

不确定非方广义分数阶T-S模糊系统的鲁棒镇定

张雪峰^{1†}, 艾洁¹, 赵泽丽²

(1. 东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘要: 针对不确定非方广义分数阶T-S模糊系统阶数为 $0 < \alpha < 1$ 的鲁棒镇定问题, 提出了一个有效的判据. 首先, 利用一个新的T-S模糊动态补偿器, 将不确定非方广义分数阶T-S模糊系统转化为一个增广的不确定方形广义分数阶T-S模糊系统. 由于增广变量的引入, 动态补偿器的设计问题可以等价于静态输出反馈控制器的设计问题. 其次, 设计一个分数阶导数反馈控制器对得到的增广系统进行正常化处理. 然后, 对正常化得到的不确定分数阶T-S模糊系统进行研究, 得到一个系统渐近稳定的充分条件. 该条件保守性小并且形式简洁. 最后, 通过一个数值算例和一个实际例子验证了本文所提出结论的正确性和有效性.

关键词: 非方广义分数阶系统; T-S模糊模型; 动态补偿器; 鲁棒镇定; 线性矩阵不等式

引用格式: 张雪峰, 艾洁, 赵泽丽. 不确定非方广义分数阶T-S模糊系统的鲁棒镇定. 控制理论与应用, 2023, 40(1): 47 – 54

DOI: 10.7641/CTA.2021.10486

Robust stabilization for uncertain rectangular descriptor fractional order T-S fuzzy systems

ZHANG Xue-feng^{1†}, AI Jie¹, ZHAO Ze-li²

(1. College of Sciences, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China;

2. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China)

Abstract: An effective criterion is proposed for the robust stabilization for uncertain rectangular descriptor fractional order Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems with $0 < \alpha < 1$. Firstly, by using a new T-S fuzzy dynamic compensator, the uncertain rectangular descriptor fractional order T-S fuzzy systems are transformed into the augmented uncertain square descriptor fractional order T-S fuzzy systems. Due to the introduction of the augmented plant, the gain matrices of the dynamic compensator can be solved by an equivalent static output feedback. Secondly, a fractional order derivative state feedback controller is constructed to normalize the augmented uncertain square descriptor fractional order T-S fuzzy systems. Thirdly, a sufficient condition of asymptotical stability is proposed for normalized systems, which have less conservatism and more concise form. Finally, a numerical example and a practical example are given to verify the effectiveness of the main result in this paper.

Key words: rectangular descriptor fractional order systems; T-S fuzzy model; dynamic compensator; robust stabilization; linear matrix inequalities

Citation: ZHANG Xuefeng, AI Jie, ZHAO Zeli. Robust stabilization for uncertain rectangular descriptor fractional order T-S fuzzy systems. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(1): 47 – 54

1 引言

分数阶微积分是整数阶微积分到任意阶次微积分的推广, 它已经有300多年的历史了. 由于早期计算机水平相对落后, 分数阶微积分一直作为一个纯数学问题被研究. 随着计算机技术的发展, 许多研究者发现分数阶微积分具有全局性、记忆功能和遗传功能等特性. 并且分数阶微积分模型可以比整数阶微积分模型

更准确地描述一些实际系统中的动态行为. 因此, 分数阶微积分在电路^[1]、神经网络^[2]、系统控制^[3]以及粘弹性材料^[4]等各个领域被广泛应用. 分数阶系统逐渐成为控制工程领域的一个热点话题. Matignon最早研究了分数阶系统的能控性、能观性和稳定性^[5]. Podlubny 在文献[6]中提出了分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器. $PI^\lambda D^\mu$ 控制器的提出对于推动分数阶控制系统的应

收稿日期: 2021–06–05; 录用日期: 2021–09–23.

[†]通信作者. E-mail: zhangxuefeng@mail.neu.edu.cn; Tel.: +86 18804024117.

本文责任编辑: 邹云.

国家重点研发计划项目(2020YFB1710003), 国家自然科学基金项目(U20A20189), 辽宁省振兴人才计划项目(XLYC1907049)资助.

Supported by the National Key Research and Development Project (2020YFB1710003), the National Natural Science Foundation of China (U20A20189) and the Liaoning Revitalization Talents Program (XLYC1907049).

用具有重大的意义. 近几年, 分数阶系统的研究已经取得了丰硕的成果^[7-9].

