带有迭代学习外环的快速路入口匝道无模型自适应预测控制

张茂帅, 侯忠生†

(青岛大学 自动化学院, 山东 青岛 266071)

摘要: 针对快速路交通系统复杂时变以及难以建模的特点, 首先, 本文设计了基于无模型自适应预测控制的快速路入口匝道控制方案. 其次, 根据快速路交通系统具有重复性特点, 本文在无模型自适应预测控制方法的基础上引入开环迭代学习控制, 提出一种带有迭代学习前馈外环的无模型自适应入口匝道预测控制方案. 相比无模型自适应预测控制方案, 该方案可以利用迭代学习前馈控制器补偿系统可重复扰动, 实现系统的完全跟踪. 值得说明的是, 预测控制器和学习控制器可以独立工作也可以联合工作. 最后, 文章给出了控制方案的收敛性分析, 并通过交通流仿真验证了所提控制方案的有效性.

关键词: 无模型自适应预测控制; 迭代学习控制; 反馈前馈控制; 快速路交通控制; 匝道控制

引用格式: 张茂帅, 侯忠生. 带有迭代学习外环的快速路入口匝道无模型自适应预测控制. 控制理论与应用, 2023, 40(5): 781 – 791

DOI: 10.7641/CTA.2021.10547

Model free adaptive predictive ramp control for freeway with iterative learning outer-loop

ZHANG Mao-shuai, HOU Zhong-sheng†

(School of Automation, Qingdao University, Qingdao Shandong 266071, China)

Abstract: In view of the complexity, time-varying and modeling difficulty of freeway traffic systems, a ramp metering control scheme based on the model free adaptive predictive control is designed. Secondly, according to the repeatability of freeway traffic systems, a model free adaptive ramp metering predictive control scheme (MFAPC+ILC) with iterative learning feedforward outer-loop is proposed for performance enhancement. Compared with the model free adaptive predictive control scheme, the MFAPC+ILC control scheme can use the learning mechanism to compensate the repeatable disturbance of the systems and realize the perfect tracking of the systems. It is worth noting that predictive controller and learning controller can work independently or jointly. Finally, the convergence analysis of the proposed scheme is given, and the effectiveness of the scheme is verified by the traffic flow simulation.

Key words: model free adaptive predictive control; iterative learning control; feedback feedforward control; freeway traffic control; ramp metering

Citation: ZHANG Maoshuai, HOU Zhongsheng. Model free adaptive predictive ramp control for freeway with iterative learning outer-loop. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(5): 781 – 791

1 引言

近年来, 随着城市机动车数量的急剧增加, 带来的城市道路拥堵问题越来越严重, 即便现在每个城市都建起了快速路等交通设施, 依然无法有效解决车流拥堵问题. 因此为了有效缓解拥堵问题, 同时促进城市快速路上的车辆流通效率, 有必要对快速路交通系统实施人为干预控制.

入口匝道控制是通过调节从入口匝道进入快速路上的车流量, 保证快速路上的车辆行驶处于畅通状态, 进而可以解决快速路上的拥堵问题[1]. 目前, 有关入口匝道控制的方法已经有很多种, 如数学规划方法[2]、线性二次型调节器[3]、PI型控制器[4]、最优控制理论[5]等. 在众多的入口匝道控制方法中, (asservissement lineaired entree autoroutiere, ALINEA)控制方法是目前最常用的控制方法[6]. 该方法属于带有固定控制增益的PI型控制方法, 当交通系统的结构和参数发生变化时, 其控制效果很难得到保证.

预测控制, 即模型预测控制(model predictive con-

收稿日期: 2021−06−25; 录用日期: 2021−12−23.
†通信作者. E-mail: zhshhou@bjtu.edu.cn; Tel.: +86 136991180575.
本文责任编委: 王卓.
国家自然科学基金项目(61833001)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61833001).

trol, MPC), 是20世纪70年代后期从工业实践中发展起来的, 该方法需要已知系统精确模型. 其基本思想是利用模型预测被控对象在预测时域内的输出, 然后根据滚动优化原理, 通过最小化滑动窗口内的指标函数计算得到一个控制输入序列, 并将该序列的第1个控制输入信号用于被控对象, 最后应用误差信息反馈矫正以实现系统跟踪期望的输出轨迹[7]. 文献[8]设计了基于模型预测控制的入口匝道控制方案, 该算法需要已知系统的精确模型, 但对于具有强非线性的交通系统建立精确的系统模型是非常困难的. 无模型自适应控制(model free adaptive control, MFAC)是由侯忠生教授首次提出的, 其基本过程是通过动态线性化技术在系统的每一个工作点处建立等价的数据模型, 并以此数据模型代替离散时间非线性系统进行控制器的设计[9–11]. 文献[12]首次将MFAC方法应用到快速路入口匝道中, 并通过与ALINEA方法比较, 说明了采用无模型自适应控制方法的车流密度控制效果更好. 无模型自适应预测控制(model free adaptive predictive control, MFAPC)结合了预测控制和无模型自适应控制各自的优点, 是一种不需要建立系统精确模型仅使用闭环系统I/O数据的控制方法. 该方法可以处理一些强非线性、参数时变和结构时变的非线性系统, 相比MFAC方法具有更强的鲁棒性[13]. 目前, MFAPC方法在一些应用中也得到了使用[14–16].

迭代学习控制(iterative learning control, ILC)是在有限时间内处理具有重复运行系统控制问题的一个独特理论分支. 它不需要精确的系统模型信息, 其特点是当前运行批次该时刻的控制输入信号仅由系统前一运行批次相同时刻的控制输入信息和跟踪误差信息来修正, 进而对系统进行不断地学习与控制, 随着迭代次数的增加, 系统可以对期望信号实现完全跟踪[17]. 关于迭代学习控制的最新研究成果可见文献[18–19]. 值得说明的是, 用完全跟踪收敛性来描述具有重复性的快速路交通系统是最合适的. 文献[20]首次将ILC方法应用到入口匝道控制中, 结果显示随着迭代次数的增加, 快速路上的车流密度几乎完全接近设置的期望密度. 文献[21]利用模块化设计思想提出了带有ILC前馈控制的MFAC入口匝道控制方法, 系统首次运行时仅采用MFAC控制方法, 从第2次迭代开始系统由MFAC控制器和ILC控制器共同控制. 文献[22]在现有的反馈控制中引入ILC前馈控制, 组成新的反馈前馈控制, 并将该方法应用到入口匝道控制中取得了很好的控制效果.

鉴于以上分析, 本文针对具有强非线性的快速路交通系统, 首先设计了基于MFAPC算法的快速路入口匝道控制方案. 相比MPC方法, 该方法不需要建立精确的系统模型, 仅利用系统的I/O数据即可; 相比MFAC方法, 该方法可以引入未来时刻的期望输出信号, 减小跟踪误差, 增强系统的鲁棒性. 其次, 借助文献[21–22]中模块化设计思想, 在已有的MFAPC反馈控制中引入ILC前馈控制, 提出了带有迭代学习外环的无模型自适应入口匝道预测控制方案. 通过仿真对比研究, 该方法可以明显提高系统的控制品质. 并且对于含重复扰动系统, 可以保证跟踪误差随迭代次数增加收敛到零, 对于含非重复扰动系统, 跟踪误差会收敛到一个较小的范围内, 理论分析也证明了系统跟踪误差是收敛的. 值得说明的是, 在MFAPC+ILC控制方案中, 无需改变原MFAPC控制器的结构, 直接在MFAPC反馈控制器的外环上添加ILC控制器即可.

2 快速路交通模型及假设

2.1 交通流模型

本文选取的交通流模型是由Papageorgiou[23]提出, 如式(1)–(4)所示. 整条快速路按一定距离平均分成多个路段, 每个路段中最多设置一个入口匝道和一个出口匝道, 如图1所示. 需说明的是, 此处交通流模型不用于控制器的设计, 仅仅是产生系统的输入输出数据.

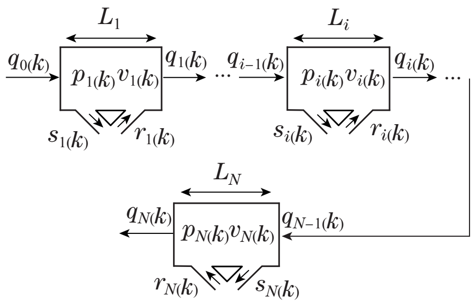


图 1 快速路路段划分示意图

Fig. 1 Schematic diagram of freeway section division

$$\rho_i(k+1)=\rho_i(k)+\frac{T}{L_i}(q_{i-1}(k)-q_i(k)+r_i(k)-s_i(k)),\quad(1)$$

$$q_i(k)=\rho_i(k)v_i(k),\quad(2)$$

$$v_i(k+1)=v_i(k)+\frac{T}{\tau}(V(\rho_i(k))-v_i(k))+\frac{T}{L_i}v_i(k)(v_{i-1}(k)-v_i(k))-\frac{\gamma T(\rho_{i+1}(k)-\rho_i(k))}{\tau L_i(\rho_i(k)+\kappa)},\quad(3)$$

$$V(\rho_i(k))=v_{\text{free}}(1-(\frac{\rho_i(k)}{\rho_{\text{jam}}})^l)^m,\quad(4)$$

其中: T是采样周期; $k\in\{0,1,\cdots,K\}$表示第k个采样间隔; $i\in\{1,2,\cdots,N\}$表示路段编号, N表示路段总数; $\rho_i(k)$表示路段i在k时刻的平均车流密度(veh/lane/km); $v_i(k)$表示路段i在k时刻的平均车流速度(km/h); $q_i(k)$表示k时刻从路段i进入路段$i+1$的车流量(veh/h); $r_i(k)$表示k时刻从入口匝道进入路段i的车流量(veh/h); $s_i(k)$表示k时刻从出口匝道流出路段i的车流量(veh/h); L_i是路段i的长度(km);

$v_{\rm free}$和$\rho_{\rm jam}$分别是自由流速(km/h)和最大可能车流密度(veh/lane/km); $\tau, \gamma, \kappa, l, m$是常数, 反映特定交通系统的道路几何特点、车辆特征、驾驶员行为等.

