

# 任意相对阶下非线性切换系统的事件触发漏斗控制

龙离军<sup>†</sup>, 王凤兰

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘要:** 针对一类具有任意相对阶且带有部分非输入到状态稳定逆动态的非线性切换系统, 提出一种动态事件触发漏斗跟踪控制方案. 首先, 引入一个虚拟输出将任意相对阶的非线性切换系统转换为相对阶为一的非线性切换系统. 其次, 设计各子系统的事件触发漏斗控制器和切换的动态事件触发机制, 解决候选事件触发漏斗控制器和子系统之间的异步切换问题, 所提方案消除已有文献中为所有子系统设计共同控制器带来的保守性. 在一类具有平均驻留时间切换信号的作用下, 保证切换闭环系统的所有信号都是有界的, 且跟踪误差一直在预设的漏斗内演化, 并排除采样中的奇诺现象. 最后, 一个仿真例子验证方案的实用性和有效性.

**关键词:** 非线性切换系统; 漏斗控制; 平均驻留时间; 事件触发控制

**引用格式:** 龙离军, 王凤兰. 任意相对阶下非线性切换系统的事件触发漏斗控制. 控制理论与应用, 2021, 38(11): 1717 – 1726

DOI: 10.7641/CTA.2021.10765

## Event-triggered funnel control for switched nonlinear systems with arbitrary relative degree

LONG Li-jun<sup>†</sup>, WANG Feng-lan

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China)

**Abstract:** In this paper, a dynamic event-triggered funnel tracking control scheme is proposed for a class of switched nonlinear systems with arbitrary relative degree and partial non-input-to-state stability inverse dynamics. First of all, a virtual output is introduced to convert an arbitrary relative degree switched nonlinear system into a switched nonlinear systems with relative degree one. Second, by designing event-triggered funnel controller of individual subsystem and a switching dynamic event-triggering mechanism, the problem of asynchronous switching between candidate event-triggered funnel controllers and subsystems is addressed. The proposed scheme eliminates the conservativeness caused by the design of a common controller for all subsystems in the existing literature. It is ensured that under a class of switching signals with average dwell time, all signals in the switched closed-loop system are bounded, and the tracking error evolves within a prescribed funnel all the time. Also, Zeno phenomenon of sampling is avoided. Finally, one example is utilized to verify the applicability and effectiveness of the proposed control scheme.

**Key words:** switched nonlinear systems; funnel control; average dwell time; event-triggered control

**Citation:** LONG Lijun, WANG Fenglan. Event-triggered funnel control for switched nonlinear systems with arbitrary relative degree. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(11): 1717 – 1726

## 1 引言

近十年来, 随着数字电子技术的快速发展, 数据采样控制受到越来越多学者的关注. 传统上, 控制系统组件之间的信息传输大多是利用周期采样(时间触发)的方式进行的, 这往往会造成不必要的采样和数据传输. 值得指出的是, 事件触发控制被提出和发展<sup>[1-2]</sup>. 与传统的时间触发控制相比, 事件触发控制中

的采样/执行是由对应系统行为的特定“事件”触发的. 而设计者可以根据实际需求来设计这些“事件”发生的条件, 即系统根据触发条件来决定是否进行状态或者输出的采样以及控制器的更新. 文献[1]已经指出, 相比于传统的周期采样方式, 事件触发控制可以大大节约计算和通信资源. 针对非线性系统, 不同的事件触发机制已经出现<sup>[2-3]</sup>.

收稿日期: 2021-08-20; 录用日期: 2021-11-05.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: longlijun@ise.neu.edu.cn; long\_lijun@126.com.

本文责任编辑: 赵千川.

国家自然科学基金项目(62173075, 61773100), 辽宁省“兴辽英才计划”项目(XLYC1907043), 中央高校基本科研业务费项目(N2004015)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62173075, 61773100), the Liaoning Revitalization Talents Program (XLYC1907043) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (N2004015).

