD指标值被展现在图6中.如图6所示,不同的组合导致所提算法获得不同的IGD指标值.具体地, $f_r = 0$ 表示没有执行参考点分布自适应策略; $f_r = 0.4$ 和 $f_r = 0.5$ 表示执行参考点分布自适应策略太频繁.笔者发现在上述两种组合下,大多数情况不能获得较好的IGD指标值.对于 α 参数而言, $\alpha = 5$ 和 $\alpha = 7$ 不适合DTLZ1.此外,取较大值如 $\alpha = 7$ 和 $\alpha = 9$ 时,大多数该组合下算法获得了较大的IGD指标值,但 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 3$ 时,算法可以获得相对较好的性能表现.因此, f_r 取值介于0.1到0.3和 α 取值介于1和3是相对较好的选择.这也验证了本算法选用 $f_r = 0.1$ 和 $\alpha = 2$ 的合理性.

表 10 MaOEA-ITS与它的不同变体在WFG测试问题上获得的HV值的统计结果(均值和标准差)

Table 10 Statistical results of HV values obtained by MaOEA-ITS and different variants on the WFG

测试问题	m	MaOEA-ITS	MaOEA-ITS-v1	MaOEA-ITS-v2	MaOEA-ITS-v3
WFG1	10	0.8844(6.62e-4)	0.7572(5.24e-2)+	0.2279(7.90e-3)+	0.8722(8.90e-3)+
	15	0.7351(2.67e-4)	0.4711(6.43e-2)+	0.1977(5.20e-3)+	0.5053(1.45e-1)+
WFG2	10	0.9962(1.91e-4)	0.9923(6.00e-3)+	0.8792(1.96e-2)+	0.9929(1.50e-3)+
	15	0.9904(4.05e-4)	0.9776(1.54e-2)+	0.7507(1.43e-2)+	0.9819(5.50e-3)+
WFG3	10	0.0264(3.71e-2)	0.0000(0.00e-0)+	0.0000(0.00e-0)+	0.0000(0.00e-0)+
	15	0.0000(0.00e-0)	0.0000(0.00e-0) $\approx$	0.0000(0.00e-0) $\approx$	0.0000(0.00e-0) $\approx$
WFG4	10	0.9604(8.21e-4)	0.9233(4.80e-3)+	0.1735(4.27e-2)+	0.9283(1.35e-3)+
	15	0.9752(5.20e-3)	0.9191(6.83e-2)+	0.1615(4.60e-2)+	0.9249(1.10e-3)+
WFG5	10	0.8734(1.14e-2)	0.8950(1.48e-2)-	0.2199(7.28e-2)+	0.8169(2.26e-2)+
	15	0.9165(2.28e-4)	0.9097(2.31e-2) $\approx$	0.1724(4.44e-2)+	0.9028(7.10e-3)+
WFG6	10	0.9056(5.42e-4)	0.8886(2.27e-4)+	0.0971(2.59e-2)+	0.9008(5.80e-3)+
	15	0.9337(3.51e-4)	0.9007(9.20e-3)+	0.0774(1.67e-2)+	0.9199(2.80e-3)+
WFG7	10	0.9123(7.98e-4)	0.8014(9.90e-3)+	0.4249(5.55e-2)+	0.8275(1.78e-2)+
	15	0.8105(1.66e-4)	0.7434(1.15e-1)+	0.1691(6.56e-2)+	0.7696(1.94e-2)+
WFG8	10	0.5021(8.63e-4)	0.4860(5.74e-2)+	0.0000(0.00e-0)+	0.4593(4.56e-3)+
	15	0.3105(2.98e-4)	0.3061(8.30e-3) $\approx$	0.0000(0.00e-0)+	0.3078(9.78e-4) $\approx$
WFG9	10	0.7434(2.70e-3)	0.7670(2.71e-3)-	0.5310(1.08e-1)+	0.7422(3.29e-3)+
	15	0.7560(9.92e-4)	0.4814(2.67e-2)+	0.3635(6.26e-2)+	0.7209(1.27e-2)+
+/ $\approx$ /-			13/3/2	17/1/0	16/2/0

注:“+”表示此算法劣于所提算法,“-”表示此算法优于所提算法,“ $\approx$ ”表示与所提算法性能相近.