2.2 边界条件

基于宏观交通流模型的边界条件设置如下:

$$\rho_0(k)=\frac{q_0(k)}{v_1(k)}, \tag{5}$$

$$v_0(k)=v_1(k), \tag{6}$$

$$\rho_{N+1}(k)=\rho_N(k), \tag{7}$$

$$v_{N+1}(k)=v_N(k),\ k\in\{0,1,\cdots,K\}, \tag{8}$$

其中: $q_0(k)$表示k时刻时进入路段1的车流量(veh/h), $v_0(k)$是k时刻时进入路段1的平均车流速度(km/h).

2.3 控制目标

快速路入口匝道控制的目标是通过找到合适的入口匝道流量$r_i(k)$, 使得入口匝道所在快速路路段的车流密度$\rho_i(k)$等于设置的期望密度$\rho_{\rm d}(k)$, 最终使得整条快速路的车流密度都接近一个密度期望值.

2.4 模型转换及假设条件

将宏观交通流模型式(2)代入式(1)中, 得密度方程

$$\begin{aligned}&\rho_i(k+1)=\\&(1-\frac{T}{L_i}v_i(k))\rho_i(k)+\frac{T}{L_i}v_{i-1}(k)\rho_{i-1}(k)+\\&\frac{T}{L_i}r_i(k)-\frac{T}{L_i}s_i(k)=a_i(k)\rho_i(k)+b_i(k)\rho_{i-1}(k)+\\&c_i(k)r_i(k)-c_i(k)s_i(k),\end{aligned} \tag{9}$$

其中: $a_i(k)=1-\dfrac{T}{L_i}v_i(k), b_i(k)=\dfrac{T}{L_i}v_{i-1}(k), c_i(k)=\dfrac{T}{L_i}$.

定义

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k)=[v_1(k)\ \ v_2(k)\ \ \cdots\ \ v_N(k)]^{\rm T},\\\boldsymbol{y}(k)=[\rho_1(k)\ \ \rho_2(k)\ \ \cdots\ \ \rho_N(k)]^{\rm T},\\\boldsymbol{u}(k)=[r_1(k)\ \ r_2(k)\ \ \cdots\ \ r_N(k)]^{\rm T},\\\boldsymbol{d}(k)=[s_1(k)\ \ s_2(k)\ \ \cdots\ \ s_N(k)]^{\rm T},\end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(k))=\begin{bmatrix}a_1(k)&0&0&\cdots&0&0\\b_2(k)&a_2(k)&0&\cdots&0&0\\0&b_3(k)&a_3(k)&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&b_N(k)&a_N(k)\end{bmatrix}_{N\times N},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}c_1(k)&0&\cdots&0\\0&c_2(k)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&c_N(k)\end{bmatrix}_{N\times N},$$

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(k))=[b_1(k)\rho_0(k)\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]^{\rm T}_{N\times 1}.$$

宏观交通流速度方程式(3)和密度方程式(9)可转换为如下状态空间模型:

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{y}(k)), \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(k+1)=&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(k))\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)+\\&\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(k))-\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}(k),\end{aligned} \tag{11}$$

其中: 式(10)为式(3)对应的速度方程, 式(11)为式(9)对应的密度方程. 值得说明的是, $\boldsymbol{d}(k)$是从出口匝道流出的车流量, 该流量不可控, 被看作是未知扰动. $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot)=[f_1(\cdot,\cdot)\ \ \cdots\ \ f_N(\cdot,\cdot)]^{\rm T}$为式(3)中对应的向量值函数.

在本文中, $\|\cdot\|$定义为无穷范数, M是一个$s\times t$的矩阵, 表示形式如下:

$$\|\cdot\|=\max_{1\leqslant i\leqslant s}\sum_{j=1}^{t}|M_{i,j}|.$$

假设 1 函数$\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot)$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(k))$, $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(k))$在有界区域$\varOmega=X\times Y$上满足一致全局Lipschitz条件, 即

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1(k),\boldsymbol{y}_1(k))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2(k),\boldsymbol{y}_2(k))\|\leqslant\\&k_x\|\boldsymbol{x}_1(k)-\boldsymbol{x}_2(k)\|+k_y\|\boldsymbol{y}_1(k)-\boldsymbol{y}_2(k)\|,\\&\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1(k))-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_2(k))\|\leqslant k_A\|\boldsymbol{x}_1(k)-\boldsymbol{x}_2(k)\|,\\&\|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_1(k))-\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_2(k))\|\leqslant k_\eta\|\boldsymbol{x}_1(k)-\boldsymbol{x}_2(k)\|,\end{aligned}$$

其中: k_x, k_y, k_A, k_η是Lipschitz常数; X和Y是速度和密度的取值范围.

假设 2 在有限时间区间$[0,K]$上, 存在有界的控制输入$\boldsymbol{u}_{\rm d}(k)$, 它可以精确地驱动系统式(11)的输出$\boldsymbol{y}(k)$等于期望信号$\boldsymbol{y}_{\rm d}(k)$.

注 1 由于宏观交通流模型(1)–(4)在任意紧集$\varOmega$上对所有变量可微, 系统的状态(速度–密度)在实际中有限, 且时间间隔也有限, 因此假设1条件满足.

3 MFAPC入口匝道控制

3.1 控制方案设计

引理 1[24] 针对密度方程(11)满足假设1, 当$\|\Delta\boldsymbol{u}(k)\|\neq 0$时, 一定存在一个被称为伪雅可比矩阵(pseudo Jacobian matrix, PJM)的时变参数$\boldsymbol{\phi}(k)\in\mathbb{R}^{N\times N}$, 使得密度方程(11)可转化为如下紧格式动态线性化(compact form dynamic linearization, CFDL)数据模型:

$$\Delta\boldsymbol{y}(k+1)=\boldsymbol{\phi}(k)\Delta\boldsymbol{u}(k), \tag{12}$$

其中$\|\boldsymbol{\phi}(k)\|\leqslant b$, 并且定义

$$\boldsymbol{\phi}(k)=\begin{bmatrix}\phi_1(k)&0&\cdots&0\\0&\phi_2(k)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\phi_N(k)\end{bmatrix}_{N\times N}.$$

证 由$\Delta\boldsymbol{y}(k+1)$的定义和系统(11)可知

$$\begin{aligned}
&\Delta \boldsymbol{y}(k+1)=\boldsymbol{y}(k+1)-\boldsymbol{y}(k)= \\
&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(k))\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(k))-\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}(k)- \\
&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(k))\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1)-\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(k))+ \\
&\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}(k)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(k))\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1)+ \\
&\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(k))-\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(k-1))\boldsymbol{y}(k-1)- \\
&\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1)-\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(k-1))+\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}(k-1)= \\
&\boldsymbol{B}\Delta \boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{\varphi}(k), \qquad (13)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}(k)=\ &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(k))\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1)+\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(k))- \\
&\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(k-1))\boldsymbol{y}(k-1)- \\
&\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1)-\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(k-1))+\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}(k-1).
\end{aligned}$$

对每一个固定时刻k, 考虑如下含有变量$\boldsymbol{\psi}(k)=\mathrm{diag}\{\psi_1(k),\psi_2(k),\cdots,\psi_N(k)\}$的数据方程:

$$\boldsymbol{\varphi}(k)=\boldsymbol{\psi}(k)\Delta \boldsymbol{u}(k). \qquad (14)$$

由于$\|\Delta \boldsymbol{u}(k)\|\neq 0$, 方程必然存在一组解$\boldsymbol{\psi}^*(k)$, 使得$\boldsymbol{\varphi}(k)=\boldsymbol{\psi}^*(k)\Delta \boldsymbol{u}(k)$. 令$\boldsymbol{\phi}(k)=\boldsymbol{\psi}^*(k)+\boldsymbol{B}$, 则有

$$\Delta \boldsymbol{y}(k+1)=\boldsymbol{\phi}(k)\Delta \boldsymbol{u}(k). \qquad (15)$$

证毕.