另一方面, 作为一类特殊的混杂系统, 切换系统由一系列子系统和决定子系统切换的切换信号组成. 切换系统有其广泛的应用背景, 比如机械系统、电力系统、化学反应釜等均可建模为切换系统<sup>[4-6]</sup>. 相应地, 各种控制问题均得到了广泛研究<sup>[4, 7-8]</sup>. 特别地, 关于非线性切换系统的跟踪控制已得到广泛关注<sup>[6, 9]</sup>. 然而, 上述方法不能控制跟踪误差的暂态性能. 幸运地, 文献[10]提出了漏斗控制方法. 通过利用漏斗控制技术, 可以保证跟踪误差一直在预设的漏斗内演化, 由此来控制跟踪误差的暂态性能<sup>[10-11]</sup>. 然而, 这些漏斗控制方法都是仅针对非切换系统而言的, 并且是在连续时间反馈的框架下建立的, 因此, 这些方法不能直接应用到数字平台上. 鉴于此, 研究非线性切换系统的事件触发漏斗控制是有理论和实际意义的.

近年来, 关于切换系统的事件触发控制成果不断出现. 例如, 文献[12-14]研究了线性切换系统的事件触发控制问题. 针对非线性切换系统, 自适应事件触发控制问题也得到研究<sup>[15-19]</sup>. 然而, 文献[15-16]仅为所有子系统设计了共同的控制器, 绕开了异步切换问题. 文献[19]处理了异步切换问题, 但没有考虑跟踪误差的暂态性能. 此外, 文献[15-17, 19]并未考虑带有非输入到状态稳定(input-to-state stability, ISS)逆动态非线性切换系统的情况. 事实上, 据笔者所知, 到目前为止, 关于如何处理任意相对阶且带有非ISS逆动态的非线性切换系统的事件触发漏斗控制问题还鲜有报道. 这主要是因为, 在非线性切换系统的事件触发漏斗控制的研究中, 由于子系统切换, 事件触发和跟踪误差受限的相互影响, 如何处理子系统控制器与子系统之间的异步切换问题, 保证跟踪误差一直在预设的漏斗内演化, 以及通过克服子系统切换可能导致触发的困难以排除采样中的奇诺现象都是具有挑战性的问题.

基于上述的讨论, 本文针对一类具有任意相对阶且带有部分非ISS逆动态的非线性切换系统, 研究事件触发漏斗跟踪控制问题. 相比于现有的结果, 本文的主要特点如下: 1) 首次研究具有任意相对阶且带有部分非ISS逆动态的非线性切换系统的事件触发漏斗控制问题; 2) 通过设计各子系统的事件触发漏斗控制器和切换的动态事件触发机制, 有效地处理异步切换问题. 所提出的方法消除文献[15-16]中设计共同控制器带来的保守性; 3) 不同于文献[15-19], 本文通过引入一类具有平均驻留时间的切换信号, 保证带有部分非ISS逆动态的非线性切换系统的事件触发漏斗控制问题的可解性. 确保跟踪误差一直在预设的漏斗内演化, 并避免采样中的奇诺现象.

**注1** 在本文中,  $\mathbb{R}^n$ 表示 $n$ 维欧氏空间,  $\mathbb{R}$ 为实数集,  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是非负实数集,  $\mathbb{R}_+$ 表示正实数集, 非负整数集表示为 $\mathbb{N}$ .  $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示绝对值和欧氏范数. 如果一个连续的函

数 $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是严格递增的, 并且满足 $\alpha(0) = 0$ , 则它被称为类 $\mathcal{K}$ 函数. 如果 $\alpha$ 是无界的, 则是类 $\mathcal{K}_\infty$ 函数.  $h(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_+)$ 表示一类有界函数, 其导数也是有界的.  $\lambda_{\min}(\cdot)$ 表示矩阵 $\cdot$ 的最小特征值. 如果存在正常数 $\tilde{r}$ 和 $\tilde{c}$ , 使得 $|\tilde{\delta}_1(\tilde{a})| \leq \tilde{r}|\tilde{\delta}_2(\tilde{a})|$ ,  $\forall |\tilde{a}| < \tilde{c}$ , 则 $\tilde{\delta}_1(\tilde{a}) = O(\tilde{\delta}_2(\tilde{a}))$ .

