第 38 卷第 11 期
2021 年 11 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 38 No. 11
Nov. 2021

演化博弈的鲁棒稳定与镇定

赵 荣, 冯俊娥†

(山东大学 数学学院, 山东 济南 250100)

摘要: 本文研究了干扰影响下演化博弈的稳定与镇定问题. 首先, 文章给出了干扰博弈、控制–干扰博弈以及鲁棒Nash均衡等概念, 并在此基础上提出了干扰演化博弈与控制–干扰演化博弈鲁棒稳定与镇定的定义. 其次, 利用矩阵半张量积工具, 得到了干扰演化博弈与控制–干扰演化博弈的代数状态空间表示, 将鲁棒稳定与镇定问题转化为一个辅助系统的集合稳定与集合镇定问题. 紧接着, 文章建立了干扰演化博弈与控制–干扰演化博弈鲁棒稳定与镇定的充分必要条件, 并进一步设计了状态反馈控制器. 最后, 通过两个例子验证了所得结论的有效性.

关键词: 演化博弈; 干扰; 稳定与镇定; 鲁棒Nash均衡; 矩阵半张量积

引用格式: 赵荣, 冯俊娥. 演化博弈的鲁棒稳定与镇定. 控制理论与应用, 2021, 38(11): 1793 – 1800

DOI: 10.7641/CTA.2021.10716

On robust stability and stabilization of evolutionary games

ZHAO Rong, FENG Jun-e†

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan Shandong 250100, China)

Abstract: This paper investigates the stability and stabilization problems of evolutionary games with disturbances. First, based on several concepts, including disturbed game, controlled-disturbed game and robust Nash equilibrium, the definitions of robust stability and stabilization of disturbed evolutionary game and controlled-disturbed evolutionary game are specified, respectively. Second, by virtue of semi-tensor product, the algebraic state space representation of disturbed evolutionary game and controlled-disturbed evolutionary game are derived. Meanwhile, the robust stability and stabilization problems are converted into the set stability and set stabilization problems of an auxiliary system. Then, necessary and sufficient conditions for the robust stability and stabilization problems are presented, and the state feedback controller is designed as well. Finally, two examples are given to verify the effectiveness of the obtained results.

Key words: evolutionary games; disturbances; stability and stabilization; robust Nash equilibrium; semi-tensor product of matrices

Citation: ZHAO Rong, FENG Jun'e. On robust stability and stabilization of evolutionary games. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(11): 1793 – 1800

1 引言

博弈论又称对策论, 主要研究公式化了的激励结构间的相互作用, 是研究具有斗争或竞争性质现象的数学理论和方法. 博弈论的思想有着源远流长的历史, 可以追溯到两千多年前我国的“齐威王田忌赛马”, 一千五百多年前巴比伦犹太教法典中的“婚姻合同问题”等. 直至1944年, 冯·诺依曼和摩根斯坦出版著作《博弈论和经济行为》[1], 创建了博弈论的一般理论方法, 给出了博弈论的一般框架、概念术语和表示方法, 这也被公认为博弈论初步形成的标志. 一般来讲, 可以将博弈分为两大类: 合作博弈和非合作博弈. 对于非合作博弈, 约翰·纳什在1951年提出了“Nash均衡”的概念[2]. “纳什均衡”被誉为现代博弈论中最重要的概念, 随着博弈论和经济学的发展, 纳什均衡已成为现代经济分析的出发点和关键性概念. 关于合作博弈, 罗伊德·沙普利在1962年提出了“Shapley值”这一重要概念[3], 对合作博弈的分配问题做出了重要贡献.

作为一种基本的数学工具, 矩阵理论在数学学科与其他学科技术领域, 诸如数值分析、优化理论、微分方程、概率统计、运筹学、控制论、系统工程等学科都有广泛的应用, 甚至在经济管理、社会科学等领域, 矩

收稿日期: 2021−08−07; 录用日期: 2021−10−25.

†通信作者. E-mail: fengjune@sdu.edu.cn; Tel.: +86 15966683065.

本文责任编委: 洪奕光.

国家自然科学基金项目(61773371, 61877036), 山东省自然科学基金项目(ZR2019MF002)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61773371, 61877036) and the National Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2019MF002).

阵的理论和方法都起着十分重要的作用. 同样地, 矩阵方法在博弈论的研究中也起着至关重要的作用. 实际上, 冯·诺依曼就是从矩阵博弈开始研究的[4]. 近年来, 由程代展教授及其团队创立的矩阵半张量积[5–6], 打破了传统矩阵乘积对维数的限制, 丰富了现代控制领域的研究方法. 目前, 矩阵半张量积理论已经被成功应用于逻辑系统[7]、有限博弈[8]、图论[9]、有限自动机[10]、生物系统[11]、模糊控制[12–13]等众多领域. 基于矩阵半张量积, 有限博弈的相关研究取得了一系列丰硕的研究成果. 诸如, 文献[14]利用半张量积, 构建了势方程, 给出了势函数的计算方法; 文献[15]基于有限博弈的向量空间结构给出了正交分解定理; 文献[16]建立了网络演化博弈的代数模型, 进而分析了网络的动态行为, 包括稳定性、能控性和一致性等问题; 文献[17]研究了博弈控制理论在多智能体中的应用; 文献[18]研究了基于状态博弈的学习算法设计及其应用, 等.

演化博弈最早是由生物学家引入用来研究生物系统的进化过程的[19–21], 文献[22]曾指出: "博弈论更容易应用于生物学, 而不是它最初设计的经济行为领域". 这充分说明了演化博弈在生物学方面有着很强的应用背景. 在过去的几十年里, 演化博弈的相关研究吸引了不同学科领域学者们的广泛关注, 例如经济系统[23]、社会系统[24]、工程系统[25]等等. 对于演化博弈, 其动态过程及稳定性是一个自然而不可回避的问题. 在矩阵半张量积的研究框架下, 文献[26]利用Lyapunov函数对演化博弈的稳定和镇定问题进行了分析, 文献[27]讨论了时滞影响下演化博弈的稳定性, 文献[28–29]考虑了随机演化博弈的稳定和镇定问题, 文献[30–31]分别研究了网络演化博弈和超网络演化博弈的演化稳定策略.