基于式(12)数据模型, 可以给出如下一步向前预测输出方程:

$$\boldsymbol{y}(k+1)=\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{\phi}(k)\Delta \boldsymbol{u}(k). \qquad (16)$$

基于式(16), 可以进一步给出如下L步向前预测输出方程:

$$\begin{cases}
\boldsymbol{y}(k+1)=\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{\phi}(k)\Delta \boldsymbol{u}(k), \\
\boldsymbol{y}(k+2)=\boldsymbol{y}(k+1)+\boldsymbol{\phi}(k+1)\Delta \boldsymbol{u}(k+1)= \\
\qquad \boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{\phi}(k)\Delta \boldsymbol{u}(k)+ \\
\qquad \boldsymbol{\phi}(k+1)\Delta \boldsymbol{u}(k+1), \\
\qquad \vdots \\
\boldsymbol{y}(k+L)=\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{\phi}(k)\Delta \boldsymbol{u}(k)+\cdots+ \\
\qquad \boldsymbol{\phi}(k+L-1)\Delta \boldsymbol{u}(k+L-1).
\end{cases} \qquad (17)$$

为便于书写, 定义$\boldsymbol{A}(k)$, $\Delta \boldsymbol{U}_{LN}(k)$, $\boldsymbol{Y}_{LN}(k+1)$, $\boldsymbol{E}(k)$等, 如式(23)所示. $\Delta \boldsymbol{U}_{LN}(k)$是控制输入增量向量, $\boldsymbol{Y}_{LN}(k+1)$是L步向前预测输出向量, 则式(17)可简写为

$$\boldsymbol{Y}_{LN}(k+1)=\boldsymbol{E}(k)\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{A}(k)\Delta \boldsymbol{U}_{LN}(k). \qquad (18)$$

如果$\Delta \boldsymbol{u}(k+j-1)=0, j>L_u$, 则预测输出方程(18)变为

$$\boldsymbol{Y}_{LN}(k+1)=\boldsymbol{E}(k)\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{A}_1(k)\Delta \boldsymbol{U}_{L_uN}(k), \qquad (19)$$

其中: L_u被称为控制时域常数, 且需满足$L_u\leqslant L$, $\Delta \boldsymbol{U}_{L_uN}(k)=[\Delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\ \cdots\ \Delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k+L_u-1)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}_1(k)=$

$$\begin{bmatrix}
\phi(k) & 0 & \cdots & 0 \\
\phi(k) & \phi(k+1) & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\phi(k) & \phi(k+1) & \cdots & \phi(k+L_u-1) \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\phi(k) & \phi(k+1) & \cdots & \phi(k+L_u-1)
\end{bmatrix}_{LN\times L_uN}.$$

考虑如下控制输入准则函数:

$$\begin{aligned}
J=&\sum_{l=1}^{L}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}(k+l)-\boldsymbol{y}(k+l))^2+ \\
&\lambda\sum_{j=0}^{L_u-1}\Delta \boldsymbol{u}^2(k+j),
\end{aligned} \qquad (20)$$

其中: λ是权重因子; $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}(k+l)$是$(k+l)$时刻的期望密度; $l=1,\cdots,L$.

令$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{d}}(k+1)=[\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}(k+1)\ \cdots\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}(k+L)]^{\mathrm{T}}$, 则式(20)可改写为

$$\begin{aligned}
J=&[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{d}}(k+1)-\boldsymbol{Y}_{LN}(k+1)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{d}}(k+1)- \\
&\boldsymbol{Y}_{LN}(k+1)]+\lambda\Delta \boldsymbol{U}_{L_uN}^{\mathrm{T}}(k)\Delta \boldsymbol{U}_{L_uN}(k).
\end{aligned} \qquad (21)$$

将式(19)代入式(21)中, 利用优化条件$\partial J/\partial \boldsymbol{U}_{L_uN}(k)=0$, 可得如下输入控制律:

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{U}_{L_uN}(k)=&[\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{A}_1(k)+\lambda \boldsymbol{I}]^{-1}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}(k)\times \\
&[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{d}}(k+1)-\boldsymbol{E}(k)\boldsymbol{y}(k)],
\end{aligned} \qquad (22)$$

$$\begin{cases}
\boldsymbol{Y}_{LN}(k+1)=[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k+1)\ \ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k+2)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k+L)]^{\mathrm{T}}, \\
\Delta \boldsymbol{U}_{LN}(k)=[\Delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\ \ \Delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k+1)\ \ \cdots\ \ \Delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k+L-1)]^{\mathrm{T}}, \\
\boldsymbol{E}(k)=[\boldsymbol{I}_{N\times N}\ \ \boldsymbol{I}_{N\times N}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{I}_{N\times N}]^{\mathrm{T}}, \\
\boldsymbol{A}(k)=\begin{bmatrix}
\phi(k) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\phi(k) & \phi(k+1) & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\phi(k) & \phi(k+1) & \cdots & \phi(k+L_u-1) & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\phi(k) & \phi(k+1) & \cdots & \phi(k+L_u-1) & \cdots & \phi(k+L-1)
\end{bmatrix}_{LN\times LN}.
\end{cases} \qquad (23)$$

因此, 当前时刻的控制输入可表示为

$$\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{u}(k-1)+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{U}_{L_uN}(k),\tag{24}$$

其中$\boldsymbol{g}=[\boldsymbol{I}_{N\times N}\ \ \boldsymbol{0}_{N\times N}\cdots\boldsymbol{0}_{N\times N}]^{\mathrm{T}}$.

由于$\boldsymbol{A}_1(k)$中的$[\boldsymbol{\phi}(k),\cdots,\boldsymbol{\phi}(k+L_u-1)]$是未知的, 所以式(22)和式(24)不可用. 为此考虑如下估计准则函数:

$$J(\boldsymbol{\phi}(k))=\|\Delta\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{\phi}(k)\Delta\boldsymbol{u}(k-1)\|^2+\mu\|\boldsymbol{\phi}(k)-\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-1)\|^2.\tag{25}$$

极小化准则函数(25)后, 可得改进投影算法如下:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}(k)=\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-1)+\frac{\eta}{\mu+\|\Delta\boldsymbol{u}(k-1)\|^2}(\Delta\boldsymbol{y}(k)-\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-1)\Delta\boldsymbol{u}(k-1))\Delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k-1).\tag{26}$$

根据文献[13]给出如下参数预报算法(27)–(28):

$$\boldsymbol{\theta}(k)=\boldsymbol{\theta}(k-1)+\frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-1)}{\varsigma+\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-1)\|^2}(\hat{\boldsymbol{\phi}}(k)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta}(k-1)),\tag{27}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}(k+j)=\boldsymbol{\theta}_1\hat{\boldsymbol{\phi}}(k+j-1)+\boldsymbol{\theta}_2\hat{\boldsymbol{\phi}}(k+j-2)+\cdots+\boldsymbol{\theta}_{n_p}\hat{\boldsymbol{\phi}}(k+j-n_p),\tag{28}$$

其中: $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-1)=[\hat{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{T}}(k-1)\ \cdots\ \hat{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{T}}(k-n_p)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\theta}(k)=[\boldsymbol{\theta}_1(k)\ \boldsymbol{\theta}_2(k)\ \cdots\ \boldsymbol{\theta}_{n_p}(k)]^{\mathrm{T}}$; n_p是适当的阶数, 其值通常选取$2\sim7$[25]. $j=1,\cdots,L_u-1, \mu>0, \eta\in(0,1], \delta\in(0,1]$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}(k)$是$\boldsymbol{\phi}(k)$的估计值.

结合文献[13], 进一步给出如下重置算法:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}(k)=\hat{\boldsymbol{\phi}}(1), \text{如果 } \|\hat{\boldsymbol{\phi}}(k)\|\leqslant\varepsilon \text{ 或 } \|\Delta\boldsymbol{u}(k)\|\leqslant\varepsilon \text{ 或 } \mathrm{sgn}(\hat{\boldsymbol{\phi}}(k))\neq\mathrm{sgn}(\hat{\boldsymbol{\phi}}(1)),\tag{29}$$

$$\boldsymbol{\theta}(k)=\boldsymbol{\theta}(1),\ \text{如果 } \|\boldsymbol{\theta}(k)\|\geqslant M,\tag{30}$$

其中sgn为符号函数. 式(29)可以使PJM估计算法(26)对时变参数具有更强的跟踪能力, 以及保证预报算法(28)的预测参数符号不变, 式(30)可以保证预测值$\hat{\boldsymbol{A}}_1(k)$有界.

因此, 可得当前时刻的控制输入算法

$$\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{u}(k-1)+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}[\hat{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{A}}_1(k)+\lambda\boldsymbol{I}]^{-1}\times\hat{\boldsymbol{A}}_1^{\mathrm{T}}(k)[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{d}}(k+1)-\boldsymbol{E}(k)\boldsymbol{y}(k)].\tag{31}$$

3.2 收敛性分析

定理 1　针对宏观交通流系统式(10)–(11)满足假设1–2, 当期望密度$\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}(k+1)=\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$为常数时, 快速路入口匝道采用MFAPC算法式(26)–(31)时, 总存在一个正数$\lambda_{\min}>0$, 使得当$\lambda>\lambda_{\min}$时, 有

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}(k+1)-\boldsymbol{y}(k+1)\|=0.$$

证明过程可参考文献[26].