广义系统又称为奇异系统, 它被应用于电路系统、捕食系统以及航空航天等许多实际系统中. 然而, 在实际建模中, 当系统建模不完全, 部分未知或产生部分故障时, 其模型通常被构建为一个非方广义系统. 所以, 研究非方广义分数阶系统有着重要的实际意义. 非方广义分数阶系统在电路^[10]和安全通信^[11]等领域被广泛应用. 对于方形广义分数阶系统, 一个成熟的分析和控制综合理论框架已经建立. 文献[12-13]研究了广义分数阶系统阶次分别为 $0 < \alpha < 1$ 和 $1 < \alpha < 2$ 的容许性问题. 文献[14-15]解决了广义分数阶系统的正常化和镇定问题. 相对于方形广义分数阶系统来说, 非方广义分数阶系统更为复杂并且研究结果较少. 大部分关于非方广义系统的研究成果都局限于整数阶系统^[16-19]. 由于非方广义系统是非正则系统, 所以任何静态反馈控制器都不能满足非方广义系统的正则化要求. 为了解决这个问题, 张国山在文献[16]中首次提出用动态补偿器使非方广义系统镇定. 基于动态补偿器方法, 文献[20-21]研究了非方广义分数阶系统的镇定问题.

T-S模糊模型是一种能有效表达复杂系统动态特性的非线性模型. 它可以将一个非线性系统表示为若干个线性定常模型, 然后通过非线性模糊隶属度函数将这些线性模型平滑地连接起来. 到目前为止, T-S模糊系统的研究已经成为了一个热点话题. 文献[22-23]研究了分数阶T-S模糊系统的镇定问题. 由于非方系统比方形系统更不规则, 所以关于矩形广义T-S模糊系统的研究结果还比较少. 林崇在文献[24]中通过使用比例导数型动态补偿器讨论了非方广义T-S模糊系统的正常化和镇定问题. 基于文献[24], 文献[25]研究了非方广义分数阶T-S模糊系统的正常化和镇定问题. 然而, 值得注意的是, 文献[25]中的结论由一组双线性矩阵不等式表示, 它不能用LMI工具箱直接处理, 而需要通过迭代LMI算法求解. 复杂的求解方法和过程可能在数值求解时造成误差.

基于以上讨论, 本文研究了不确定非方广义分数阶T-S模糊系统阶次为 $0 < \alpha < 1$ 的正常化和鲁棒镇定问题. 由于非方广义系统是不正则的, 并且分数阶系统阶次为 $0 < \alpha < 1$ 的稳定域是非凸的. 所以这个问题比研究广义整数阶系统更为复杂. 与现有的相关文献[20-21, 25]比较, 本文通过设计一个新的T-S模糊动态补偿器使不确定非方广义分数阶T-S模糊系统转化为不确定方形广义分数阶T-S模糊系统. 该方法弥补了静态反馈控制不能使非方广义系统满足正则化要求的不足; 另外, 动态补偿器的设计问题可以等价为静态输出反馈控制器的设计问题. 针对非对称矩阵变量耦合问题, 本文提出了一个改进的矩阵奇异值

分解引理, 该引理可用于设计分数阶系统的静态输出反馈控制器; 本文的结果中仅含有一个变量, 形式简洁并且由线性矩阵不等式表示, 可以很容易地通过MATLAB中的LMI工具箱直接进行求解.

2 问题描述与预备知识

考虑以下不确定非方广义分数阶T-S模糊系统:

规则 i : 如果 $z_1(t)$ 是 $H_{i1}, \dots, z_s(t)$ 是 H_{is} , 则

$$\begin{cases} ED^\alpha x(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + Bu(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $0 < \alpha < 1$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^u$ 是控制输入向量, $y(t) \in \mathbb{R}^y$ 是控制输出向量; 矩阵 $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 且 $\text{rank}(E) = r \leq \min\{m, n\}$; A_i, B 和 C_i 是具有适当维数的实矩阵; q 是模糊推理规则数, $H_{ij} (i = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, s)$ 和 $z_j(x)$ 分别代表模糊集和前件变量. ΔA_i 是具有不确定性的时不变矩阵, 并且满足

$$\Delta A_i = G_i F_i(\sigma) H_i, \quad (2)$$

其中: G_i 和 H_i 是已知的常数矩阵, $F_i(\sigma)$ 是具有勒贝格可积元素的不确定矩阵, 且满足

$$F_i^T(\sigma) F_i(\sigma) \leq I. \quad (3)$$

由于Caputo导数允许使用有明确物理意义的经典整数阶导数的初始条件, 所以, 在本文中用 D^α 代表Caputo类型的分数阶导数, 定义如下: 设函数 $f(\tau)$ 在区间 $[0, t]$ 上 m 阶可导, $f^{(m)}(\tau)$ 在区间 $[0, t]$ 上绝对可积,

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{m - \alpha - 1} f^{(m)}(\tau) d\tau,$$

其中: $m - 1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$; $\Gamma(\cdot)$ 是伽玛函数, 其表达式为

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty t^{q-1} e^{-t} dt.$$

应用单点模糊化、乘积推理和中心加权反模糊化方法, 可以得到如下全局非方广义分数阶T-S模糊系统模型:

$$\begin{cases} ED^\alpha x(t) = \sum_{i=1}^q h_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i)x(t) + Bu(t)], \\ y(t) = \sum_{i=1}^q h_i(z(t)) C_i x(t), \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \cdots \ z_q(t)],$$

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^q w_i(z(t))},$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^s H_{ij}(z_j(t)),$$

$H_{ij}(z_j(t))$ 是 $z_j(t)$ 在 H_{ij} 上的隶属度函数, 满足

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^q h_i(z) = 1, \\ h_i(z) \geq 0, i = 1, 2, \dots, q \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^q w_i(z) > 0, \\ w_i(z) \geq 0, i = 1, 2, \dots, q. \end{cases}$$

众所周知, 通过静态反馈控制器所获得的闭环系统的维数等于所考虑系统的维数. 因此, 任何静态反馈控制器都不能满足非方广义分数阶系统的正则化要求. 为了解决这个问题, 类似于文献[17]中整数阶系统的情况, 本文设计下列动态补偿器.