干扰普遍存在于控制系统以及现实生活中, 抗干扰问题也得到越来越广泛的关注. 值得注意的是, 在博弈的相关研究中, 大多假设博弈过程在理想的环境中进行. 最近, 文献[32–33]考虑了干扰影响下的连续时间线性二次博弈, 通过ε-Nash均衡来反映干扰对博弈的影响. 文献[34]研究了干扰影响下离散非线性二次博弈的事件驱动策略设计. 文献[35]考虑了随机干扰对建筑工程供应链中博弈动态过程的影响. 并且, 文献[32–33]验证了干扰可能会影响博弈动态, 最终影响博弈的结果. 因此, 简单地忽略干扰存在的影响是不合理的.

基于以上讨论, 本文利用矩阵半张量积工具, 研究干扰影响下演化博弈的稳定与镇定问题. 本文的主要贡献如下: 1) 提出了干扰博弈、控制–干扰博弈、鲁棒–Nash均衡等概念, 进而给出了干扰演化博弈与控制–干扰演化博弈的代数状态空间表示. 2) 通过构造辅助系统, 将演化博弈的鲁棒稳定与镇定问题转化为新系统的集合稳定和集合镇定问题. 3) 给出了干扰演化博弈及控制–干扰演化博弈鲁棒稳定及镇定的充分必要条件, 并且设计了状态反馈控制器以保证鲁棒镇定的实现.

本文其余部分的结构安排如下: 第2节介绍符号表示、矩阵半张量积的概念和性质. 第3节是问题描述, 具体给出了演化博弈鲁棒稳定及镇定的概念. 第4节是本文的主要内容, 分别讨论了干扰演化博弈、控制–干扰演化博弈的代数状态空间表示, 给出了鲁棒稳定及镇定的充分必要条件, 并进一步设计了状态反馈控制器. 第5节通过两个例子验证了本文所得结果的有效性. 第6节对本文进行了总结.

2 预备知识

本部分简要介绍一些基本知识, 包括符号表示、矩阵半张量积的定义和基本性质.

2.1 符号表示

$\forall$: 全称量词.

$\mathbb{Z}_+$: 所有正整数的集合.

$\mathbb{R}^{m\times n}$: $m\times n$维实矩阵的集合; $0_{m\times n}$: $m\times n$维零矩阵.

M^{T}: 矩阵M的转置.

$\boldsymbol{a}_n := [\underbrace{a\ a\ \cdots\ a}_{n}]^{\mathrm{T}}, a\in\mathbb{R}$.

$|S|$: 集合S的基数.

$\mathrm{Col}_i(M)$: 矩阵M的第i列;

$\mathrm{Col}(M)$: 矩阵M所有列构成的集合.

$[M]_{i,j}$: 矩阵M第i行第j列的元素.

$[Y]_i$: 向量Y的第i个元素.

$\mathcal{D}_k := \{1,2,\cdots,k\}, k\geqslant 2$.

$\varDelta_k := \{\delta_k^i \mid i=1,2,\cdots,k\}$, 这里$\delta_k^i$表示单位矩阵$I_k$的第$i$列.

$\mathcal{L}_{m\times n}$: 所有$m\times n$维逻辑矩阵构成的集合. $L\in\mathcal{L}_{m\times n}$是指 $\mathrm{Col}(L)\subseteq\varDelta_m$. 若 $L=[\delta_m^{i_1}\ \ \delta_m^{i_2}\ \ \cdots\ \ \delta_m^{i_n}]\in\mathcal{L}_{m\times n}$, 则简记为$L=\delta_m\,[i_1\ \ i_2\ \ \cdots\ \ i_n]$.

$\otimes$: 矩阵的Kronecker积; $*$: 矩阵的Khatri-Rao积; $\circ$: 矩阵的Hadamard积.

2.2 矩阵半张量积

本小节简要介绍矩阵半张量积的基本定义和相关性质.

定义 1[5] 假设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{p\times q}$, 则矩阵$A$和$B$的半张量积定义为

$$A\ltimes B=(A\otimes I_{t/n})(B\otimes I_{t/p}),$$

其中$t=\mathrm{lcm}(n,p)$是n和p的最小公倍数.

注意到, 当$n=p$时, 矩阵半张量积就退化为传统矩阵乘积. 在不致混淆的情形下, 符号$\ltimes$通常被省略.

引理 1[5] 下面是关于矩阵半张量积的一些基本

性质:

1) 若$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{t\times 1}$, 则

$$XA = (I_t \otimes A)X;$$

2) 若$X \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$是两个列向量, 则

$$W_{[m,n]}XY = YX,$$

其中$W_{[m,n]} = [I_n \otimes \delta_m^1\ I_n \otimes \delta_m^2\ \cdots\ I_n \otimes \delta_m^m]$称为换位矩阵;

3) 若$x \in \varDelta_k$, 则

$$x^2 = \varPhi_k x,$$

其中$\varPhi_k = \mathrm{diag}\{\delta_k^1, \delta_k^2, \cdots, \delta_k^k\}$称为降阶矩阵.

下面说明如何利用矩阵半张量积将逻辑函数转化为代数形式.

引理 2[5]

1) 给定一个逻辑函数$f: \mathcal{D}_k^n \to \mathcal{D}_k$. 则存在唯一的一个矩阵$M_f \in \mathcal{L}_{k\times k^n}$使得$f$的代数形式可以表示为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = M_f \ltimes_{i=1}^n x_i,$$

其中$x_i \in \varDelta_k$, M_f称为f的结构矩阵.

2) 假设

$$\begin{cases} y = M_y \ltimes_{i=1}^n x_i, \\ z = M_z \ltimes_{i=1}^n x_i, \end{cases}$$

其中: $x_i \in \varDelta_k$; $M_y, M_z \in \mathcal{L}_{k\times k^n}$. 则

$$yz = (M_y * M_z) \ltimes_{i=1}^n x_i,$$

其中: $M_y * M_z = [\mathrm{Col}_1(M_y) \ltimes \mathrm{Col}_1(M_z)\ \ \mathrm{Col}_2(M_y) \ltimes \mathrm{Col}_2(M_z)\ \cdots\ \mathrm{Col}_{k^n}(M_y) \ltimes \mathrm{Col}_{k^n}(M_z)]$.