注 2　一般情况下, 快速路交通流期望密度都会设置成一个常值. 从定理1中可以看出, 控制系统的收敛性仅与MFAPC控制器参数λ有关, 与交通流的参数无关.

注 3　本文设计的无模型自适应入口匝道预测控制方案与文献[6]和文献[12]最大的不同点是该控制方案引入了未来时刻的期望输出信号, 并根据未来时刻的期望输出信号找到适合当前时刻的控制输入信号. 通过引入未来时刻期望信号可以提高系统的控制品质, 增强系统的鲁棒性.

4 MFAPC+ILC入口匝道控制

4.1 MFAPC+ILC控制方案设计

带有迭代学习外环的无模型自适应入口匝道预测控制方案设计如下:

$$\boldsymbol{u}_n(k)=\boldsymbol{u}_n^b(k)+\boldsymbol{u}_n^f(k),\tag{32}$$

$$\boldsymbol{u}_n^b(k)=\boldsymbol{u}_n^b(k-1)+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}[\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}(k)+\lambda\boldsymbol{I}]^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}^{\mathrm{T}}(k)\times[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{d}}(k+1)-\boldsymbol{E}(k)\boldsymbol{y}_n(k)],\tag{33}$$

$$\boldsymbol{u}_n^f(k)=\boldsymbol{u}_{n-1}^f(k)+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{e}_{n-1}(k+1),\tag{34}$$

其中: n表示迭代次数, $\boldsymbol{u}_n^f(k)$是ILC前馈控制输入, $\boldsymbol{u}_n^b(k)$是MFAPC反馈控制输入. $\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}^{\mathrm{T}}(k)$中PJM参数估计算法、参数预报算法和重置算法仍采用式(26)–(30). $\boldsymbol{e}_{n-1}(k+1)$是$n-1$次迭代第$k+1$个采样时刻的输出误差, $\boldsymbol{\beta}=\mathrm{diag}\{\beta_1,\cdots,\beta_N\}$是迭代学习增益. 值得说明的是, 当$n=1$时, 系统仅由MFAPC反馈控制, 当$n\geqslant2$时, 系统由MFAPC反馈和ILC前馈共同控制. 此外, 带有迭代学习外环的无模型自适应预测控制系统结构图如图2所示.

4.2 收敛性分析

定理 2　针对宏观交通流系统(10)–(11)满足假设1–2, 采用控制律(32)–(34), 若$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}\|<1$时, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\|_\lambda\leqslant\sigma,\ \lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}(k)-\boldsymbol{y}_n(k)\|_\lambda\leqslant\sigma,$$
$$\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}(k)-\boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda\leqslant\sigma,$$

其中$\sigma>0$为有界常数. 当系统满足$\|\delta\boldsymbol{x}_n(0)\|=0$, $\|\boldsymbol{e}_n(0)\|=0$, $\|\boldsymbol{u}_n^b(0)\|=0$及$\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}(k+1)=\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$为常数时, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\|_\lambda=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}(k)-\boldsymbol{y}_n(k)\|_\lambda=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}(k)-\boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda=0.$$

证明过程见附录中定理2的证明.

注 4　从定理2中可以看出, 系统收敛性仅与学习增益$\boldsymbol{\beta}$有关, 与宏观交通流参数无关. 由条件$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}\|<1$可知, $0<\beta_i<2L_i/T$, 其中, L_i, T 是已知的常数. 因此, 可选择$\boldsymbol{\beta}=\mathrm{diag}\{\beta_1,\cdots,\beta_N\}$, 使之满足$0<\beta_i<2L_i/T$.

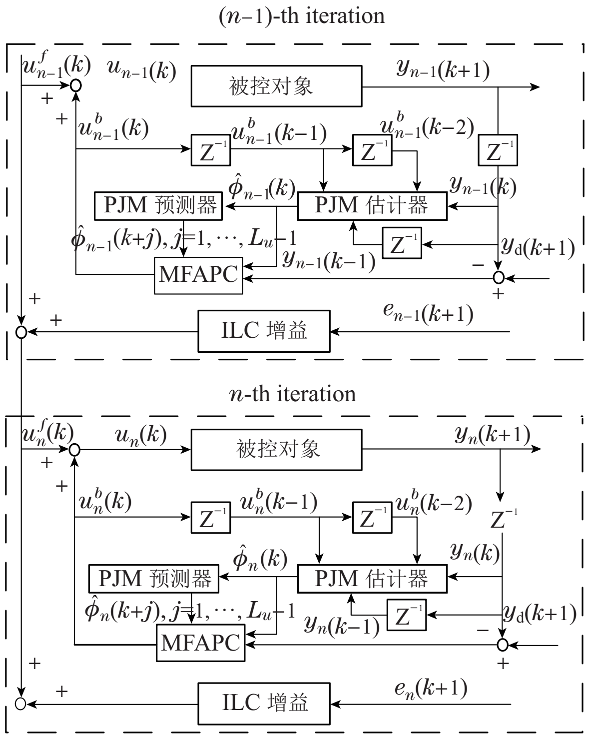


图 2 带有迭代学习外环的无模型自适应预测控制结构图

Fig. 2 Structure diagram of MFAPC with ILC outer loop

注 5 与仅采用无模型自适应预测控制方案相比, 带有迭代学习外环的无模型自适应预测控制方案可以利用前馈迭代学习控制器补偿系统重复性扰动, 实现系统的完全跟踪. 与文献[21]相比, 带有迭代学习外环的无模型自适应预测控制方案可以利用预测控制的优势提升系统的控制品质.

5 仿真研究

本文使用MATLAB仿真环境, 设置一条单车道快速路, 总长度6 km, 分成12个路段($i=1,\cdots,12$), 每个路段长为0.5 km. 为了模拟快速路交通系统中高峰时期的车流密度和非高峰时期的车流密度之间的变化, 在仿真中设置两种期望密度(临界密度理论值36.75 veh/(lane·km^{-1}), 如式(35)所示. 在整条快速路中, 设置2个入口匝道和1个出口匝道. 入口匝道位于路段2和路段9中, 出口匝道位于路段7中. 假设初次进入路段1中的车流量为1500 veh/h, 路段2和路段9的入口匝道流量需求和路段7的出口匝道流量如式(36)–(38)所示, 交通流模型参数和初值如表1所示.

$$\rho_{i,\mathrm{d}}(k)=\begin{cases}25,\ 0\leqslant k<150, & \text{早高峰之前},\\ 30,\ 150\leqslant k<450, & \text{早高峰期间},\\ 25,\ 450\leqslant k\leqslant 600, & \text{早高峰过后},\end{cases}\tag{35}$$

$$d_2(k)=\begin{cases}2.2k, & k<100,\\ 220, & 100\leqslant k<400,\\ -2.2k+1100, & 400\leqslant k\leqslant 500,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{36}$$

$$d_9(k)=260+14\sin(2\pi(k-50)/800),\tag{37}$$

$$s_7(k)=\begin{cases}-\dfrac{2}{225}(k-200)^2+200, & 50\leqslant k\leqslant 350,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{38}$$

表 1 交通流模型参数和初值

Table 1 Parameters and initial values of traffic flow model

v_{free}	$v_i(0)$	T	l	m
80 km/h	60 km/h	0.00417 h	1.8	1.7
ρ_{jam}	$\rho_i(0)$	γ	κ	τ
80 veh/ (lane · km^{-1})	25 veh/ (lane · km^{-1})	35	8	0.03

此外, 入口匝道处流入快速路的车流量在实际应用中还需满足如下需求约束条件:

$$r_i(k)\leqslant d_i(k)+\frac{l_i(k)}{T},\ i=\{2,9\},\tag{39}$$

其中: $d_i(k)$表示k时刻第i个入口匝道的流量需求; $l_i(k)$表示k时刻第i个入口匝道的排队长度, 排队长度动力学是前一时刻入口匝道的排队长度和入口匝道交通需求与入口匝道流量差值的累加, 即

$$l_i(k+1)=l_i(k)+T(d_i(k)-r_i(k)).\tag{40}$$

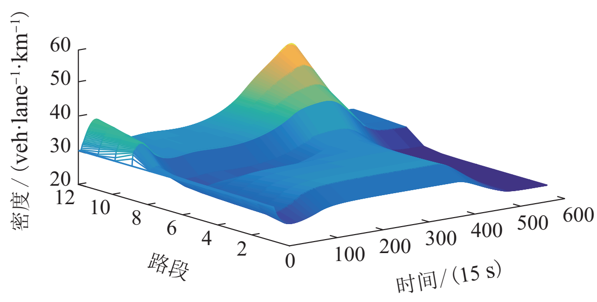
仿真分为如下6种情形, 为满足实际交通仿真实验, 在每种情形中考虑入口匝道受需求约束, 为避免匝道关闭设置匝道最小流入量为10 veh/h, 同时设置入口匝道处初始车辆排队长度为10 veh.

情形 1 入口匝道无控制情形.