规则 i : 如果 $z_1(t)$ 是 $H_{i1}, \dots, z_s(t)$ 是 H_{is} , 则

$$\begin{aligned} E_c D^\alpha x_c(t) &= A_{ci} x_c(t) + B_{ci} y(t) + v_c(t), \\ u(t) &= C_{ci} x_c(t) + D_{ci} y(t) + v(t), \\ y_c(t) &= x_c(t), \end{aligned}$$

其中: $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ 是动态补偿器的状态向量; $v_c \in \mathbb{R}^{m_c}$ 是动态补偿器的控制输入向量; $v \in \mathbb{R}^p$ 是系统新的控制输入向量; A_{ci}, B_{ci}, C_{ci} 和 $D_{ci}(i = 1, 2, \dots, q)$ 是动态补偿器的增益矩阵; 矩阵 $E_c \in \mathbb{R}^{m_c \times n_c}$ 且 $\text{rank}(E_c) = r_c \leq \min\{m_c, n_c\}$.

全局动态补偿器可以写成

$$\begin{cases} E_c D^\alpha x_c(t) = \\ \sum_{i=1}^q h_i(z) [A_{ci} x_c(t) + B_{ci} y(t)] + v_c(t), \\ u(t) = \sum_{i=1}^q h_i(z) [C_{ci} x_c(t) + D_{ci} y(t) + v(t)], \\ y_c(t) = x_c(t). \end{cases} \quad (5)$$

然后, 结合式(4)–(5), 得到闭环系统如下:

$$\begin{cases} \tilde{E} D^\alpha \tilde{x}(t) = \\ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q h_i(z) h_j(z) h_k(z) [(\tilde{A}_i + \\ \Delta \tilde{A}_i + \tilde{B} K_j \tilde{C}_k) \tilde{x}(t) + \tilde{B} \tilde{v}(t)], \\ \tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^q h_k(z) \tilde{C}_k \tilde{x}(t), \end{cases} \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \tilde{v}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}, \tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix}, \\ \tilde{E} &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E_c \end{bmatrix}, \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{m_c} \end{bmatrix}, \tilde{C}_k = \begin{bmatrix} C_k & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix}, K_j = \begin{bmatrix} D_{cj} & C_{cj} \\ B_{cj} & A_{cj} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

根据式(2)–(3), 可以得到

$$\tilde{G}_i = \begin{bmatrix} G_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{F}_i(\sigma) = \begin{bmatrix} F_i(\sigma) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则

$$\Delta \tilde{A}_i = \tilde{G}_i \tilde{F}_i(\sigma) \tilde{H}_i, \tilde{F}_i^T(\sigma) \tilde{F}_i(\sigma) \leq I.$$

为了确保系统(6)是方形广义分数阶T-S模糊系统, 假设 E_c 的维数 $m_c \times n_c$ 满足

$$n + n_c = m + m_c.$$

因此, 系统(4)的动态补偿器的设计问题被转化为求解增广系统(6)的输出反馈镇定问题.

值得注意的是, 增广系统(6)是一个不确定的广义分数阶T-S模糊系统. 通过引用文献[15]中正常化的方法, 接下来, 设计系统(6)的分数阶导数反馈控制器

$$\tilde{v}(t) = -L D^\alpha \tilde{x}(t), \quad (7)$$

将式(7)代入式(6), 易知闭环系统(6)可以表示为

$$\begin{cases} (\tilde{E} + \tilde{B} L) D^\alpha \tilde{x}(t) = \\ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q h_i(z) h_j(z) h_k(z) [(\tilde{A}_i + \\ \Delta \tilde{A}_i + \tilde{B} K_j \tilde{C}_k) \tilde{x}(t), \\ \tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^q h_k(z) \tilde{C}_k \tilde{x}(t), \end{cases} \quad (8)$$

其中 $L \in \mathbb{R}^{(n_u+m_c) \times (n_y+n_c)}$ 是使系统(6)可正常化的增益矩阵.

为了计算出增益矩阵 L , 给出以下引理.