3 问题陈述

本节将具体给出一类干扰影响下演化博弈的稳定与镇定问题的相关介绍和定义.

定义 2 一个有限非合作博弈G称为干扰博弈, 如果G由四部分组成, 记为$G = (N, S, \varXi, C)$, 其中,

1) $N = \{1, 2, \cdots, n\}$表示n个玩家的集合.

2) $S = \prod_{i=1}^n S_i$称为局势, 其中$S_i = \{1, 2, \cdots, k_i\}$表示第$i$个玩家的策略集, $i \in N$, $\prod_{i=1}^n S_i$表示$S_1, S_2, \cdots, S_n$的笛卡尔积.

3) $\varXi = \{1, 2, \cdots, m\}$表示外部干扰的集合.

4) $C = (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, 其中$c_i: S \times \varXi \to R$是第$i$个玩家的支付函数, $i \in N$.

这里"有限"是指: 1) 玩家个数$n < \infty$; 2) 策略个数$|S_i| < \infty$; 3) 干扰个数$|\varXi| < \infty$.

下面给出鲁棒Nash均衡的定义.

定义 3 给定一个干扰博弈$G = (N, S, \varXi, C)$. 局势$s^* = (s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*)$称为一个鲁棒Nash均衡, 如果对每个$i \in N$,

$$c_i(s_i^*, s_{-i}^*, \xi) \geqslant c_i(s_i, s_{-i}^*, \xi),\ \forall s_i \in S_i,\ \forall \xi \in \varXi,$$

其中s_{-i}^*表示除去第i个玩家后剩余$n-1$个玩家的策略组合.

设一个干扰博弈$G = (N, S, \varXi, C)$被重复进行, 那么在每个玩家都是理性的前提, 每个玩家都会根据已有的信息更新自己的策略, 设法最大化自己的利益. 假设n个玩家的局势演化方程可以表示为

$$x_i(t+1) = f_i(x_1(t), \cdots, x_n(t), \xi_1(t), \cdots, \xi_m(t)), \tag{1}$$

其中: $x_i(t) \in \mathcal{D}_{k_i}$表示第$i$个玩家在$t$时刻的策略, $i = 1, 2, \cdots, n$; $\xi_j(t) \in \mathcal{D}_{l_j}$表示第$j$个干扰在$t$时刻的值, $j = 1, 2, \cdots, m$. 将上述干扰演化博弈简记为G_D.

本文所讨论的干扰是由以下外部系统生成的:

$$\begin{cases} w_i(t+1) = g_i(w_1(t), \cdots, w_p(t)), \\ \xi_j(t) = h_j(w_1(t), \cdots, w_p(t)), \end{cases} \tag{2}$$

其中: $w_i(t) \in \mathcal{D}_{a_i}$表示系统(2)的内部状态, $i = 1, 2, \cdots, p$; $\xi_j(t) \in \mathcal{D}_{l_j}$表示系统(2)的输出, $j = 1, 2, \cdots, m$.

注 1 需要指出的是, 在工程实践中, 各种扰动, 例如谐波, 恒频波, 控制器的增益变化, 执行器故障和控制器到执行器通道中的通信波动等都可由外部系统(2)生成[36–37]. 因此, 本文考虑由系统(2)所生成的干扰对博弈的影响.

接下来, 给出上述干扰演化博弈G_D鲁棒稳定的定义.

定义 4 干扰演化博弈G_D称为是鲁棒稳定到鲁棒Nash均衡s^*的, 如果存在一个正整数ρ使得

$$x(t; x_0, \{\xi(t)\}_{t=0}^\infty) = s^*,\ \forall \{\xi(t)\}_{t=0}^\infty,\ \forall t \geqslant \rho. \tag{3}$$

对应于不能鲁棒稳定的干扰演化博弈, 考虑控制–干扰演化博弈.

定义 5 考虑一个有限干扰博弈$G = (N, S, \varXi, C)$. 称G是一个控制–干扰博弈, 如果玩家集合可以被分成两部分: $N = \{X, U\}$, 其中, $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$表示状态玩家, $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_q\}$表示控制玩家, 并且状态玩家服从特定的策略更新规则, 控制玩家的策略可以任取. 对应于玩家集合N的划分, 记$S = S^X \times S^U$, $S^X := \prod_{i=1}^n S_i^X$, $S^U := \prod_{r=1}^q S_r^U$. $s^* = (s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*) \in S^X$称为关于玩家集$X$的鲁棒Nash均衡, 如果存在$\overline{s} \in S^U$使得

$$c_i(s_i^*, s_{-i}^*, \overline{s}, \xi) \geqslant c_i(s_i, s_{-i}^*, \overline{s}, \xi),\ \forall s_i \in S_i^X,\ \forall \xi \in \varXi.$$

同样地, 一个控制–干扰演化博弈的局势演化方程

可以表示为

$$x_i(t+1)=\widetilde{f}_i(x_1(t),\cdots,x_n(t),u_1(t),\cdots,\\ u_q(t),\xi_1(t),\cdots,\xi_m(t)),\tag{4}$$

其中: $x_i(t)\in\mathcal{D}_{k_i}$表示第$i$个状态玩家在$t$时刻的策略, $i=1,2,\cdots,n$; $u_r(t)\in\mathcal{D}_{b_r}$表示第$r$个控制玩家在$t$时刻的策略, $r=1,2,\cdots,q$; $\xi_j(t)\in\mathcal{D}_{l_j}$表示第$j$个干扰在$t$时刻的值, $j=1,2,\cdots,m$. 将上述控制–干扰演化博弈简记为G_D^U.