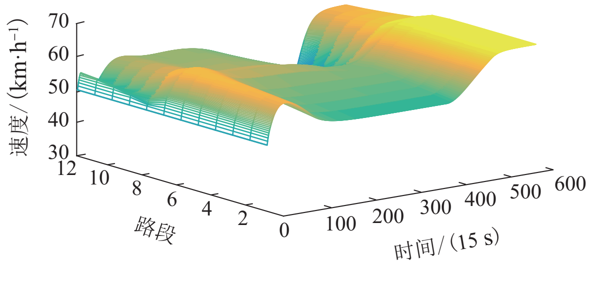
入口匝道无控制情形是对入口匝道不加任何控制策略, 按照入口交通需求自由流入, 各路段车流密度和车流速度情况如图3所示. 图3(a)显示从路段8以后车流密度已经严重超出了临界密度, 而且图3(b)中相应的车速也越来越慢. 显然该路段已经发生了车流拥堵情况, 并且有向上游蔓延的趋势.

情形 2 入口匝道采用ALINEA控制[6].

入口匝道采用ALINEA控制方法, 反馈增益选取40, 仿真效果见图4. 图4(a)为路段2和路段9的密度跟踪情况, 可以看出路段2和路段9实际密度已全部低于临界密度并非常接近期望密度. 图4(b)是各路段车流密度分布情况, 相比情形1, 路段8以后的拥堵现象已经消失, 各路段密度均低于临界密度.



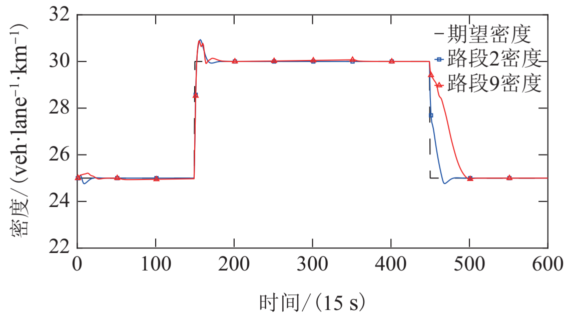
(a) 各路段车流密度



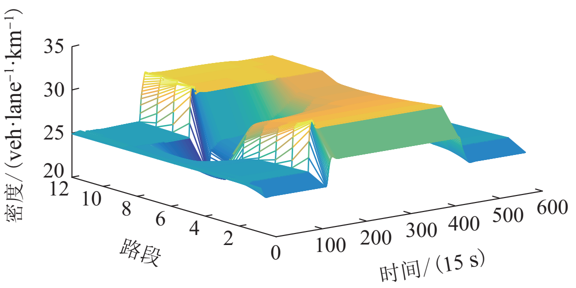
(b) 各路段车流速度

图 3　无入口匝道控制情形

Fig. 3　No on ramp control



(a) 路段2和路段9中的车流密度



(b) 各路段车流密度

图 4　ALINEA控制情形

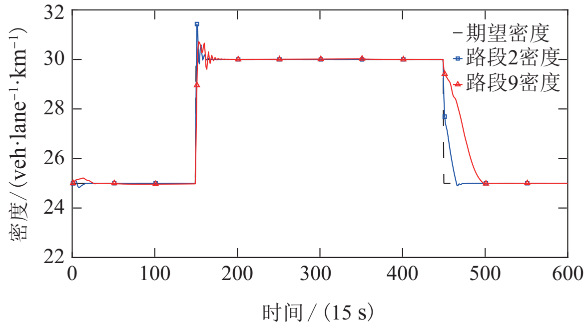
Fig. 4　ALINEA control

情形 3　入口匝道采用MFAC控制[12].

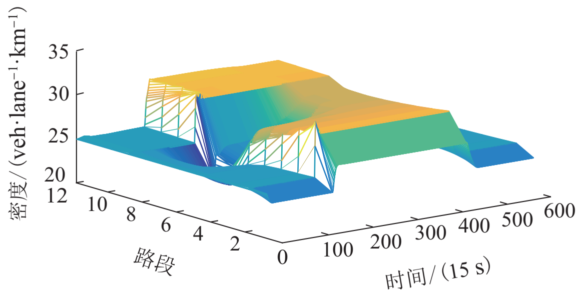
入口匝道采用MFAC方法, 控制器参数选取为$\varepsilon=10^{-5}$, $\mu=0.2$, $\eta=0.5$, $\rho=1$, $\lambda=0.0005$, $\hat{\phi}(1)=0.5\boldsymbol{I}$. 仿真效果如图5所示, 从图5(a)中可以看出, 在高峰时间段车流密度比ALINEA方法更接近期望密度. 在$k\in[450,500]$内路段9实际密度高于期望密度, 原因是上游流入该路段流量过多, 此时入口匝道9已按匝道最小流量流入. 图5(b)中相比无控制情形, 各路段拥堵情况也已得到缓解.

情形 4　入口匝道采用MFAPC控制.

入口匝道采用MFAPC控制方案(26)–(31), 控制器参数和初值分别设置为: $\varepsilon=10^{-5}$, $\mu=0.01$, $\eta=0.5$, $\varsigma=0.1$, $M=10$, $L_u=2$, $L=3$, $n_p=3$, $\lambda=0.0025$, $\hat{\phi}(1:4)=0.5\boldsymbol{I}$. 仿真效果如图6所示. 图6(a)中路段9在$k\in[450,500]$内也是因为上游流量过多, 导致实际密度无法及时跟踪期望密度, 并且此时匝道9也已按照设定的匝道最低流量流入. 路段2在初期由于入口匝道2受到交通需求约束, 无法及时补充车辆, 导致车流密度没有及时达到期望值.



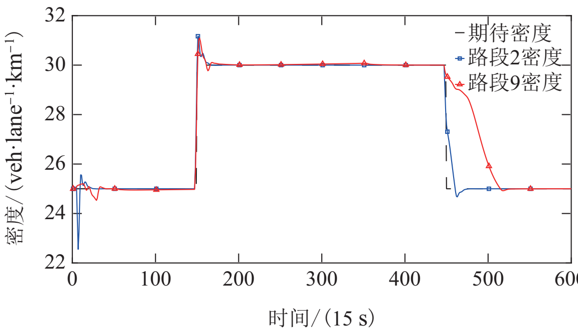
(a) 路段2和路段9中的车流密度



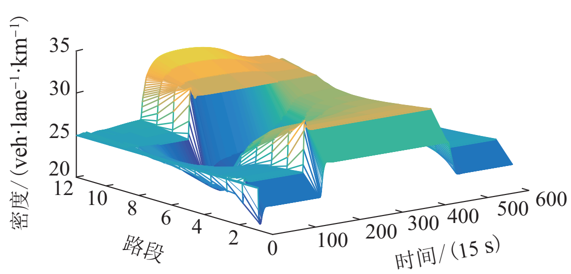
(b) 各路段车流密度

图 5　MFAC控制情形

Fig. 5　MFAC control



(a) 路段2和路段9中的车流密度



(b) 各路段车流密度

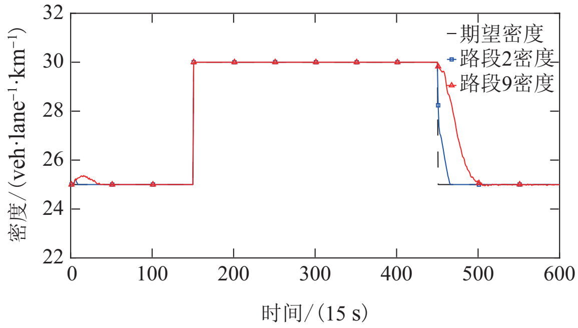
图 6　MFAPC控制情形

Fig. 6　MFAPC control

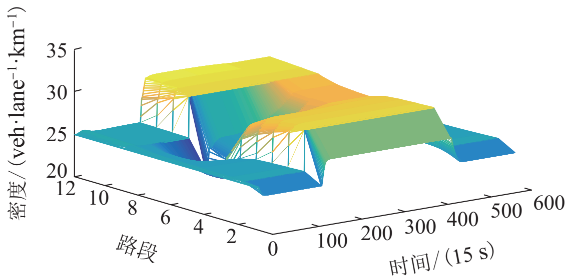
情形 5　入口匝道采用MFAC+ILC控制[21].

入口匝道采用MFAC+ILC方法, MFAC控制器参数选取和情形3中相同, 学习增益$\beta_i=35$, 迭代次数

为50, 迭代50次的效果如图7所示. 由图7(a)可以看出, 在$k \in [0, 450]$内路段2和路段9车流密度几乎接近期望密度, 在$k \in [450, 500]$内也是因为上游流入流量过多, 导致路段9密度无法及时跟踪上期望密度. 图7(b)中表明各路段也没有发生拥堵情况.



(a) 路段2和路段9中的车流密度



(b) 各路段车流密度

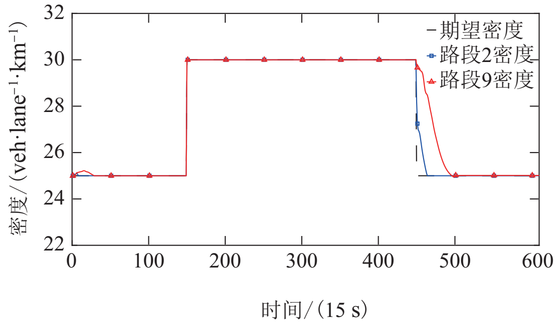
图 7 MFAC+ILC控制情形

Fig. 7 MFAC+ILC control

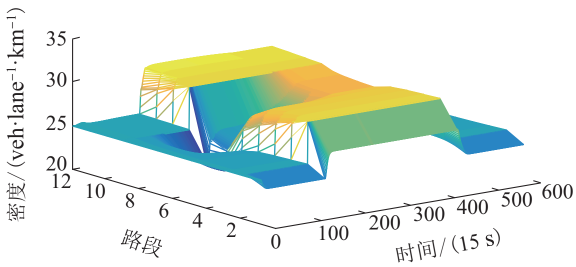
情形 6 入口匝道采用MFAPC+ILC控制.