## 2 问题描述与预备知识

### 2.1 系统描述

考虑如下非线性切换系统:

$$\dot{\xi} = h_{\sigma(t)}(\xi, x_1), \quad (1a)$$

$$\dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, \rho - 1, \quad (1b)$$

$$\dot{x}_\rho = g_{\sigma(t)}(x)u_{\sigma(t)} + \Delta_{\sigma(t)}(t, \xi, x), \quad (1c)$$

$$y = x_1, \quad (1d)$$

其中:  $\xi \in \mathbb{R}^{n-\rho}$ ,  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_\rho]^T \in \mathbb{R}^\rho$ 是系统的状态;  $\sigma(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$ 是一个分段右连续的常值函数, 称之为切换信号; 对应于每个 $k \in M$ ,  $u_k$ 是第 $k$ 个子系统的事件触发控制输入;  $y$ 为系统的输出;  $h_k$ 和 $g_k$ 是局部李普希茨函数;  $\Delta_k$ 是关于 $(\xi, x)$ 局部李普希茨的, 关于 $t$ 分段连续且有界的函数. 记 $\{t_p, p \in \mathbb{N}\}$ ,  $t_p < t_{p+1}$ 表示切换时刻序列. 对任意 $t \in [t_p, t_{p+1})$ , 第 $k_p$ 个子系统是激活的, 即 $\sigma(t) = k_p$ . 为简便起见, 本文假定 $t_0 = 0$ .

控制目标: 针对非线性切换系统(1), 给定参考信号 $y_r(t)$ , 通过设计各子系统的事件触发漏斗控制器和合适的事件触发机制, 保证切换闭环系统的所有信号在一类平均驻留时间切换信号作用下是有界的, 跟踪误差 $y(t) - y_r(t)$ 一直保持在预设的性能漏斗里演化. 同时, 避免采样中的奇诺现象.

为了实现上述控制目标, 给出几个假设, 定义和引理.

**假设1**<sup>[6]</sup> 给定参考信号 $y_r(t)$ 和它的时间导数直到 $y_r^{(\rho)}(t)$ 都是有界的, 且 $y_r^{(\rho)}(t)$ 是分段连续的.

**假设2** 对任意 $k \in M$ , 存在已知正常数 $\underline{g}$ , 使得 $\underline{g} \leq |g_k(x)|$ .

**假设3** 针对切换系统(1a)和任意 $k \in M$ , 存在连续可微函数 $W_k(\xi): \mathbb{R}^{n-\rho} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , 已知类 $\mathcal{K}_\infty$ 函数 $\underline{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha}$ , 类 $\mathcal{K}$ 函数 $\alpha_0$ , 和正常数 $\mu_0 > 1$ ,  $\lambda_s$ ,  $\lambda_u$ , 使得

$$\underline{\alpha}(\|\xi\|) \leq W_k(\xi) \leq \bar{\alpha}(\|\xi\|), \quad (2a)$$

$$W_k(\xi) \leq \mu_0 W_l(\xi), \quad \forall k, l \in M, \quad (2b)$$

$$\forall \|\xi\| \geq \alpha_0(|x_1|) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial W_k}{\partial \xi} h_k(\xi, x_1) \leq -\lambda_s W_k(\xi), & \forall k \in M_s, \\ \frac{\partial W_k}{\partial \xi} h_k(\xi, x_1) \leq \lambda_u W_k(\xi), & \forall k \in M_u, \end{cases} \quad (2c)$$

其中:  $M_s \cup M_u = M$ ,  $M_s \cap M_u = \emptyset$ .

**注2** 在切换系统或非切换系统的跟踪控制研究中,

假设1是常见的. 假设2表明 $g_k(x) \neq 0, \forall t \geq 0$ . 不失一般性, 进一步假定 $g_k(x) \geq \underline{g}$ . 根据假设3, 容易看出非线性切换系统(1)可以带有部分非ISS的逆动态(1a), 其中,  $M_s$ 表示对 $x_1$ 是ISS的子系统的集合,  $M_u$ 表示对 $x_1$ 是非ISS的子系统的集合. 不同于现有的关于非线性切换系统的事件触发控制的文献[15–19], 它们都未考虑非线性切换系统可以带有非ISS逆动态, 本文提出的方法可以解决带有部分非ISS逆动态的非线性切换系统的事件触发漏斗控制问题.