定义 6 控制–干扰演化博弈G_D^U称为是鲁棒镇定到鲁棒Nash均衡s^*的, 如果存在一个正整数ρ和控制序列$\{u(t)\}_{t=0}^{\infty}$, 使得对任意的干扰序列$\{\xi(t)\}_{t=0}^{\infty}$和$t\geqslant\rho$有

$$x(t;x_0,\{u(t)\}_{t=0}^{\infty},\{\xi(t)\}_{t=0}^{\infty})=s^*.\tag{5}$$

注 2 在定义4(定义6)中, 要求稳定(镇定)的点是鲁棒–Nash均衡, 不失一般性, 也可以给出鲁棒稳定(镇定)到任一局势的定义. 但众所周知, Nash均衡被认为是非合作博弈的“基本解”, 在妥协意义下是每个玩家的最优选择. 因此, 本文主要考虑演化博弈鲁棒稳定(镇定)到鲁棒Nash均衡的情况, 对于一般的收敛性, 相关结果可以自然推广.

4 主要内容

在本节中, 具体讨论在什么条件下干扰演化博弈(控制–干扰演化博弈)可以实现鲁棒稳定(镇定), 并设计状态反馈控制器.

4.1 鲁棒稳定

首先, 利用矩阵半张量积, 式(1)和式(2)的代数形式可以表示为

$$x(t+1)=M\xi(t)x(t),\tag{6}$$

$$\begin{cases}w(t+1)=Gw(t),\\ \xi(t)=Hw(t),\end{cases}\tag{7}$$

其中: $x(t)=\ltimes_{i=1}^{n}x_i(t)\in\Delta_k$; $w(t)=\ltimes_{i=1}^{p}w_i(t)\in\Delta_a$; $\xi(t)=\ltimes_{i=1}^{m}\xi_i(t)\in\Delta_l$; $M\in\mathcal{L}_{k\times kl}$; $G\in\mathcal{L}_{a\times a}$; $H\in\mathcal{L}_{l\times a}$, 这里$k=\prod\limits_{i=1}^{n}k_i$, $a=\prod\limits_{i=1}^{p}a_i$, $l=\prod\limits_{i=1}^{m}l_i$.

根据式(6)和式(7), 不难得到

$$x(t+1)=MHw(t)x(t),\tag{8}$$

$$w(t+1)=Gw(t),\tag{9}$$

注意到, 系统(9)从任何初始状态出发的轨迹在有限时间内都会到达该系统的一个吸引子[5]. 记Ω_1, Ω_2, $\cdots$, Ω_α是系统(9)所有的吸引子, 令$\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{\alpha}\Omega_i$. 据此, 构造一个集合

$$\Lambda=\{w\ltimes s^*\mid w\in\Omega\},\tag{10}$$

并且令$z(t)=w(t)x(t)\in\Delta_{ka}$. 进而, 从式(8)和式(9), 得到以下辅助系统:

$$z(t+1)=G(I_a\otimes MH)\Phi_a z(t).\tag{11}$$

给定一个集合$W\subseteq\Delta_{ka}$. 称系统(11)是关于W集合稳定的, 如果存在一个正整数η, 使得$z(t;z_0)\in W$, $\forall z_0\in\Delta_{ka}$, $\forall t\geqslant\eta$. 接下来, 将干扰演化博弈的鲁棒稳定问题转化为系统(11)的集合稳定问题.

引理 3 干扰演化博弈G_D鲁棒稳定到鲁棒Nash均衡s^*, 当且仅当系统(11)是关于Λ集合稳定的.

证 (必要性) 假设干扰演化博弈G_D可以鲁棒稳定到鲁棒Nash均衡s^*, 则存在一个正整数ρ, 使得式(3)成立. 根据式(7), 如果$w(0)$给定, 那么$\{\xi(t)\}_{t=0}^{\infty}$就是已知的. 因此, $\{\xi(t)\}_{t=0}^{\infty}$的任意性就等价于$w(0)$的任意性. 另外, 当$t\geqslant\tau$时, $w(t)\in\Omega$, 这里τ是系统(9)的过渡周期. 因此, 令$\eta=\max\{\tau,\rho\}$, 则式(3)意味着

$$z(t;z_0)\in\Lambda,\ \forall z_0\in\Delta_{ka},\ \forall t\geqslant\eta,\tag{12}$$

即系统(11)是关于Λ集合稳定的.

(充分性) 假设系统(11)是关于Λ集合稳定的, 则式(12)成立. 注意到, $z(t)=w(t)x(t)$是从$\Delta_a\times\Delta_k$到Δ_{ka}的一一对应. 从而, 令$\rho=\eta$, 则式(3)成立, 即干扰演化博弈G_D可以鲁棒稳定到鲁棒Nash均衡s^*.

证毕.

基于引理3, 得到以下定理:

定理 1 干扰演化博弈G_D鲁棒稳定到鲁棒Nash均衡s^*, 当且仅当存在一个正整数$\eta\leqslant ka$, 使得

$$V_\Lambda^{\mathrm{T}}[G(I_a\otimes MH)\Phi_a]^\eta=\mathbf{1}_{ka}^{\mathrm{T}},\tag{13}$$

其中$V_\Lambda=\sum\limits_{z\in\Lambda}z$.

证 (必要性) 假设干扰演化博弈G_D可以鲁棒稳定到鲁棒Nash均衡s^*, 则由引理3, 存在正整数η, 使得$z(t;z_0)\in\Lambda$对所有的$z_0\in\Delta_{ka}$和$t\geqslant\eta$成立. 从而

$$z(\eta)=[G(I_a\otimes MH)\Phi_a]^\eta z_0\in\Lambda,\ \forall z_0\in\Delta_{ka},$$

这意味着式(13)成立. 注意到, 系统(11)的状态$z(t)\in\Delta_{ka}$, 其状态空间是有限的, 因此$\eta\leqslant ka$是显然的.

(充分性) 假设式(13)成立, 则有$z(\eta;z_0)\in\Lambda$对任意的$z_0\in\Delta_{ka}$成立. 则当$t\geqslant\eta$时, 有

$$z(t;z_0)=z(\eta;z(t-\eta;z_0))\in\Lambda,\ \forall z_0\in\Delta_{ka}.$$

根据引理3, 干扰演化博弈G_D可以鲁棒稳定到鲁棒Nash均衡s^*. 证毕.