引理 1^[11] 系统(8)是可正常化的充分必要条件是存在一个可逆矩阵 $H \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ 和一个矩阵 $G \in \mathbb{R}^{(n_u+m_c) \times (n_y+n_c)}$ 满足

$$\text{sym}(\tilde{E} H + \tilde{B} G) < 0, \quad (9)$$

此时, 增益矩阵 L 为

$$L = G H^{-1}. \quad (10)$$

根据得到的增益矩阵 L , 定义如下矩阵:

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \tilde{E} + \tilde{B} L, \hat{A}_i = \hat{E}^{-1} \tilde{A}_i, \hat{B} = \hat{E}^{-1} \tilde{B}, \\ \hat{G}_i &= \hat{E}^{-1} \tilde{G}_i, \hat{F}_i(\sigma) = \tilde{F}_i(\sigma), \hat{H}_i = \tilde{H}_i, \end{aligned}$$

则可正常化的系统(8)变为

$$\begin{cases} D^\alpha \hat{x}(t) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q h_i(z) h_j(z) h_k(z) (\hat{A}_i + \\ \hat{G}_i \hat{F}_i(\sigma) \hat{H}_i + \hat{B} K_j \hat{C}_k) \hat{x}(t), \\ \hat{y}(t) = \sum_{k=1}^q h_k(z) \hat{C}_k \hat{x}(t). \end{cases} \quad (11)$$

因此, 在下面的讨论中, 为了研究不确定非方广义分数阶T-S模糊系统(1)的鲁棒镇定问题, 只需考虑系统(11)的鲁棒镇定问题.

在给出主要结果之前, 首先介绍以下几个引理.

引理 2^[12] 对于分数阶系统 $D^\alpha x(t) = Ax(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是渐近稳定的当且仅当存在两个矩阵 $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix} > 0, \\ \text{sym}\{(aX - bY)A\} < 0,$$

其中: 阶次 $0 < \alpha < 1$; $a = \sin \frac{\pi\alpha}{2}$, $b = \cos \frac{\pi\alpha}{2}$, 以下 a, b 均用此等式表示; $\text{sym}(X) = X + X^T$.

引理 3^[19] 对于实对称阵 Ω 和两个矩阵 Γ, Ξ 有

$$\Omega + \Gamma F(\sigma)\Xi + \Xi^T F^T(\sigma)\Gamma^T < 0,$$

当且仅当存在一个数 $\varepsilon > 0$ 有

$$\Omega + \varepsilon \Gamma \Gamma^T + \varepsilon^{-1} \Xi^T \Xi < 0,$$

其中 $F^T(\sigma)F(\sigma) \leq I$.

3 主要结果

本节中, 主要研究增广系统(6)的输出反馈镇定问题. 首先, 进行以下讨论.

对任意给定的矩阵 $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 有 $m < n$ 并且 $\text{rank}(\Pi) = m$, 存在 Π 的奇异值分解如下:

$$\Pi = U \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} V^T, \quad (12)$$

其中: $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是一个对角元素为正数且依次递减的对角矩阵; $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是酉矩阵. 特别地, 下面的引理成立.

引理 4 对于矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 满足式(12), 则存在一个矩阵 $\bar{X}$ 有 $X\Pi = \Pi\bar{X}$ 当且仅当 X 可以表示为

$$U^T X U = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix},$$

其中:

$$X_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}, X_{12} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}, \\ X_{22} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}.$$

证 该证明方法与文献[21]中引理1的证明类似. 略.

注 1 文献[21]中的引理1可以处理非对称矩阵变量耦合问题, 但是要求 Π 满足行满秩. 当矩阵 Π 满足列满秩时, 本文中的引理4可以解决非对称矩阵变量耦合问题.

现在, 提出系统(11)镇定的判据.

定理 1 系统(11)是渐近稳定的充分条件是存在矩阵

$$X_1 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}, X_2 \in \mathbb{R}^{n_y \times (n-n_y)}, \\ X_3 \in \mathbb{R}^{(n-n_y) \times (n-n_y)},$$

$$Z_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}, j = 1, 2, \dots, q$$

和一个实数 $\varepsilon > 0$ 有

$$\begin{bmatrix} X + X^T & X - X^T \\ * & X + X^T \end{bmatrix} > 0, \quad (13)$$

$$\Psi_{iii} < 0, i = 1, 2, \dots, q, \quad (14)$$

$$\Psi_{ijj} + \Psi_{jji} + \Psi_{jii} < 0, \\ i = 1, 2, \dots, q, i \neq j, \quad (15)$$

$$\Psi_{ijk} + \Psi_{ikj} + \Psi_{jik} + \Psi_{jki} + \Psi_{kji} + \Psi_{kij} < 0, \\ i = 1, 2, \dots, q-2, i < j < k, \quad (16)$$

其中:

$$\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} \psi_{ijk} & ((a-b)X + (a+b)X^T)\hat{G}_i \\ * & -\varepsilon I \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\psi_{ijk} = \text{sym}\{((a-b)X + (a+b)X^T)\hat{A}_i + \\ \hat{B}Z_j\hat{C}_k\} + \varepsilon \hat{H}_i^T \hat{H}_i, i, j, k = 1, 2, \dots, q, \quad (18)$$

$$X = U \begin{bmatrix} X_1 & \frac{a-b}{a}X_2 \\ -\frac{a+b}{a}X_2^T & X_3 \end{bmatrix} U^{-1}, \quad (19)$$