入口匝道采用控制律(32)–(34), MFAPC控制器参数和情形4选取相同, 学习增益$\beta_i = 35$, 迭代次数为50, 迭代50次效果如图8所示. 在$k \in [0, 450]$内路段2和路段9车流密度也非常接近期望密度, 没有发生拥堵. 在$k \in [450, 500]$内同样无法通过入口匝道调整车流量使路段9密度等于期望密度. 图8(b)表明整条快速路没有发生拥堵. 值得说明的是, 当入口匝道流量无需求限制且上游流入流量不超过该路段流量最大值时, 情形5–6可获得非常完美的跟踪效果.

为检验MFAPC+ILC方法抗干扰能力, 假设入口匝道无需求限制且上游流入流量适当, 分别在系统中加入重复扰动$\omega_{i,n}(k) = 0.05\mathrm{randn}(1, 600)$和非重复扰动$\omega_{i,n}(k) = 0.05\mathrm{randn}(50, 600)$, 并与情形5的方法进行对比, 控制效果如图9所示. 图9(a)中系统迭代10次后跟踪误差几乎趋近于零, 说明路段2和路段9密度非常接近期望密度. 图9(b)中系统经过迭代10次后虽然跟踪误差没有趋近与零, 但会在一个很小的范围内波动, 这也是一个可以接受的结果. 进一步通过图9可以看出本文设计的控制方案相比MFAC+ILC控制效果更好, 原因在于MFAPC算法中引入了预测机制, 即控制算法中通过引入未来时刻的期望信号来计算适合当前时刻的控制输入信号, 同时所需未来时刻的PJM中各元素估计值是根据已有的估计值序列预测得出, 所以相比MFAC方法, MFAPC控制方案的鲁棒性更强.



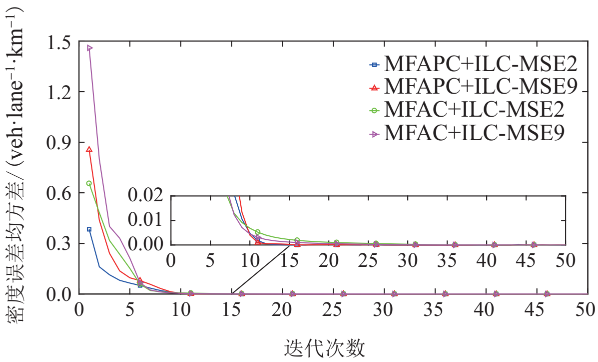
(a) 路段2和路段9中的车流密度



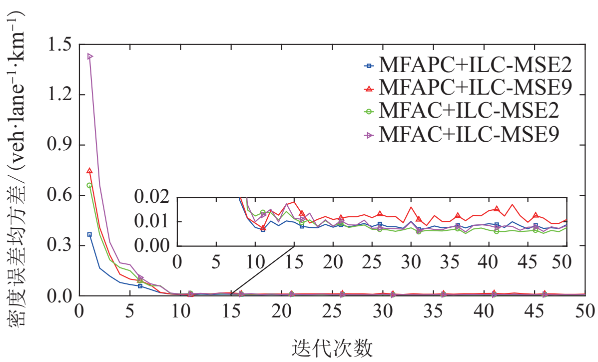
(b) 各路段车流密度

图 8 MFAPC+ILC控制情形

Fig. 8 MFAPC+ILC control



(a) 扰动迭代不变



(b) 扰动迭代变化

图 9 无需求限制时路段2和路段9密度误差均方差

Fig. 9 Mean square deviation of density error of section 2 and 9 without demand constraints

这里密度误差均方差定义为

$$\mathrm{MSE}_{i,n}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left(\rho_{\mathrm{d}}(k)-\rho_{i,n}(k)\right)^2. \tag{41}$$

6 结论

本文针对复杂时变以及难以建模的快速路交通系统, 首先, 设计了基于无模型自适应预测控制算法的入口匝道控制方案. 其次, 在无模型自适应预测控制方案的基础上引入开环迭代学习控制, 提出了带有迭代学习外环的无模型自适应入口匝道预测控制方案. 理论结果表明, 所提控制方案可以利用迭代学习控制补偿系统重复性扰动, 且可同时利用无模型自适应预测控制的优势减少跟踪误差, 两者结合可以进一步提高系统的控制性能. 与其他交通控制方法仿真对比, 验证了本文所提控制方案的优越性和实用性.

参考文献:

[1] PARAGEORGIOU M, KOTSIALOS A. Freeway ramp metering: an overview. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2002, 3(4): 271 – 278.

[2] CHENG I, GRUZ J, PAQUET J. Entrance ramp control for travel rate maximization in expressways. *Transportation Research Part C*, 1974, 8(6): 503 – 508.

[3] ISAKEN L, PAYNE H. Suboptimal control of linear systems by augmentation with application to freeway traffic regulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1973, 18(3): 210 – 219.

[4] CHI R H, LI J, LIU X. A new PI controller for freeway ramp metering based on fuzzy logic. *Chinese Control and Decision Conference*. Guiyang, China: IEEE, 2013: 4502 – 4506.

[5] KOTSIALOS A. Coordinated and integrated control of motorway networks via nonlinear optimal control. *Transportation Research Part C*, 2002, 10(1): 65 – 84.

[6] PARAGEORGIOU M, HADJ S H, BLOSSEVILLE J M. ALINEA: A local feedback control law for on-ramp metering. *Transportation Research Record*, 1991, 13(20): 58 – 64.

[7] CARCIA C, PRETTD D, MORARII M. Model predictive control: Theory and practice a survey. *Automatica*, 1989, 25(3): 335 – 348.

[8] HU Linglong. *An model predictive control approach to coordinated ramp metering strategy*. Hangzhou: Zhejiang University, 2014.
(胡灵龙. 基于MPC的快速路入口匝道协调控制策略研究. 杭州: 浙江大学, 2014.)

[9] HOU Z S, HUANG W H. The model-free learning adaptive control of a class of SISO nonlinear systems. *American Control Conference*. Albuquerque, USA: IEEE, 1997: 343 – 344.

[10] HOU Z S, JIN S T. A novel data-driven control approach for a class of discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, 19(6): 1549 – 1558.

[11] HOU Z S, XIONG S S. On model-free adaptive control and its stability analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(11): 4555 – 4569.

[12] WANG Chunwei. *Studies on the model-free adaptive control based local ramp metering strategies*. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2005.
(王春蔚. 基于无模型自适应控制理论的局部入口匝道控制方法研究. 北京: 北京交通大学, 2005.)

[13] HOU Zhongsheng, JIN Shangtai. *Model Free Adaptive Control Theory and Applications*. Beijing: Science Press, 2013.
(侯忠生, 金尚泰. 无模型自适应控制理论与应用. 北京: 科学出版社, 2013.)

[14] DONG Na, FENG Yu, WU Aiguo, et al. Model-free predictive control and its application in control of lithium bromide unit. *Journal of Jilin University (Information Science Edition)*, 2019, 37(4): 372 – 381.
(董娜, 冯宇, 吴爱国, 等. 无模型预测控制及在溴化锂机组控制中的应用. 吉林大学学报(信息科学版), 2019, 37(4): 372 – 381.)

[15] DUAN Jianmin, MA Xuezheng, LIU Xin. Path tracking method of unmanned vehicle based on MFAPC. *Computer Engineering*, 2019, 45(6): 6 – 11.
(段建民, 马学峥, 柳新. 基于MFAPC的无人驾驶汽车路径跟踪方法. 计算机工程, 2019, 45(6): 6 – 11.)

[16] FENG Yuchang, SHI Donglin, BAI Jiawen. Model free adaptive predictive control for main steam pressure system. *Thermal Power Generation*, 2012, 41(8): 37 – 40.
(冯玉昌, 史冬琳, 白佳文. 主蒸汽压力的无模型自适应预测控制. 热力发电, 2012, 41(8): 37 – 40.)

[17] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.

[18] YU Q X, HOU Z S. Adaptive fuzzy iterative learning control for high-speed trains with both randomly varying operation lengths and system constraints. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2021, 29(8): 2408 – 2418.

[19] LU J Y, CAO Z X, HU Q R, et al. Optimal iterative learning control for batch processes in the presence of time-varying dynamics. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, DOI: 10.1109/TSMC.2020.3031669.

[20] HOU Z S, XU J X. Freeway traffic density control using iterative learning control approach. *Proceedings of the 6th International Conference on Intelligent Transportation Systems*. Shanghai, China: IEEE, 2003: 1081 – 1086.