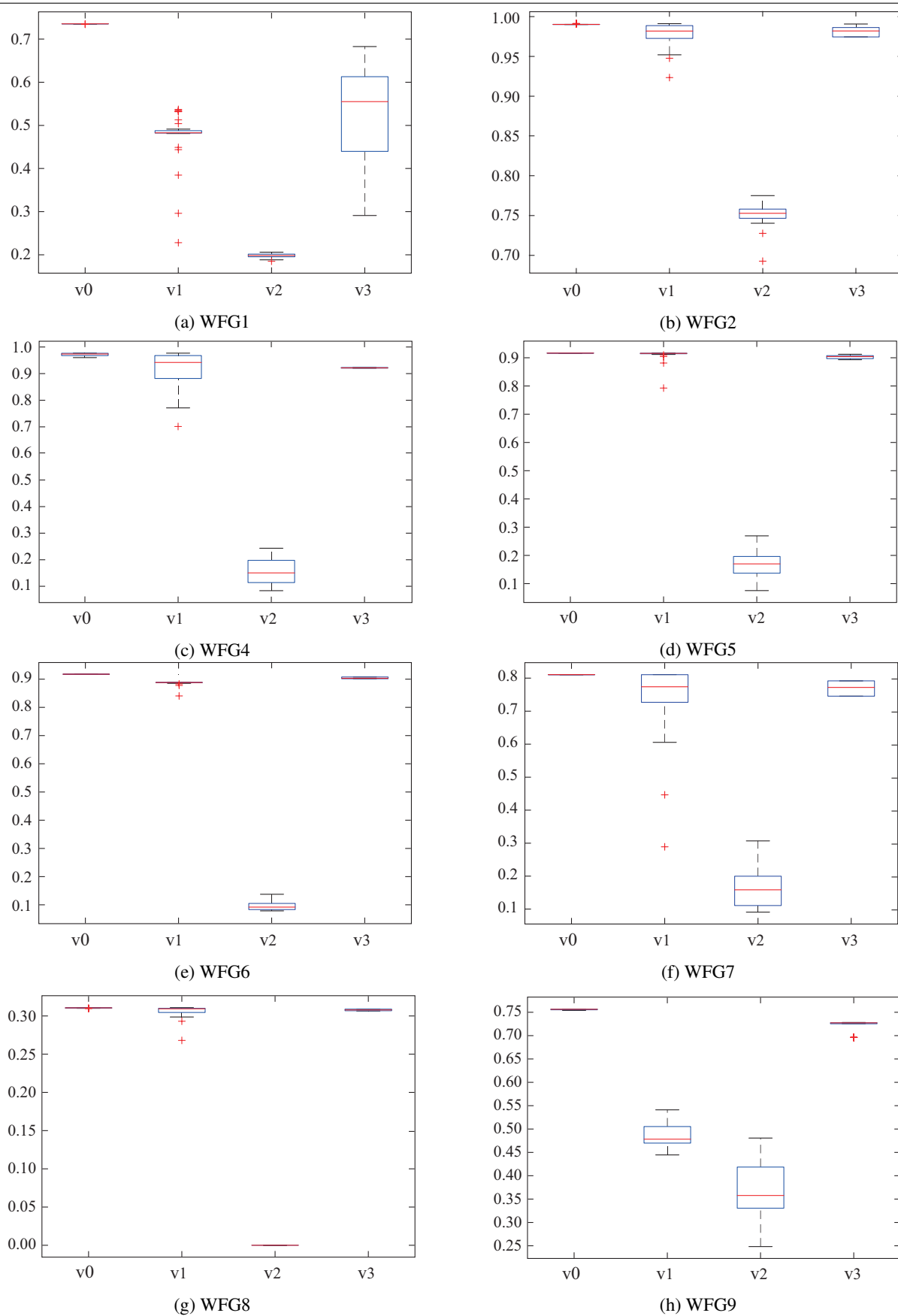


图 5 MaOEA-ITS和它的3个变体算法在15目标WFG上获得HV值的盒子图

Fig. 5 Boxplots of HV values obtained by MaOEA-ITS and its 3 variants on 15-objective WFG