则控制器增益矩阵 K_j 为

$$K_j = VS^{-1}((a-b)X_1 + (a+b)X_1^T)^{-1}SV^{-1}Z_j, \\ j = 1, 2, \dots, q, \quad (20)$$

其中 $V \in \mathbb{R}^{(n_u+m_c) \times (n_u+m_c)}$ 是一个酉矩阵且满足

$$\hat{B} = U \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} V^T.$$

证 假设存在适当维数的矩阵 X_1, X_2, X_3, Z_j , $j = 1, 2, \dots, q$ 和一个实数 $\varepsilon > 0$ 有式(13)–(19)成立.

由式(20)得

$$Z_j = VS^{-1}((a-b)X_1 + (a+b)X_1^T)SV^{-1}K_j,$$

所以有

$$\hat{B}Z_j\hat{C}_k = \hat{B}VS^{-1}((a-b)X_1 + \\ (a+b)X_1^T)SV^{-1}K_j\hat{C}_k.$$

根据式(19)有

$$(a-b)X + (a+b)X^T = U\Lambda U^{-1},$$

其中:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & -4bX_2 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_1 = (a-b)X_1 + (a+b)X_1^T,$$

$$\Lambda_2 = (a-b)X_3 + (a+b)X_3^T.$$

对于矩阵 $\hat{B}$, 由引理4得

$$\hat{B}VS^{-1}\Lambda_1SV^{-1} = ((a-b)X + (a+b)X^T)\hat{B}.$$

因此, 可以得到

$$\begin{aligned} \hat{B}Z_j\hat{C}_k &= \hat{B}VS^{-1}\Lambda_1SV^{-1}K_j\hat{C}_k = \\ ((a-b)X + (a+b)X^T)\hat{B}K_j\hat{C}_k. \end{aligned} \quad (21)$$

将式(21)代入式(18)得到

$$\begin{aligned} \psi_{ijk} &= \text{sym}\{((a-b)X + (a+b)X^T) \cdot \\ &(\hat{A}_i + \hat{B}K_j\hat{C}_k)\} + \varepsilon\hat{H}_i^T\hat{H}_i, \end{aligned}$$

然后, 根据式(14)–(16), 利用舒尔补引理得到

$$\tilde{\Psi}_{iii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{ijj} + \tilde{\Psi}_{iji} + \tilde{\Psi}_{jii} &< 0, \\ i = 1, 2, \dots, q, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{ijk} + \tilde{\Psi}_{ikj} + \tilde{\Psi}_{jik} + \tilde{\Psi}_{jki} + \tilde{\Psi}_{kij} + \tilde{\Psi}_{kji} &< 0, \\ i = 1, 2, \dots, q-2, \quad i < j < k, \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{ijk} &= \text{sym}\{((a-b)X + (a+b)X^T) \cdot \\ &(\hat{A}_i + \hat{B}K_j\hat{C}_k)\} + \varepsilon\hat{H}_i^T\hat{H}_i + \\ &\varepsilon^{-1}((a-b)X + (a+b)X^T)\hat{G}_i^T \cdot \\ &(((a-b)X + (a+b)X^T)\hat{G}_i^T)^T. \end{aligned}$$

根据引理3, 可以得到式(22)–(24)等价于

$$\Phi_{iii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ijj} + \Phi_{iji} + \Phi_{jii} &< 0, \\ i = 1, 2, \dots, q, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ijk} + \Phi_{ikj} + \Phi_{jik} + \Phi_{jki} + \Phi_{kij} + \Phi_{kji} &< 0, \\ i = 1, 2, \dots, q-2, \quad i < j < k, \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_{ijk} &= \text{sym}\{((a-b)X + (a+b)X^T) \cdot \\ &(\hat{A}_i + \hat{G}_i\hat{F}_i(\sigma)\hat{H}_i + \hat{B}K_j\hat{C}_k)\}. \end{aligned}$$

由式(25)–(27)易得以下的不等式成立:

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q h_i(z)h_j(z)h_k(z)\Phi_{ijk} < 0. \quad (28)$$

因此, 从式(28)得

$$\begin{aligned} &\text{sym}\{((a-b)X + (a+b)X^T)(\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q h_i(z) \cdot \\ &h_j(z)h_k(z)(\hat{A}_i + \hat{G}_i\hat{F}_i(\sigma)\hat{H}_i + \hat{B}K_j\hat{C}_k))\} < 0. \end{aligned} \quad (29)$$

结合引理1和式(29), 可以得出系统(11)是渐近稳定的. 故不确定非方广义分数阶T-S模糊系统(1)是鲁棒镇定的.