4.2 鲁棒镇定

对于有控制玩家的情形, 利用矩阵半张量积将式(4)转化为如下代数形式:

$$x(t+1)=L\xi(t)u(t)x(t),\tag{14}$$

其中: $u(t)=\ltimes_{r=1}^{q}u_r(t)\in\Delta_b$; $L\in\mathcal{L}_{k\times klb}$, 这里$b=$

$\prod_{r=1}^{q} b_r$.

结合式(7), 可以得到

$$x(t+1) = LHw(t)u(t)x(t). \tag{15}$$

进一步, 令$z(t) = w(t)x(t) \in \Delta_{ka}$, 有如下辅助系统:

$$z(t+1) = Qu(t)z(t), \tag{16}$$

其中$Q = G(\mathbf{1}_b^{\mathrm{T}} \otimes I_a \otimes \mathbf{1}_k^{\mathrm{T}}) * LHW_{[b,a]} \in \mathcal{L}_{ka\times kab}$.

称集合$\Theta \subseteq \Delta_{ka}$为系统(16)的一个控制不变子集, 如果对任意的$z_0 \in \Theta$, 存在一个控制序列$\{u(t)\}_{t=0}^{+\infty}$使得$z(t; z_0, \{u(t)\}_{t=0}^{+\infty}) \in \Theta, \forall t \in \mathbb{Z}_+$. 包含在集合$\Lambda$中的所有控制不变子集的并, 称为集合$\Lambda$的最大控制不变子集, 记作$I_m(\Lambda)$.

算法 1 求Λ的最大控制不变子集$I_m(\Lambda)$.

Step 1 对于一个集合 $S \subseteq \Delta_{ka}$, 设 $S = \{\delta_{ka}^{i_1}, \delta_{ka}^{i_2}, \cdots, \delta_{ka}^{i_\theta}\}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_\theta$. 记$V_S = \sum_{j=1}^{\theta} \delta_{ka}^{i_j}$, $U_S = \delta_{ka}[i_1\ i_2\ \cdots\ i_\theta]$;

Step 2 令$i = 0$, $S_0 = \Lambda$;

Step 3 若 $V_{S_i}^{\mathrm{T}}(\sum_{r=1}^{b} Q\delta_b^r)U_{S_i} > \mathbf{0}_{|S_i|}^{\mathrm{T}}$, 则令 $I_m(\Lambda) = S_i$, 停止;

Step 4 计算 $S_i^c = \{\delta_{ka}^{i_j} | [V_{S_i}^{\mathrm{T}}(\sum_{r=1}^{b} Q\delta_b^r)U_{S_i}]_j = 0\}$, 令$S_{i+1} = S_i \backslash S_i^c$;

Step 5 如果$S_{i+1} = \varnothing$, 令$I_m(\Lambda) = \varnothing$, 停止. 否则, 令$i = i+1$, 返回Step 3.

给定一个集合$W \subseteq \Delta_{ka}$. 称系统(16)是关于W集合镇定的, 如果存在一个正整数η和一个控制序列$\{u(t)\}_{t=0}^{+\infty}$, 使得$z(t; z_0, \{u(t)\}_{t=0}^{+\infty}) \in W$, $\forall z_0 \in \Delta_{ka}$, $\forall t \geqslant \eta$. 接下来, 将控制–干扰演化博弈的鲁棒镇定问题转化为系统(16)的集合镇定问题.

定理 2 考虑控制–干扰演化博弈G_D^U和系统(16), 则以下命题是等价的:

1) 控制–干扰演化博弈G_D^U能够被鲁棒镇定到鲁棒Nash均衡s^*;

2) 系统(16)是关于Λ集合镇定的;

3) 存在一个正整数$\eta \leqslant ka$, 使得

$$V_{I_m(\Lambda)}^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{b} Q\delta_b^i)^\eta > \mathbf{0}_{ka}^{\mathrm{T}}, \tag{17}$$

其中"$>$"指的是两个向量对应分量的元素都满足大于关系.

证

1) $\Leftrightarrow$ 2): 类似于引理3的证明, 易知1)与2)是等价的.

2) $\Rightarrow$ 3): 假设系统(16)是关于Λ集合镇定的, 则存在正整数ρ与控制序列$\{u(t)\}_{t=0}^{\infty}$, 使得$z(t; z_0, \{u(t)\}_{t=0}^{\infty}) \in \Lambda$对所有的$z_0 \in \Delta_{ka}$和$t \geqslant \rho$成立. 下证系统(16)也是关于$I_m(\Lambda)$集合镇定的. 否则, 存在$\hat{z}_0 = \delta_{ka}^i$, 使得对任意的控制序列$\{u(t)\}_{t=0}^{\infty}$和任意的正整数$\hat{\eta}$有$z(t; \delta_{ka}^i, \{u(t)\}_{t=0}^{\infty}) \notin I_m(\Lambda)$, $t \geqslant \hat{\eta}$. 又因为系统(16)是关于Λ集合镇定的, 从而$z(t; \delta_{ka}^i, \{u(t)\}_{t=0}^{\infty}) \in \Lambda \backslash I_m(\Lambda)$, $t \geqslant \rho$. 这与$I_m(\Lambda)$是Λ的最大控制不变子集相矛盾. 因此, 系统(16)也是关于$I_m(\Lambda)$集合镇定的, 从而存在正整数$\eta \leqslant ka$和控制序列$\{u(t)\}_{t=0}^{\infty}$, 使得$z(t; z_0, \{u(t)\}_{t=0}^{\infty}) \in I_m(\Lambda)$对所有的$z_0 \in \Delta_{ka}$和$t \geqslant \eta$成立, 因此, 式(17)成立.

3) $\Rightarrow$ 2): 假设式(17)成立, 那么意味着对任意的$z_0 \in \Delta_{ka}$, 存在某一控制序列$\{u(t)\}_{t=0}^{\eta}$, 使得$z(\eta; z_0, \{u(t)\}_{t=0}^{\eta}) \in I_m(\Lambda)$. 根据最大控制不变集的定义可知, 对任意的$z_0 \in \Delta_{ka}$, 存在$\{u(t)\}_{t=0}^{+\infty}$, 使得$z(t; z_0, \{u(t)\}_{t=0}^{+\infty}) \in I_m(\Lambda) \subseteq \Lambda, \forall t \geqslant \eta$, 从而系统(16)是关于$\Lambda$集合镇定的. 证毕.