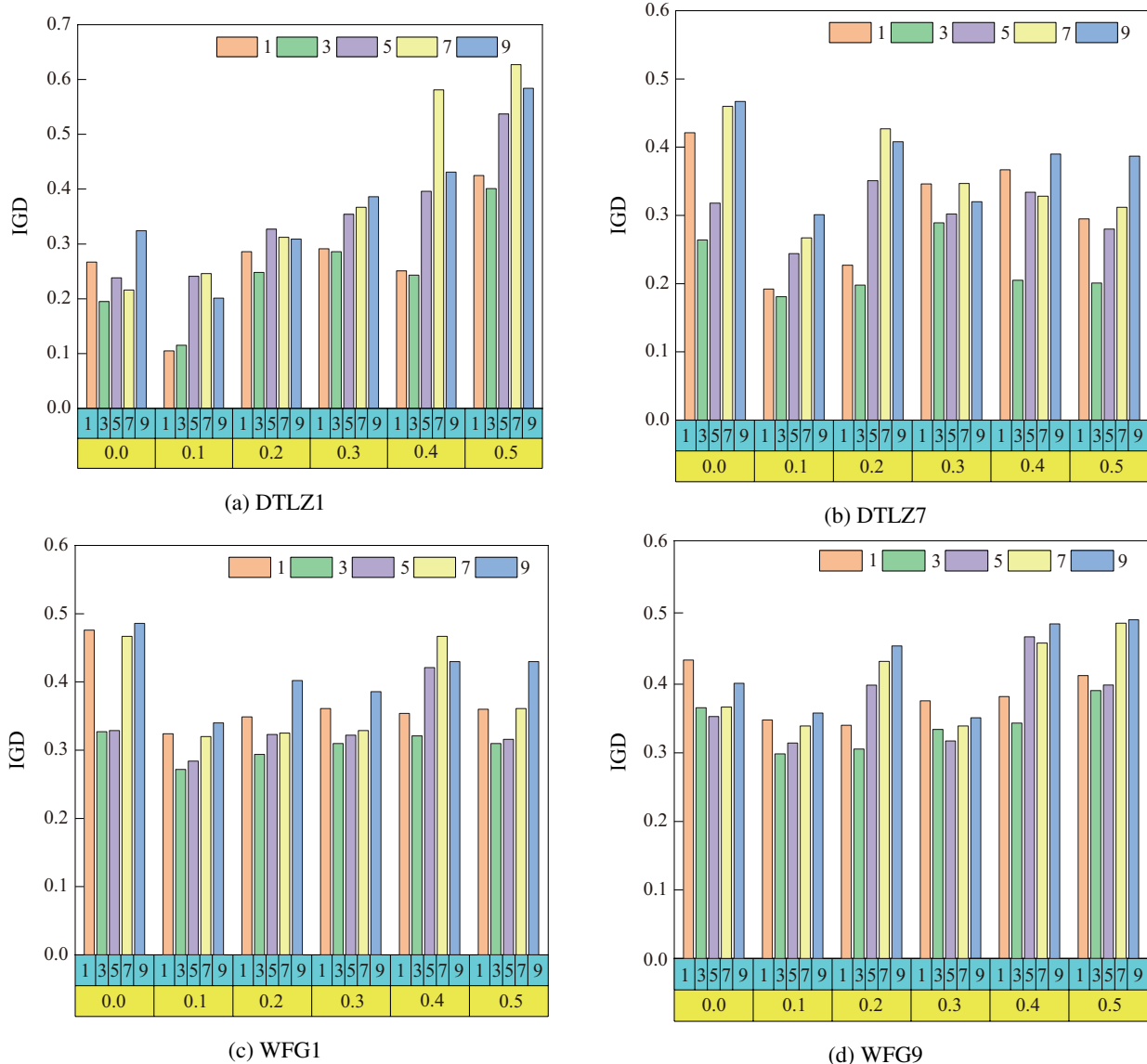


图6 不同 α 和 f_r 组合下MaOEA-ITS在各测试问题上所获得的IGD指标值

Fig. 6 IGD values achieved by MaOEA-ITS with different combinations of α and f_r on different test problem

5 结论

针对在高维空间下多目标进化算法难以有效权衡种群收敛性和多样性问题,提出一种基于IGD⁺指标的两阶段选择高维多目标进化算法.通过构建基于IGD⁺指标和参考向量引导的两阶段选择策略,选取收敛性和多样性都较好的个体,进而解决MOEAs在求解高维多目标优化问题时难以平衡种群收敛性和多样性的难题.同时通过利用个体与参考向量的空间关系,设计了参考点分布自适应策略,用于保存能够提高种群多样性的极值解.实验结果表明, MaOEA-ITS能够有效的维持种群收敛性和多样性平衡且两阶段选择策略可以增强算法求解高维多目标优化问题的能力.

参考文献:

[1] ZHOU A, QU B, LI H, et al. Multiobjective evolutionary algorithms:

A survey of the state of the art. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2011, 1(1): 32 – 49.

[2] SUN Jing, GONG Dunwei. Recent advances in evolutionary many-objective optimization. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(7): 928 – 938.