注2 同样是解决非方广义分数阶T-S模糊系统的镇定问题, 文献[25]中的定理3.2含有8个未知变量. 变量个数多并且形式复杂可能会在数值求解时造成误差. 而本文的定理1只含有3个未知变量, 相比于文献[25]中的定理3.2, 定理1中

变量的个数更少, 形式更加简洁. 并且结果由线性矩阵不等式表示, 可以通过MATLAB中的LMI工具箱直接进行求解.

4 仿真算例

在本节中, 提供了一个数值例子和一个实际例子来证实主要结论的有效性.

例1 考虑有下列参数的系统:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.8, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_1 &= \begin{bmatrix} -1.2 & 1 \\ -1.5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2.2 & 2 \\ -2.5 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= C_2 = [1 \ 0], \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$H_1 = [0.1 \ -0.2], \quad H_2 = [0.2 \ 0.1],$$

$$F_1(\sigma) = \sin \sigma, \quad F_2(\sigma) = \cos \sigma.$$

隶属度函数为

$$h_1(z(t)) = \sin x_1(t) \sin x_2(t),$$

$$h_2(z(t)) = 1 - h_1(z(t)).$$

令 $E_c = [0 \ 1]$, 使用动态补偿器(5)去研究例1中的镇定问题. 通过使用MATLAB中的LMI工具箱, 得到式(9)具有可行解, 并且可行解为

$$\begin{aligned} H &= 10^8 \times \begin{bmatrix} -3.2121 & 0 & 3.2121 & 0 \\ 0 & -3.2121 & 3.2121 & 0 \\ 3.2121 & 3.2121 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.6061 \end{bmatrix}, \\ G &= 10^8 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3.2121 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.6061 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

通过计算式(10), 得到增益矩阵 L 为

$$L = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这表明系统(8)可以正常化. 另外, 利用获得的增益矩阵 L , 还可以计算出系统(11)中的参数矩阵 $\hat{A}_i$, $\hat{B}$, $\hat{C}_k$, $\hat{G}_i$, $\hat{H}_i$, $i, j = 1, 2$. 通过求解定理1中的线性矩阵不等式(13)–(16), 可以得到如下可行解:

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{bmatrix} 0.0510 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0065 \end{bmatrix}, \\ X_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.0065 \\ 0.0065 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.0437 & -0.0112 \\ -0.0293 & 0.0720 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0.1004 & 0.1613 & 0.9312 \\ -0.0764 & 3.7228 & -0.6389 \end{bmatrix},$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 0.1240 & 0.0105 & -0.3193 \\ -0.0870 & -1.2770 & -0.0323 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = 0.4680.$$

通过计算式(20), 得到增益矩阵 $K_j, j = 1, 2$ 为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.0692 & 0.0370 & 9.8868 \\ -6.3323 & 301.9885 & -53.0877 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.3170 & 0.6670 & -3.2799 \\ -7.2262 & -103.6781 & -2.2054 \end{bmatrix}.$$

给定系统(11)的初始条件为

$$x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 0.3,$$

$$x_{c1}(0) = -0.2, x_{c2}(0) = -0.5.$$

在上述增益矩阵下, 图1和图2分别绘制了不确定非方广义分数阶T-S模糊系统的状态响应曲线和动态补偿器的状态响应曲线. 从图1和图2可以看出, 系统的状态趋近于零. 这表明设计的动态补偿器可以使得不确定非方广义分数阶T-S模糊系统镇定.

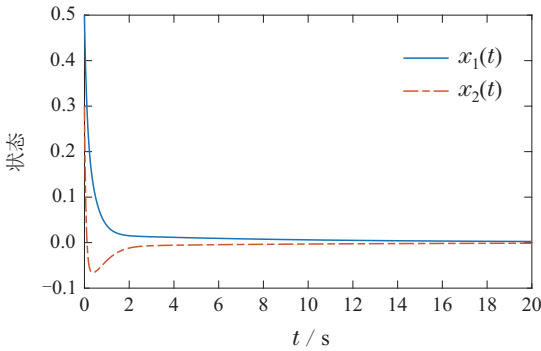


图1 不确定非方广义分数阶T-S模糊系统的状态响应

Fig. 1 State response of the uncertain rectangular descriptor fractional order T-S fuzzy system

注3 值得注意的是, 文献[25]的结果由双线性矩阵不等式表示, 需要通过迭代LMI算法进行求解. 不同于文献[25], 本文的结果由线性矩阵不等式表示, 可以通过LMI工具箱直接进行求解. 简单的求解方法和过程不易在数值求解时造成误差.