为简便起见, 对任意时间间隔 $[\tau, t], t_0 \leq \tau \leq t$ , 记 $T^u(t, \tau)$ 为属于集合 $M_u$ 的子系统在时间区间 $[\tau, t]$ 中被激活的总时间,  $T^s(t, \tau)$ 为属于集合 $M_s$ 的子系统在时间区间 $[\tau, t]$ 中被激活的总时间, 则有 $T^s(t, \tau) + T^u(t, \tau) = t - \tau$ .

**定义 1**<sup>[4]</sup> 对任意的切换信号 $\sigma(t)$ , 如果存在两个正数 $N_0$ 和 $\tau_a$ , 使得

$$N_\sigma(T, t) \leq N_0 + \frac{T - t}{\tau_a}, \quad \forall T \geq t \geq t_0, \quad (3)$$

其中:  $N_\sigma(T, t)$ 表示在时间间隔 $[t, T]$ 内切换的次数,  $N_0$ 是抖动界. 则称切换信号 $\sigma(t)$ 具有平均驻留时间 $\tau_a$ .

**引理 1**<sup>[20]</sup> 如果切换系统(1a)满足假设3, 且存在常数 $T_0 \geq 0$ 和 $c_0$ 满足 $0 < c_0 < \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_u}$ 和 $\forall t \geq \tau \geq t_0$ :  $T^u(t, \tau) \leq T_0 + c_0(t - \tau)$ , 则在一类满足平均驻留时间

$$\tau_a > \frac{\ln \mu_0}{\lambda_s(1 - c_0) - \lambda_u c_0} \quad (4)$$

的切换信号作用下, 切换系统(1a)的状态满足

$$\|\xi(t)\| \leq \underline{\alpha}(\mu_0 e^{(\lambda_s + \lambda_u)T_0} e^{-\lambda(t-t_0)} \bar{\alpha}(\|\xi(t_0)\|)) + \gamma_0(\|x_1\|_{[t_0, t]}), \quad (5)$$

其中:  $\lambda \in (0, \lambda_s - (\lambda_s + \lambda_u)c_0)$ ,  $\gamma_0(\cdot) = \underline{\alpha}^{-1}(\mu_0^{N_0} \times e^{(\lambda_s + \lambda_u)T_0} \bar{\alpha}(2\alpha_0(\cdot)))$ , 且 $\|x_1\|_{[t_0, t]}$ 表示在时间间隔 $[t_0, t]$ 中 $\|x_1\|$ 的最大值.

针对非线性切换系统(1), 考虑如下坐标变换:

$$z_1 = x_1 - y_r, \quad (6a)$$

$$z_i = a^{i-1}(x_i - y_r^{(i-1)}), \quad i = 2, \dots, \rho - 1, \quad (6b)$$

$$z_\rho = a^{\rho-1}(x_\rho - y_r^{(\rho-1)}), \quad (6c)$$

其中 $a > 0$ 是一个比例变量. 上述的坐标变换整理为矩阵形式

$$x = C^{-1}(a)z + \tilde{y}_r, \quad (7)$$

其中:  $z = [z_1 \ \dots \ z_\rho]^T$ ,  $\tilde{y}_r = [y_r \ \dots \ y_r^{(\rho-1)}]^T$ , 且 $C(a) = \text{diag}\{1, a, \dots, a^{\rho-2}, a^{\rho-1}\}$ .

通过上述的坐标变换, 切换系统(1)转换为

$$\dot{\xi} = h_{\sigma(t)}(\xi, x_1), \quad (8a)$$

$$a\dot{z}_i = z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, \rho - 1, \quad (8b)$$

$$a\dot{z}_\rho = a^\rho[g_{\sigma(t)}(x)u_{\sigma(t)} + \Delta_{\sigma(t)}(t, \xi, x) - y_r^{(\rho)}], \quad (8c)$$

其中 $e = z_1 = x_1 - y_r$ 是跟踪误差, 且

$$x = [z_1 + y_r \ \frac{z_2}{a} + y_r^{(1)} \ \dots \ \frac{z_\rho}{a^{\rho-1}} + y_r^{(\rho-1)}]^T.$$

**假设 4** 对任意 $k \in M$ 和 $a \in (0, a_1)$ ,  $a_1 > 0$ 是一个常数, 存在已知连续函数 $\bar{\Delta}_k(\cdot)$ , 使得对于所有 $t \geq 0$ , 如下不等式成立:

$$|a^{\rho-1}\Delta_k(t, \xi, C^{-1}(a)z + \tilde{y}_r)| \leq \bar{\Delta}_k(\|\xi\|, \|z\|). \quad (9)$$

**注 3** 基于假设4, 文献[11]研究了非线性非切换系统的漏斗控制, 但提出的方法不能直接扩展去解决带有非ISS逆动态的非线性切换系统的事件触发漏斗控制问题. 主要原因是由于子系统切换和事件触发的交互作用造成的异步切换和采样中奇诺现象的排除是两个急需解决的挑战性问题.