(孙靖, 巩敦卫. 进化高维多目标优化研究进展. *控制理论与应用*, 2018, 35(7): 928 – 938.)

[3] LIU Jianchang, LI Fei, WANG Honghai, et al. Survey on evolutionary many-objective optimization algorithm. *Control and Decision*, 2018, 33(5): 879 – 887.

(刘建昌, 李飞, 王洪海, 等. 进化高维多目标优化算法研究综述. *控制与决策*, 2018, 33(5): 879 – 887.)

[4] KONG Weijian, CHAI Tianyou, Ding Jinliang, et al. A real-time multi-objective electric energy allocation optimization approach for the smelting process of magnesite. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(1): 51 – 61.

(孔维健, 柴天佑, 丁进良, 等. 镁砂熔炼过程全厂电能分配实时多目标优化方法研究. *自动化学报*, 2014, 40(1): 51 – 61.)

[5] FU G, KAPELAN Z, KASPRZYK J R, et al. Optimal design of water distribution systems using many-objective visual analytics. *Journal of Water Resources Planning & Management*, 2013, 139(6): 624 – 633.

- [6] QIAO Junfei, Han Gaitang, ZHOU Hongbiao. Knowledge-based intelligent optimal control for wastewater biochemical treatment process. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(6): 1038 – 1046.
(乔俊飞, 韩改堂, 周红标. 基于知识的污水生化处理过程智能优化方法. *自动化学报*, 2017, 43(6): 1038 – 1046.)
- [7] LI B, CHAO Q, LI J, et al. Search based recommender system using many-objective evolutionary algorithm. *Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Vancouver, Canada: IEEE, 2016: 120 – 126.
- [8] DEB K, PRATAP A, AGARWAL S, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182 – 197.
- [9] ZITZLER E, THIELE L. Multi-objective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1999, 3(4): 257 – 271.
- [10] LIU Jianchang, Zhao Yangjie, LI Fei, et al. Expensive multi-objective optimization algorithm based on R2 indicator. *Control and Decision*, 2020, 35(4): 823 – 832.
(刘建昌, 赵阳杰, 李飞, 等. 基于R2指标的昂贵多目标进化算法. *控制与决策*, 2020, 35(4): 823 – 832.)
- [11] SATOS T, TAKAHASHI R H C. On the performance degradation of dominance-based evolutionary algorithms in many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 22(1): 19 – 31.
- [12] FENG Wenqing, GONG Dunwei. Multi-objective evolutionary optimization with objective space partition based on online perception of Pareto front. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(8): 1628 – 1643.
(封文清, 巩敦卫. 基于在线感知Pareto前沿划分目标空间的多目标进化优化. *自动化学报*, 2020, 46(8): 1628 – 1643.)
- [13] CHEN H, TIAN Y, PEDRYCZ W, et al. Hyperplane assisted evolutionary algorithm for many-objective optimization problems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(7): 3367 – 3380.
- [14] ZHANG Enze, CHEN Qingwei. Improved r-dominance-based particle swarm optimization for multi-objective optimization. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(5): 623 – 630.
(章恩泽, 陈庆伟. 改进的r支配高维多目标粒子群优化算法. *控制理论与应用*, 2015, 32(5): 623 – 630.)
- [15] LAUMANN S, THIELE L, DEB K, et al. Combining convergence and diversity in evolutionary multi-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 10(3): 263 – 282.
- [16] HE Z, YEN G G, ZHANG J. Fuzzy-based Pareto optimality for many-objective evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(2): 269 – 285.
- [17] YANG S, LI M, LIU X, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 17(5): 721 – 736.
- [18] LI M, YANG S, LIU X. Shift-based density estimation for Pareto-based algorithms in many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(3): 348 – 365.
- [19] DEB K, JIAN H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based non-dominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 577 – 601.
- [20] ZHANG Q, LI H. MOEA/D: A multi-objective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2008, 11(6): 712 – 731.
- [21] LI K, DEB K, ZHANG Q, et al. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(5): 694 – 716.
- [22] ASAFUDDOULA M, SINGH H K, RAY T. An enhanced decomposition-based evolutionary algorithm with adaptive reference vectors. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(8): 2321 – 2334.
- [23] WANG H, JIAO L, YAO X. Two-arch2: An improved two-archive algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(4): 524 – 541.
- [24] BEUME N, NAUJOKS B, EMMERICH M. SMS-EMOA: Multi-objective selection based on dominated hypervolume. *European Journal of Operational Research*, 2007, 181(3): 1653 – 1669.
- [25] TIAN Y, CHENG R, ZHANG X, et al. An indicator-based multi-objective evolutionary algorithm with reference point adaptation for better versatility. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 22(4): 609 – 622.
- [26] YUAN Y, XU H, WANG B, et al. A new dominance relation-based evolutionary algorithm for many-objective Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(1): 16 – 37.
- [27] ZITZLER E, DEB K, THIELE L. Comparison of multi-objective evolutionary algorithms: Empirical results. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2000, 8(2): 173 – 195.
- [28] CHENG R, JIN Y, OLHOFFER M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773 – 791.
- [29] BI X, WANG C. An improved NSGA-III algorithm based on objective space decomposition for many-objective optimization. *Soft Computing*, 2017, 21(15): 4269 – 4296.
- [30] CHEN H, CHENG R, WEN J, et al. Solving large-scale many-objective optimization problems by covariance matrix adaptation evolution strategy with scalable small sub-populations. *Information Sciences*, 2018, 509: 457 – 469.
- [31] CHUGH T, JIN Y, MIETTINEN K, et al. A surrogate-assisted reference vector guided evolutionary algorithm for computationally expensive many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(1): 129 – 142.
- [32] ZITZLER E, KUNZLI S. Indicator-based selection in multi-objective search. *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*. Berlin, Germany: Springer, 2004: 832 – 842.
- [33] BADER J, ZITZLER E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization. *Evolutionary Computation*, 2011, 19(1): 45 – 76.
- [34] TRAUTMANN H, WAGNER T, BROCKHOFF D. R2-EMOA: Focused multi-objective search using R2-indicator-based selection. *International Conference on Learning and Intelligent Optimization*. Berlin, Germany: Springer, 2013: 70 – 74.
- [35] HERNANDEZ GOMEZ R, COELLO C A C. Improved metaheuristic based on the R2 indicator for many-objective optimization. *Proceedings of Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. New York, USA: ACM, 2015: 679 – 686.
- [36] LOPEZ E M, COELLO C. IGD⁺-EMOA: A multi-objective evolutionary algorithm based on IGD⁺. *Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Vancouver, Canada: IEEE, 2016: 999 – 1006.
- [37] SUN Y, YEN G G, YI Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 23(2): 173 – 187.
- [38] COELLO C A C, CORTES N C. Solving multi-objective optimization problems using an artificial immune systems. *Genetic Programming & Evolvable Machines*, 2005, 6(2): 163 – 190.
- [39] ISHIBUCHI H, MASUDA H, TANIGAKI Y, et al. A study on performance evolution ability of a modified inverted generational distance indicator. *Proceedings of Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. New York, USA: ACM, 2015: 695 – 702.
- [40] DAS I, DENNIS J E. Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multi-criteria optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 1996, 8(3): 631 – 657.
- [41] AGRAWAL R B, DEB K. Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex Systems*, 1994, 9(3): 115 – 148.