例2 考虑图3中的LC振荡电路. C_1, C_2 表示非线性电容, 其他符号的物理意义与文献[18]中的相同. 根据基尔霍夫定律有

$$C_1 D^\alpha u_{C_1} = i_1 - i_2,$$

$$C_2 D^\alpha u_{C_2} = i_2,$$

$$L_1 D^\alpha i_1 = -u_s + u_{C_1},$$

$$L_2 D^\alpha i_2 = -u_{C_1} + u_{C_2},$$

$$L_1 D^\alpha i_1 + L_2 D^\alpha i_2 = -u_s + u_{C_2}.$$

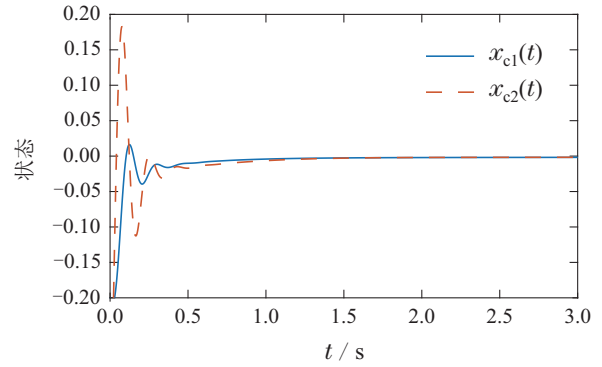


图2 动态补偿器的状态响应

Fig. 2 State response of the dynamic compensator

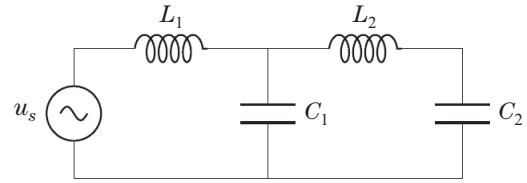


图3 分数阶LC振荡电路

Fig. 3 Electronic network

以上系统可以被表示为

$$ED^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu_s, \quad (30)$$

其中:

$$x(t) = [u_{C_1} \ u_{C_2} \ i_1 \ i_2]^T,$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & L_1 & L_2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1]^T.$$

通过观察系统(30), 可以得到 $x(t) \in \mathbb{R}^4, E \in \mathbb{R}^{5 \times 4}, A \in \mathbb{R}^{5 \times 4}, B \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$. 因为矩阵 E 和 A 的行数和列数不相等, 所以, 可得系统(30)是非方广义分数阶系统. 考虑到非线性电容 C_1, C_2 , 非线性系统(30)可用以下T-S模糊模型表示:

规则 i : 如果 $z_1(t)$ 是 $H_{i1}, \dots, z_s(t)$ 是 H_{is} , 则

$$ED^\alpha x(t) = A_i x(t) + Bu_s, \quad (31)$$

其中

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_{1i}} & -\frac{1}{C_{1i}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{2i}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, q.$$

取 $q = 2, C_{11} = 1, C_{12} = 2, C_{21} = 1, C_{22} = 2$ 和 $L_1 = 1, L_2 = 2$. 令 $E_c = [0 \ 1]$, 使用动态补偿器(5), 通过使用MATLAB中的LMI工具箱计算式(9), 得到可行解如下:

$$H = 10^6 \times$$

$$\begin{bmatrix} -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.1837 & 4.1836 & 0 \\ 0 & 0 & 4.1837 & 0.0001 & -4.1837 & 0 \\ 0 & 0 & 4.1836 & -4.1837 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = 10^7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1.2551 & 0.4184 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由式(10)得增益矩阵 L 为

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.0000 & -1.9999 & 2.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.6262 \end{bmatrix}.$$

这表明系统(31)是可正常化的. 根据例1中给出的方法所规定的步骤, 能够使系统(30)镇定.

5 结论

本文研究了不确定非方广义分数阶T-S模糊系统的鲁棒镇定问题. 通过使用一个新的T-S模糊动态补偿器可以将非方广义分数阶T-S模糊系统转化为方形广义分数阶T-S模糊系统. 然后, 应用矩阵奇异值分解和LMI方法, 对方形广义分数阶T-S模糊系统进行研究, 从而提出鲁棒镇定的充分条件. 该条件仅包含一个矩阵变量, 形式简洁并且由线性矩阵不等式表示, 可以通过MATLAB中的LMI工具箱直接进行求解. 最后一个数值例子说明了主要结论的有效性. 一个非方广义分数阶T-S模糊实际电路说明了研究内容具有实际应用性.

参考文献:

- [1] ZHANG Q, SHANG Y L, CUI N X, et al. A novel fractional variable-order equivalent circuit model and parameter identification of electric vehicle Li-ion batteries. *ISA Transactions*, 2020, 97: 448 – 457.
- [2] SABIR Z, RAJA M A Z, GUIRAO J L G, et al. A novel design of fractional Meyer wavelet neural networks with application to the nonlinear singular fractional Lane-Emden systems. *Alexandria Engineering Journal*, 2021, 60(2): 2641 – 2659.
- [3] XIAN Yongju, XIA Cheng, XU Changbiao. New chaotic system and the adaptive synchronization control of its fractional order system. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(6): 878 – 886.
- [4] (鲜永菊, 夏诚, 徐昌彪. 新混沌系统及其分数阶系统的自适应同步控制. 控制理论与应用, 2018, 35(6): 878 – 886.)
- [5] XU Z, CHEN W. A fractional-order model on new experiments of linear viscoelastic creep of Hami Melon. *Computers & Mathematics with Applications*, 2013, 66(5): 677 – 681.
- [6] MATIGNON D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. *Computational Engineering in Systems Applications*, 1996, 2: 963 – 968.
- [7] PODLUBNY I. Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ -controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208 – 214.
- [8] LI Y, CHEN Y Q, PODLUBNY I. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 2009, 45(8): 1965 – 1969.
- [9] LU J G, CHEN G R. Robust stability and stabilization of fractional order interval systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1294 – 1299.
- [10] LIANG Shu, PENG Cheng, WANG Yong. Improved linear matrix inequalities stability criteria for fractional order systems and robust stabilization synthesis: The $0 < \alpha < 1$ case. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(4): 532 – 535.
- [11] (梁舒, 彭程, 王永. 分数阶系统线性矩阵不等式稳定判据的改进与鲁棒镇定: $0 < \alpha < 1$ 的情况. 控制理论与应用, 2013, 30(4): 532 – 535.)
- [12] MISHRA V K, TOMAR N K. On complete and strong controllability for rectangular descriptor systems. *Circuits Systems and Signal Processing*, 2016, 35(4): 1395 – 1406.
- [13] MOYSIS L, GIAKOURIS A, GUPTA M K. Observers for rectangular descriptor systems with output nonlinearities: application to secure communications and microcontroller implementation. *International Journal of Dynamics and Control*, 2021, 9: 530 – 540.
- [14] ZHANG X F, CHEN Y Q. Admissibility and robust stabilization of continuous linear singular fractional order systems with the fractional order α : The $0 < \alpha < 1$ case. *ISA Transactions*, 2018, 82: 42 – 50.
- [15] MARIR S, CHADLI M, BOUAGADA D. New admissibility conditions for singular linear continuous-time fractional-order systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(2): 752 – 766.
- [16] WEI Y H, TSE P W, ZHAO Y, et al. The output feedback control synthesis for a class of singular fractional order systems. *ISA Transactions*, 2017, 69: 1 – 9.
- [17] ZHANG X F, LI B X. Robust stabilization of uncertain descriptor fractional-order systems with the fractional order α ($0 < \alpha < 1$). *Proceedings of the 28th Chinese Control and Decision Conference*. Yinchuan: IEEE, 2016: 560 – 563.
- [18] ZHANG Guoshan. Regularization and pole-placement of descriptor systems by dynamic compensation. *Control and Decision*, 2006, 21(1): 51 – 55.
- [19] (张国山. 基于动态补偿的广义系统的正则化与极点配置. 控制与决策, 2006, 21(1): 51 – 55.)
- [20] ZHANG G S, ZUO Z Q, LIU W Q, et al. Stabilization of rectangular descriptor systems. *Proceedings of the 27th Chinese Control Conference*. Kunming: IEEE, 2008: 777 – 781.
- [21] GUPTA M K, TOMAR N K, BHAUMIK S. Full-and reduced-order observer design for rectangular descriptor systems with unknown inputs. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(3): 1250 – 1264.
- [22] TIAN J M, MA S P. Existence of non-impulsive unique solution and stability for discrete-time linear rectangular descriptor Markov jump systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(10): 4245 – 4251.
- [23] ZHANG X F, ZHAO Z L. Robust stabilization for rectangular descriptor fractional order interval systems with order $0 < \alpha < 1$. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, 366: 1 – 10.

- [21] ZHAO Z L, ZHANG X F. Output feedback stabilization of uncertain rectangular descriptor fractional order systems. *IEEE Access*, 2019, 7: 108948 – 108956.
- [22] HUANG X, WANG Z, LI Y, et al. Design of fuzzy state feedback controller for robust stabilization of uncertain fractional order chaotic systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, 351(12): 5480 – 5493.
- [23] ZHANG X F, HUANG W K, WANG Q G. Robust H-infinity adaptive sliding mode fault tolerant control for T-S fuzzy fractional order systems with mismatched disturbances. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Regular Papers*, 2021, 68(3): 1297 – 1307.
- [24] LIN C, CHEN J, CHEN B, et al. Fuzzy normalization and stabilization for a class of nonlinear rectangular descriptor systems. *Neurocomputing*, 2017, 219: 263 – 268.
- [25] ZHANG X F, ZHAO Z L. Normalization and stabilization for rectangular singular fractional order T-S fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 2019, 381: 140 – 153.

作者简介:

张雪峰 副教授, 博士, 目前研究方向分数阶系统、广义系统、粗糙集数据分析等, E-mail: zhangxuefeng@mail.neu.edu.cn;

艾洁 硕士研究生, 目前研究方向为分数阶非方系统, E-mail: aijiex@stumail.neu.edu.cn;

赵泽丽 博士研究生, 目前研究方向为分数阶系统, E-mail: 813763171@qq.com.