注 3 根据定理2可以知道, 若集合Λ的最大控制不变子集$I_m(\Lambda) = \varnothing$, 那么控制–干扰演化博弈$G_D^U$不能被鲁棒镇定到鲁棒Nash均衡$s^*$.

若控制–干扰演化博弈G_D^U能够被鲁棒镇定到鲁棒Nash均衡s^*, 下面讨论如何设计状态反馈控制$u(t) = Kz(t)$, 使得G_D^U能够被鲁棒镇定到鲁棒Nash均衡s^*.

算法 2 假设$I_m(\Lambda)$已经由算法1得到, 在$I_m(\Lambda) \neq \varnothing$的条件下设计形如$u(t) = Kz(t)$的状态反馈控制.

Step 1 令$S_0 = I_m(\Lambda)$, $\lambda = 1$. 设$T^\lambda = 0_{b\times ka}$;

Step 2 对所有的$i = 1, 2, \cdots, b$, $j = 1, 2, \cdots, ka$, 若$\mathrm{Col}_{(i-1)ka+j}(Q) \in S_{\lambda-1}$, 则令$[T^\lambda]_{ij} = 1$;

Step 3 计算$\Gamma_\lambda = \{\delta_{ka}^j | \mathrm{Col}_j(T^\lambda) \neq \mathbf{0}_b\}$. 令$S_\lambda = \Gamma_\lambda \setminus \bigcup_{i=0}^{\lambda-1} S_i$;

Step 4 如果$S_\lambda = \varnothing$, 那么不存在状态反馈控制器, 停止;

Step 5 如果$\bigcup_{i=0}^{\lambda} S_i = \Delta_{ka}$, 令$\lambda^* = \lambda$. 否则, 令$\lambda = \lambda + 1$, 返回Step 2;

Step 6 令$T^0 = T^1$, 则状态反馈增益矩阵K可以设计为: $\mathrm{Col}_j(K) \in \{\varphi \in \Delta_b | \varphi \circ \mathrm{Col}_j(T^i) = \varphi\}$, 其中$\delta_{ka}^j \in S_i$, $i = 0, 1, \cdots, \lambda^*$, 停止.

5 仿真算例

例 1 考虑一个干扰博弈$G = (N, S, \Xi, C)$, 其中: $|N| = 2$, $|\Xi| = 2$, $|S_i| = 3$, $i \in N$, 且$\xi = 1, 2$时的支付矩阵如表1–2所示.

假设重复进行此干扰博弈的动态演化方程为

$$x(t+1) = M\xi(t)x(t), \tag{18}$$

其中: $x(t) \in \Delta_9$, $\xi(t) \in \Delta_2$, $M = \delta_9[1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 3$

4 6 1 8 3 2 1 2 1 2 3]. 外部干扰系统为

$$\begin{cases} w(t+1) = Gw(t), \\ \xi(t) = Hw(t), \end{cases} \tag{19}$$

其中: $w(t) \in \Delta_4$, $\xi(t) \in \Delta_2$, 以及$G = \delta_4[3\ \ 1\ \ 2\ \ 4]$, $H = \delta_2[1\ \ 2\ \ 1\ \ 2]$. 由式(18)和式(19), 可以得到

$$x(t+1) = MHw(t)x(t), \tag{20}$$

$$w(t+1) = Gw(t). \tag{21}$$

令$z(t) = w(t)x(t) \in \Delta_{36}$, 得到辅助系统

$$z(t+1) = G(I_4 \otimes MH)\Phi_4 z(t), \tag{22}$$

其中

$$G(I_4 \otimes MH)\Phi_4 =$$

$$\delta_{36}[19\ 19\ 20\ 21\ 22\ 25\ 21\ 22\ 24\ 1\ 8\ 3\ 2\ 1\ 2\ \ 1\ 2\ 3\ 28\ 28\ 29\ 30\ 31\ 34\ 30\ 31\ 33\ 10\ 17\ \ 12\ 11\ 10\ 11\ 10\ 11\ 12] \in \mathcal{L}_{36\times 36}.$$

根据定义3以及干扰影响下的支付信息(表1–2), 易知$s^* = (1,1) \sim \delta_9^1$为鲁棒Nash均衡.

系统(21)的所有吸引子构成集合$\Omega = \{\delta_4^1, \delta_4^2, \delta_4^3, \delta_4^4\}$, 据此构造集合

$$\Lambda = \{w \ltimes s^* | w \in \Omega\} = \{\delta_{36}^1, \delta_{36}^{10}, \delta_{36}^{19}, \delta_{36}^{28}\}. \tag{23}$$

经过简单计算可得

$$V_\Lambda^{\mathrm{T}}(G(I_4 \otimes MH)\Phi_4)^9 = \mathbf{1}_{36}^{\mathrm{T}}. \tag{24}$$

从而, 根据定理1可知该干扰演化博弈能够鲁棒稳定到鲁棒Nash均衡s^*.

表 1 $\xi = 1$时的支付矩阵

Table 1 Payoffs when $\xi = 1$

c_i	s								
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
c_1	4	2	2	1	4	1	3	2	2
c_2	2	1	2	1	3	4	1	4	2

表 2 $\xi = 2$时的支付矩阵

Table 2 Payoffs when $\xi = 2$

c_i	s								
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
c_1	3	4	3	1	1	4	1	2	2
c_2	3	2	2	1	4	4	2	3	2

例 2 考虑如下控制–干扰博弈$G = (N, S, \Xi, C)$, 其中, $N = X \cup U$, $|X| = 2$, $|U| = 1$, $|\Xi| = 2$, $|S_i| = 3, i \in X$, $|S_j| = 2, i \in U$, 且$\xi = 1, 2$时的支付矩阵如表3–4所示.