- [42] DEB K, GOYAL M. A combined genetic adaptive search (GeneAS) for engineering design. *Computer Science and Informatics*, 1996, 26(4): 30 – 45.
- [43] LIANG Z, LUO T, HU K, et al. An indicator-based many-objective evolutionary algorithm with boundary protection. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(9): 4553 – 4566.
- [44] XIANG Y, ZHOU Y, LI M, et al. A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 21(1): 131 – 152.
- [45] DEB K, THIELE L, LAUMANN S M, et al. Scalable multi-objective optimization test problems. *Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Honolulu, USA: IEEE, 2005: 105 – 145.
- [46] HAUBAND S, HINGSTON P, BARONE L, et al. A review of multi-objective test problems and a scalable test problem toolkit. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(5): 477 – 506.
- [47] LIU H, GU F, ZHANG Q. Decomposition of a multiobjective optimization problem into a number of simple multiobjective subproblems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(3): 450 – 455.

作者简介:

张伟 硕士研究生, 目前研究方向为高维多目标优化, E-mail: 15940202607@163.com;

刘建昌 教授, 目前研究方向为智能控制理论及应用、复杂过程建模、控制于优化、故障诊断, E-mail: liujianchang@ise.neu.edu.cn;

刘圆超 博士研究生, 目前研究方向为多目标优化, E-mail: Yuanchaoliu@126.com;

郑恬子 博士研究生, 目前研究方向为多模态多目标优化, E-mail: zhengtianzi_ztz@163.com;

杨婉婷 博士研究生, 目前研究方向为大规模多目标优化, E-mail: wantingyangneu@163.com.