[21] HOU Zhongsheng, YAN Jingwen. Model free adaptive control based freeway ramp metering with feedforward iterative learning controller. *Acta Automatica Sinica*, 2009, 35(5): 588 – 595.
(侯忠生, 晏静文. 带有迭代学习前馈的快速路无模型自适应入口匝道控制. 自动化学报, 2009, 35(5): 588 – 595.)

[22] HOU Z S, XU J X, YAN J W. An iterative learning approach for density control of freeway traffic flow via ramp metering. *Transportation Research Part C*, 2008, 16(1): 71 – 97.

[23] PARAGEORGIOU M, BLOSSEVILLE J M, HADJ S H. Macroscopic modeling of traffic flow on the Boulevard Peripherique in Paris. *Transportation Research Part B*, 1989, 23(1): 29 – 47.

[24] HOU Z S, JIN S T. Data-driven model-free adaptive control for a class of MIMO nonlinear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(12): 2173 – 2188.

[25] HAN Zhigang. The progress of theory and application of multi-level recursive method. *Control and Decision*, 2001, 16(2): 129 – 132.
(韩志刚. 多层递阶方法理论与应用的进展. 控制与决策, 2001, 16(2): 129 – 132.)

[26] ZHOU P, ZHANG S, WEN L, et al. Kalman filter-based data-driven robust model free adaptive predictive control of a complicated industrial process. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2021, DOI: 10.1109/TASE.2021.3061974.

附录

定理2的证明

证 定理2的收敛性是在如下λ模意义下的收敛性:

$$\|\boldsymbol{u}(k)\|_{\lambda}=\sup_{k\in[0,K]}a^{-\lambda k}\|\boldsymbol{u}(k)\|,$$

其中: $\lambda > 0, a > 1$.

首先定义$\delta \boldsymbol{u}_n(k) = \boldsymbol{u}_\mathrm{d}(k) - \boldsymbol{u}_n(k) = \delta \boldsymbol{u}_n^f(k) - \boldsymbol{u}_n^b(k)$, $\delta \boldsymbol{x}_n(k) = \boldsymbol{x}_\mathrm{d}(k) - \boldsymbol{x}_n(k)$.

由式(34)可得

$$\boldsymbol{u}_{n+1}^f(k) = \boldsymbol{u}_n^f(k) + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{e}_n(k+1). \tag{A1}$$

进而有

$$\begin{aligned}&\delta\boldsymbol{u}_{n+1}^f(k) = \boldsymbol{u}_\mathrm{d}(k) - \boldsymbol{u}_{n+1}^f(k) = \\ &\delta\boldsymbol{u}_n^f(k) - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{e}_n(k+1).\end{aligned} \tag{A2}$$

由微分中值定理可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_n(k+1) = \boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k+1) - \boldsymbol{y}_n(k+1) = \\ &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_\mathrm{d}(k))\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_\mathrm{d}(k) + \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_\mathrm{d}(k)) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{d}(k) - \\ &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{y}_n(k) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_n(k) - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_n(k)) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{d}(k) = \\ &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_\mathrm{d}(k))\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k) + \\ &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{y}_n(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_\mathrm{d}(k) - \\ &\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_n(k) + \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_\mathrm{d}(k)) - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_n(k)) = \\ &\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{e}_n(k) + \\ &\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{u}_n(k) + \delta\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_n(k)) = \\ &\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{e}_n(k) + \\ &\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{u}_n^f(k) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_n^b(k) + \delta\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_n(k)).\end{aligned} \tag{A3}$$

把式(A3)代入式(A2)中, 可得

$$\begin{aligned}&\delta\boldsymbol{u}_{n+1}^f(k) = \\ &\delta\boldsymbol{u}_n^f(k) - \boldsymbol{\beta}(\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{e}_n(k) + \\ &\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{u}_n^f(k) - \ \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_n^b(k) + \delta\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_n(k))) = \\ &(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B})\delta\boldsymbol{u}_n^f(k) - \boldsymbol{\beta}\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k) - \\ &\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(k))\boldsymbol{e}_n(k) + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_n^b(k) - \boldsymbol{\beta}\delta\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_n(k)).\end{aligned} \tag{A4}$$

对式(A4)两边取模并由假设1可得

$$\begin{aligned}&\|\delta\boldsymbol{u}_{n+1}^f(k)\| \leqslant \\ &\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}\|\|\delta\boldsymbol{u}_n^f(k)\| + \beta k_A b_{y_\mathrm{d}}\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\| + \\ &\beta b_A\|\boldsymbol{e}_n(k)\| + \beta b_B\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\| + \beta k_\eta\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\| \leqslant \\ &\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}\|\|\delta\boldsymbol{u}_n^f(k)\| + (\beta k_A b_{y_\mathrm{d}} + \beta k_\eta)\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\| + \\ &\beta b_A\|\boldsymbol{e}_n(k)\| + \beta b_B\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\| \leqslant \\ &\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}\|\|\delta\boldsymbol{u}_n^f(k)\| + \varepsilon_1(\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\| + \|\boldsymbol{e}_n(k)\| + \|\boldsymbol{u}_n^b(k)\|),\end{aligned} \tag{A5}$$

其中:

$$b_A = \sup_{k\in[0,K]}\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n(x))\|,\ b_B = \sup_{k\in[0,K]}\|\boldsymbol{B}\|,$$
$$b_{y_\mathrm{d}} = \sup_{k\in[0,K]}\|\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k)\|,\ \beta = \sup_{k\in[0,K]}\|\boldsymbol{\beta}\|,$$
$$\varepsilon_1 = \max_{k\in[0,K]}\{(\beta k_A b_{y_\mathrm{d}} + \beta k_\eta), \beta b_A, \beta b_B\}.$$

由假设1可得

$$\begin{aligned}&\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\| = \\ &\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_\mathrm{d}(k-1), \boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k-1)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n(k-1), \boldsymbol{y}_n(k-1))\| \leqslant \\ &k_x\|\delta\boldsymbol{x}_n(k-1)\| + k_y\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\|.\end{aligned} \tag{A6}$$

对式(A3)在时间轴上向前一步递推并取模, 可得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{e}_n(k)\| \leqslant \\ &b_{y_\mathrm{d}}k_A\|\delta\boldsymbol{x}_n(k-1)\| + b_A\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\| + b_B\|\delta\boldsymbol{u}_n^f(k-1)\| + \\ &b_B\|u_n^b(k-1)\| + k_\eta\|\delta\boldsymbol{x}_n(k-1)\| \leqslant \\ &(b_{y_\mathrm{d}}k_A + k_\eta)\|\delta\boldsymbol{x}_n(k-1)\| + b_A\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\| + \\ &b_B\|\delta\boldsymbol{u}_n^f(k-1)\| + b_B\|\boldsymbol{u}_n^b(k-1)\|.\end{aligned} \tag{A7}$$

由式(33)可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}_n^b(k) = \\ &\boldsymbol{u}_n^b(k-1) + \boldsymbol{g}^\mathrm{T}[\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}^\mathrm{T}(k)\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}(k) + \lambda\boldsymbol{I}]^{-1} \times \\ &\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}^\mathrm{T}(k)[\boldsymbol{Y}_\mathrm{d}(k+1) - \boldsymbol{E}(k)\boldsymbol{y}_n(k)] = \\ &\boldsymbol{u}_n^b(k-1) + \boldsymbol{g}^\mathrm{T}[\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}^\mathrm{T}(k)\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}(k) + \lambda\boldsymbol{I}]^{-1} \times \\ &\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}^\mathrm{T}(k)[\boldsymbol{E}(k)\boldsymbol{e}_n(k) + \boldsymbol{D}(k+1)],\end{aligned} \tag{A8}$$

其中$\boldsymbol{D}(k+1) = \begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k+1) \\ \Delta\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k+2) + \Delta\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k+L) + \cdots + \Delta\boldsymbol{y}_\mathrm{d}(k+1)\end{bmatrix}$.

对式(A8)取模, 可得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\| \leqslant \\ &\|\boldsymbol{u}_n^b(k-1)\| + K_b\|\boldsymbol{E}(k)\|\|\boldsymbol{e}_n(k)\| + K_b\|\boldsymbol{D}(k+1)\| \leqslant \\ &\|\boldsymbol{u}_n^b(k-1)\| + K_b b_E\|\boldsymbol{e}_n(k)\| + K_b b_D,\end{aligned} \tag{A9}$$

其中:

$$K_b = \sup_{k\in[0,K]}\|\boldsymbol{g}^\mathrm{T}[\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}^\mathrm{T}(k)\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}(k) + \lambda\boldsymbol{I}]^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}^\mathrm{T}(k)\|,$$
$$b_E = \sup_{k\in[0,K]}\|\boldsymbol{E}(k)\|,\ b_D = \sup_{k\in[0,K]}\|\boldsymbol{D}(k+1)\|.$$

参数估计算法和参数预报算法(26)–(28)的收敛性可参考文献[26], 因此可知$\hat{\boldsymbol{A}}_{1,n}(k)$有界, 即$K_b$有界.