根据支付信息(表3–4)和定义5, 易知$s^* = (1,1) \sim \delta_9^1$是关于玩家集$X$的鲁棒Nash均衡.

表 3 $\xi = 1$时的支付矩阵

Table 3 Payoffs when $\xi = 1$

c_i	s																	
	111	112	121	122	131	132	211	212	221	222	231	232	311	312	321	322	331	332
c_1	9	8	1	2	3	6	2	4	3	5	2	4	1	4	4	1	4	2
c_2	13	7	4	4	2	6	1	7	4	3	3	2	4	3	1	2	4	3

表 4 $\xi = 2$时的支付矩阵

Table 4 Payoffs when $\xi = 2$

c_i	s																	
	111	112	121	122	131	132	211	212	221	222	231	232	311	312	321	322	331	332
c_1	6	7	4	1	5	6	4	3	5	7	1	9	3	8	3	2	3	2
c_2	10	9	6	3	3	8	3	5	8	4	6	1	4	1	3	6	2	3

设外部干扰系统仍为例1中所述, 控制–干扰演化博弈的局势演化方程为

$$x(t+1) = L\xi(t)u(t)x(t), \tag{25}$$

其中: $x(t) \in \Delta_9$, $\xi(t) \in \Delta_2$, $u(t) \in \Delta_2$, 且

$$L =$$

$$\delta_9[1\ 4\ 2\ 3\ 4\ 9\ 3\ 4\ 2\ 1\ 3\ 4\ 2\ 1\ 5\ 1\ 2\ 3\ 1\ 1\ \ 2\ 3\ 4\ 1\ 3\ 1\ 2\ 1\ 8\ 4\ 2\ 1\ 5\ 1\ 2\ 3] \in \mathcal{L}_{9\times 36}.$$

进一步, 令$z(t) = w(t)x(t) \in \Delta_{36}$, 有如下辅助系统:

$$z(t+1)=Qu(t)z(t), \tag{26}$$

其中:

$$Q=G(\mathbf{1}_2^{\mathrm{T}}\otimes I_4\otimes \mathbf{1}_9^{\mathrm{T}})*LHW_{[2,4]}=$$
$$\delta_{36}[19\ 4\ 20\ 3\ 22\ 9\ 21\ 4\ 20\ 1\ 21\ 4\ 20\ 1$$
$$23\ 1\ 20\ 3\ 28\ 13\ 29\ 12\ 31\ 18\ 30\ 13$$
$$29\ 10\ 30\ 13\ 29\ 10\ 32\ 10\ 29\ 12\ 19\ 1$$
$$20\ 3\ 22\ 1\ 21\ 1\ 20\ 1\ 26\ 4\ 20\ 1\ 23\ 1$$
$$20\ 3\ 28\ 10\ 29\ 12\ 31\ 10\ 30\ 10\ 29\ 10$$
$$35\ 13\ 29\ 10\ 32\ 10\ 29\ 12]\in\mathcal{L}_{36\times72}.$$

由$\Lambda=\{w\ltimes s^*|w\in\Omega\}=\{\delta_{36}^1,\delta_{36}^{10},\delta_{36}^{19},\delta_{36}^{28}\}$, 进而根据算法1, 可得$\Lambda$的最大控制不变子集为$I_m(\Lambda)=\Lambda=\{\delta_{36}^1,\delta_{36}^{10},\delta_{36}^{19},\delta_{36}^{28}\}$. 根据定理2,

$$V_{I_m(\Lambda)}^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{2}Q\delta_2^i)^7>\mathbf{0}_{36}^{\mathrm{T}}, \tag{27}$$

这说明该控制–干扰演化博弈能够鲁棒镇定到s^*.

根据算法2, 求得状态反馈控制器如下:

$$u(t)=Kz(t),$$

其中$K=\delta_2[k_1\ \ k_2\ \ k_3\ \ \cdots\ \ k_{36}]$满足

$$\begin{cases} k_i=1, & i=1,3,4,6,7,9,11,13,17,18,\\ & 23,30,33;\\ k_j=2, & j=2,5,8,12,15,19,20,21,22,\\ & 24,25,26,27,29,31,35,36;\\ k_r\in\{1,2\}, & r=10,14,16,28,32,34. \end{cases}$$

换言之, 控制玩家可以根据上述所得的状态反馈控制器来更新的自己的策略, 以实现该控制–干扰演化博弈鲁棒镇定到s^*.

6 结论

本文研究了演化博弈的鲁棒稳定与镇定问题. 在干扰演化博弈与控制–干扰演化博弈鲁棒稳定与镇定等概念的基础上, 利用矩阵半张量积得到了代数状态空间表示. 进一步, 通过构造一个辅助系统, 得到了鲁棒稳定与镇定的充分必要条件, 并且设计了状态反馈控制器. 最后, 通过例子验证了所得结论的有效性.

参考文献:

[1] VON NEUMANN J, MORGENSTERN O. *Theory of Game and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944.

[2] NASH J. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 1951, 54(2): 286 – 295.

[3] GALE D, SHAPLEY L S. College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, 1962, 69(1): 9 – 15.

[4] XIE Zheng. *Game Theory: An Introduction*. Beijing: Science Press, 2010.
(谢政. 对策论导论. 北京: 科学出版社, 2010.)

[5] CHENG D, QI H, LI Z. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach*. London: Springer, 2011.

[6] CHENG D, QI H, ZHAO Y. *An Introduction to Semi-tensor Product of Matrices and Its Applications*. Singapore: World Scientific, 2012.

[7] LI Yalu, LI Haitao, DING Xueying. Stability and stabilization in distribution of probabilistic boolean networks with switching probability distribution. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(11): 1896 – 1904.
(李雅璐, 李海涛,丁雪莹. 具有切换概率分布的概率布尔网络的依分布稳定和镇定. 控制理论与应用, 2019, 36(11): 1896 – 1904.)

[8] CHENG Daizhan, LIU Zequn. Application of semi-tensor product of matrices to finite games. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(11): 1812 – 1819.
(程代展, 刘泽群. 有限博弈的矩阵半张量积方法. 控制理论与应用, 2019, 36(11): 1812 – 1819.)