将式(A7)代入式(A9)中, 可得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\| \leqslant \\ &\|\boldsymbol{u}_n^b(k-1)\| + K_b b_E\|\boldsymbol{e}_n(k)\| + K_b b_D \leqslant \\ &(1 + K_b b_E b_B)\|\boldsymbol{u}_n^b(k-1)\| + K_b b_E(b_{\boldsymbol{y}_\mathrm{d}}k_A + k_\eta) \times \\ &\|\delta\boldsymbol{x}_n(k-1)\| + K_b b_E b_A\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\| + \\ &K_b b_E b_B\|\delta\boldsymbol{u}_n^f(k-1)\| + K_b b_D.\end{aligned} \tag{A10}$$

将式(A6)–(A7)和式(A10)相加, 可得

$$\begin{aligned}&\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\| + \|\boldsymbol{e}_n(k)\| + \|\boldsymbol{u}_n^b(k)\| \leqslant \\ &(k_x + (K_b b_E + 1)(b_{y_\mathrm{d}}k_A + k_\eta))\|\delta\boldsymbol{x}_n(k-1)\| + (k_y + b_A + \\ &K_b b_E b_A)\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\| + (1 + b_B + K_b b_E b_B)\|\boldsymbol{u}_n^b(k-1)\| + \\ &(b_B + K_b b_E b_B)\|\delta\boldsymbol{u}_n^f(k-1)\| + K_b b_D \leqslant \\ &d_3(\|\delta\boldsymbol{x}_n(k-1)\| + \|\boldsymbol{e}_n(k-1)\| + \|\boldsymbol{u}_n^b(k-1)\|) + \\ &d_3\|\delta\boldsymbol{u}_n^f(k-1)\| + K_b b_D,\end{aligned} \tag{A11}$$

其中: $d_3 = \max_{k\in[0,K]}\{(k_x + (K_b b_E + 1)(b_{y_\mathrm{d}}k_A + k_\eta)), (k_y + b_A + K_b b_E b_A), (1 + b_B + K_b b_E b_B), (b_B + K_b b_E b_B)\}$, 显然$d_3 > 1$.

对式(A11)利用压缩映射原理, 可得

$$(\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\| + \|\boldsymbol{e}_n(k)\| + \|\boldsymbol{u}_n^b(k)\|) \leqslant \cdots \leqslant$$

$$d_3^k(\|\delta \boldsymbol{x}_n(0)\|+\|\boldsymbol{e}_n(0)\|+\|\boldsymbol{u}_n^b(0)\|)+\sum_{i=0}^{k-1} d_3^{k-i}\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(i)\|+\sum_{i=0}^{k-1} d_3^{k-i-1} K_b b_D. \tag{A12}$$

对式(A12)两边取λ模, 可得

$$(\|\delta \boldsymbol{x}_n(k)\|_\lambda+\|\boldsymbol{e}_n(k)\|_\lambda+\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\|_\lambda) \leqslant (\|\delta \boldsymbol{x}_n(0)\|+\|\boldsymbol{e}_n(0)\|+\|\boldsymbol{u}_n^b(0)\|)+\sup_{k\in[0,K]} d_3^{-\lambda k}\sum_{i=0}^{k-1} d_3^{k-i}\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(i)\|+\sup_{k\in[0,K]} d_3^{-\lambda k}\sum_{i=0}^{k-1} d_3^{k-i-1} K_b b_D. \tag{A13}$$

在式(A13)中, 有

$$\sup_{k\in[0,K]} d_3^{-\lambda k}\sum_{i=0}^{k-1} d_3^{k-i}\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(i)\| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1}(\sup_{i\in[0,K]} d_3^{-\lambda i}\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(i)\|) d_3^{(k-i)(1-\lambda)} \leqslant \|\delta \boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda \frac{1-d_3^{-(\lambda-1)K}}{d_3^{\lambda-1}-1}, \tag{A14}$$

以及有

$$\sup_{k\in[0,K]} d_3^{-\lambda k}\sum_{i=0}^{k-1} d_3^{k-i-1} \leqslant \sup_{k\in[0,K]} d_3^{-\lambda k+K-1}\frac{1-d_3^{-K}}{1-d_3^{-1}} \leqslant \frac{{d_3}^K-1}{d_3-1}. \tag{A15}$$

把式(A14)–(A15)代入式(A13)中, 可得

$$(\|\delta \boldsymbol{x}_n(k)\|_\lambda+\|\boldsymbol{e}_n(k)\|_\lambda+\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\|_\lambda) \leqslant (\|\delta \boldsymbol{x}_n(0)\|+\|\boldsymbol{e}_n(0)\|+\|\boldsymbol{u}_n^b(0)\|)+\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda \frac{1-d_3^{-(\lambda-1)K}}{d_3^{\lambda-1}-1}+K_b b_D\frac{{d_3}^K-1}{d_3-1}. \tag{A16}$$

对式(A5)取λ模, 可得

$$\|\delta \boldsymbol{u}_{n+1}^f(k)\|_\lambda \leqslant \|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}\|\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda+\varepsilon_1(\|\delta \boldsymbol{x}_n(k)\|_\lambda+\|\boldsymbol{e}_n(k)\|_\lambda+\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\|_\lambda). \tag{A17}$$

把式(A16)代入式(A17)中, 可得

$$\|\delta \boldsymbol{u}_{n+1}^f(k)\|_\lambda \leqslant \|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}\|\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda+\varepsilon_1(\|\delta \boldsymbol{x}_n(0)\|+\|\boldsymbol{e}_n(0)\|+\|\boldsymbol{u}_n^b(0)\|+\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda \frac{1-d_3^{-(\lambda-1)K}}{d_3^{\lambda-1}-1}+K_b b_D\frac{{d_3}^K-1}{d_3-1}) \leqslant (\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}\|+\varepsilon_1\frac{1-d_3^{-(\lambda-1)K}}{d_3^{\lambda-1}-1})\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda+\varepsilon_1(\|\delta \boldsymbol{x}_n(0)\|+\|\boldsymbol{e}_n(0)\|+\|\boldsymbol{u}_n^b(0)\|+K_b b_D\frac{{d_3}^K-1}{d_3-1}). \tag{A18}$$

由$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}\|<1$可知, 可选一个合适的$\lambda$值, 使得$(\|\boldsymbol{I}-\beta B\|+\varepsilon_1\frac{1-d_3^{-(\lambda-1)K}}{d_3^{\lambda-1}-1})\leqslant\alpha<1$, 则式(A18)变为

$$\|\delta \boldsymbol{u}_{n+1}^f(k)\|_\lambda \leqslant \alpha\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda+\varepsilon, \tag{A19}$$

其中$\varepsilon=\varepsilon_1(\|\delta \boldsymbol{x}_n(0)\|+\|\boldsymbol{e}_n(0)\|+\|\boldsymbol{u}_n^b(0)\|+K_b b_D\frac{{d_3}^K-1}{d_3-1})$.

对式(A19)利用压缩映射原理, 可得

$$\|\delta \boldsymbol{u}_{n+1}^f(k)\|_\lambda \leqslant\cdots\leqslant \alpha^{n+1}\|\delta \boldsymbol{u}_0^f(k)\|_\lambda+\varepsilon\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}. \tag{A20}$$

因此, 当$n\to\infty$时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\|\delta \boldsymbol{u}_{n+1}^f(k)\|_\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\alpha}. \tag{A21}$$

将式(A21)代入式(A16), 可得

$$\lim_{n\to\infty}(\|\delta \boldsymbol{x}_n(k)\|_\lambda+\|\boldsymbol{e}_n(k)\|_\lambda+\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\|_\lambda) \leqslant \frac{1-d_3^{-(\lambda-1)K}}{d_3^{\lambda-1}-1}\lim_{n\to\infty}\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda+(\|\delta \boldsymbol{x}_n(0)\|+\|\boldsymbol{e}_n(0)\|+\|\boldsymbol{u}_n^b(0)\|)+K_b b_D\frac{{d_3}^K-1}{d_3-1}. \tag{A22}$$

由式(A21)和式(A22)可得

$$\lim_{n\to\infty}\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda \leqslant \sigma,\ \lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\|_\lambda \leqslant \sigma,\ \lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{e}_n(k)\|_\lambda \leqslant \sigma,\ \lim_{n\to\infty}\|\delta \boldsymbol{x}_n(k)\|_\lambda \leqslant \sigma.$$

其中$\sigma>0$为有界常数. 若系统满足初始状态$\|\delta \boldsymbol{x}_n(0)\|=0$, $\|\boldsymbol{u}_n^b(0)\|=0$, $\|\boldsymbol{e}_n(0)\|=0$, 以及$b_D=0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\|\delta \boldsymbol{u}_n^f(k)\|_\lambda=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{u}_n^b(k)\|_\lambda=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{e}_n(k)\|_\lambda=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\|\delta \boldsymbol{x}_n(k)\|_\lambda=0.$$

证明成立. 证毕.

作者简介:

张茂帅 硕士研究生, 目前研究方向为无模型自适应预测控制、迭代学习控制、智能交通控制等, E-mail: zhangms1996@163.com;

侯忠生 教授, 博士生导师, 目前研究方向为数据驱动控制、无模型自适应控制、学习控制、智能交通等, E-mail: zhshhou@bjtu.edu.cn.