[9] ZHONG J, LU J, HUANG C, et al. Finding graph minimum stable set and core via semi-tensor product approach. *Neurocomputing*, 2016, 174: 588 – 596.

[10] ZHANG Z, CHEN Z, LIU Z. Modeling and reachability of probabilistic finite automata based on semi-tensor product of matrices. *Science China Information Sciences*, 2018, 61(12): 1 – 3.

[11] LI R, YANG M, CHU T. State feedback stabilization for Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1853 – 1857.

[12] HONG L L, WANG W, LIU X P. Universal approximation of fuzzy relation models by semi-tensor product. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 28(11): 2972 – 2981.

[13] FAN Hongbiao, FENG June, MENG Min. Solutions to fuzzy relation inequality $A\circ X\circ B\leqslant C$. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(5): 694 – 700.
(范洪彪, 冯俊娥, 孟敏. 模糊关系不等式$A\circ X\circ B\leqslant C$的解. 控制理论与应用, 2016, 33(5): 694 – 700.)

[14] CHENG D. On finite potential games. *Automatica*, 2014, 50(7): 1793 – 1801.

[15] CHENG D, LIU T, ZHANG K. On decomposed subspaces of finite games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(11): 3651 – 3656.

[16] CHENG D, HE F, QI H, et al. Model, analysis and control of networked evolutionary games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 61(9): 2402 – 2415.

[17] LIU T, WANG J, ZHANG X, et al. Game theoretic control of multiagent systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2019, 57(3): 1691 – 1709.

[18] LI C, XING Y, HE F, et al. A strategic learning algorithm for state-based games. *Automatica*, 2020, 113(3): 108615.

[19] FISHER R A. *The Genetic Theory of Natural Selection*. Oxford: Clarendon Press, 1930.

[20] TRIVERS R L. The evolution of reciprocal altruism. *Quarterly Review of Biology*, 1971, 46(1): 5 – 57.

[21] HAMILTON W D. The genetical evolution of social behaviour. *Journal of Theoretical Biology*, 1964, 7(1): 17 – 52.

[22] SMITH J M. The logic of animal conflict. *Nature*, 1973, 246(5427): 15 – 18.

[23] SUGDEN R. *The Economics of Rights, Cooperation and Welfre*. Oxford: Blackwwell, 1986.

[24] OHTSUKI H, HAUERT C, LIEBERMAN E, NOWAK M A. A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks. *Nature*, 2006, 441(7092): 502 – 505.

[25] MOJICA E, MACANA C A, QUIJANO N. Dynamic population games for optimal dispatch on hierarchical microgrid control. *IEEE Transactions on Systems, Man, & Cybernetics: Systems*, 2014, 44(3): 306 – 317.

[26] WANG Y, CHENG D. Stability and stabilization of a class of finite evolutionary games. *Journal of Franklin Institute*, 2017, 354(3): 1603 – 1617.

[27] WANG Y, CHENG D. Dynamics and stability for a class of evolutionary games with time delays in strategies. *Science China Information Sciences*, 2016, 59(9): 092209.

[28] LI H, DING X, ALSAEDI A, et al. Stochastic set stabilization of n-person random evolutionary Boolean games and its applications. *IET Control Theory and Applications*, 2017, 11(13): 2152 – 2160.

[29] DING X, LI H, YANG Q, et al. Stochastic stability and stabilization of n-person random evolutionary Boolean games. *Mathematics and Computation*, 2017, 306: 1 – 12.

[30] CHENG D, XU T, QI H. Evolutionarily stable strategy of networked evolutionary games. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(7): 1335 – 1345.

[31] LIU T, WANG Y, CHENG D. Dynamics and stability of potential hyper-networked evolutionary games. *International Journal of Automation and Computing*, 2017, 14(2): 229 – 238.

[32] JIMENEZ M, POZNYAK A. ε-equilibrium in LQ differential games with bounded uncertain disturbances: robustness of standard strategies and new strategies with adaptation. *International Journal of Control*, 2006, 79(7): 786 – 797.

[33] JIMENEZ M, BASIN M, RODIGUEZ V, et al. Open-loop Nash equilibrium in polynomial differential games via state-dependent Riccati equation. *Automatica*, 2015, 53: 155 – 163.

[34] YUAN Y, WANG Z, GUO L. Event-triggered strategy design for discrete-time nonlinear quadratic games with disturbance compensations: The noncooperative case. *IEEE Transactions on Systems, Man, & Cybernetics: Systems*, 2018, 48(11): 1885 – 1896.

[35] YANG Yaohong, FAN Jun, ZHU Duoduo. Research on construction supply chain quality management based on stochastic evolutionary game. *Journal of Engineering Management*, 2020, 34(6): 19 – 24. (杨耀红, 樊俊, 朱朵朵. 基于随机演化博弈的建筑工程供应链质量管理研究. 工程管理学报, 2020, 34(6): 19 – 24.)

[36] GUO L, CAO S. *Anti-Disturbance Control for Systems with Multiple Disturbances*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2013.

[37] WEI X J, WU Z J, KARIMI H R. Disturbance observer-based disturbance attenuation control for a class of stochastic systems. *Automatica*, 2016, 63: 21 – 25.

作者简介:

赵 荣 硕士研究生, 2020年于山东师范大学数学与统计学院获学士学位, 目前研究方向为逻辑网络、有限博弈等, E-mail: zhaorongjy1126@163.com;

冯俊娥 教授, 博士生导师, 1994年于聊城师范学院(今聊城大学), 数学教育专业, 获学士学位; 1997年毕业于山东大学, 基础数学专业, 获硕士学位; 2003年毕业于山东大学, 运筹学与控制论专业, 获博士学位, 主要学术兼职有中国自动化学会“信息物理系统控制与决策专业委员会”委员, 山东省自动化学会理事, 美国数学评论评论员, Cogent Mathematics & Statistics编委,《控制与决策》责任编委, IEEE CSS (Control Systems Society) Conference Editorial Board (IEEE 控制系统学会编委), 目前研究方向为逻辑网络、鲁棒控制等, E-mail: fengjune@sdu.edu.cn.