## 2.2 漏斗控制

为了控制跟踪误差的暂态行为, 漏斗控制被提出<sup>[10]</sup>. 漏斗控制是通过利用系统的高增益性质来保证跟踪误差在预设的性能漏斗里演化. 图1描述跟踪误差在预设性能漏斗里演化的过程. 根据文献[11], 性能漏斗描述为

$$F_\varphi := \{(t, e) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} | \varphi(t)|e| < 1\}, \quad (10)$$

其中函数 $\varphi$ 满足 $\varphi \in \Psi$ , 且

$$\Psi := \{\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_+) | \forall t \geq 0 : \varphi(t) > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \inf \varphi(t) > 0\}. \quad (11)$$

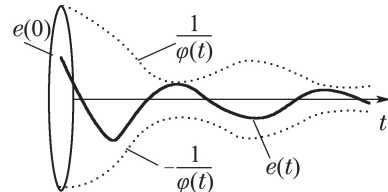


图 1 性能漏斗 $F_\varphi$

Fig. 1 Performance funnel  $F_\varphi$

根据性能漏斗(10), 漏斗的边界是由函数 $\varphi(t)$ 的倒数确定, 记漏斗边界为 $\psi(t) = \frac{1}{\varphi(t)}$ . 在本文中, 假定漏斗是有限的, 即 $\varphi(0) > 0$ .

为了保证跟踪误差 $e(t)$ 一直在性能漏斗里演化, 一般来说, 选择漏斗控制器为

$$u(t) = -\Gamma(t)e(t), \quad (12a)$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\psi - |e|}. \quad (12b)$$

显然, 如果跟踪误差的绝对值 $|e|$ 靠近漏斗边界 $\psi$ , 控制增益 $\Gamma(t)$ 将增大, 反之, 如果跟踪误差的绝对值 $|e|$ 远离漏斗边界 $\psi$ , 控制增益 $\Gamma(t)$ 将减小.

## 3 主要结果

在本节中, 为了求解带有部分非ISS逆动态的非线

性切换系统(1)的事件触发漏斗控制问题, 首先给出各子系统的事件触发漏斗控制器和切换的动态事件触发机制的设计过程, 然后给出切换闭环系统的稳定性分析.

### 3.1 事件触发漏斗控制器设计

为了充分利用计算和通信资源, 本文将为切换系统(1)设计各子系统的事件触发漏斗控制器. 为了设计各子系统的事件触发漏斗控制器, 首先, 注意切换系统(8)关于 $e$ 的相对阶为 $\rho$ . 接下来通过引入一个虚拟输出 $\vartheta$ , 将相对阶为 $\rho$ 的系统转换为关于虚拟输出是相对阶为1的系统. 根据文献[11], 设计虚拟输出 $\vartheta$ 为

$$\vartheta = z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_\rho z_\rho, \quad (13)$$

其中 $\lambda_2, \dots, \lambda_\rho$ 是正的设计常数. 此时, 注意切换系统(8)关于虚拟输出 $\vartheta$ 的相对阶为1. 对虚拟输出 $\vartheta$ 求时间导数, 可得

$$a\dot{\vartheta} = z_2 + \lambda_2 z_3 + \cdots + \lambda_{\rho-1} z_\rho + a^\rho \lambda_\rho [g_{\sigma(t)}(x)u_{\sigma(t)} + \Delta_{\sigma(t)}(t, \xi, x) - y_r^{(\rho)}]. \quad (14)$$

接下来, 对任意 $k \in M$ , 设计漏斗控制器为

$$\hat{u}_k(t) = \frac{1}{a^\rho \lambda_\rho} (-z_2 - \lambda_2 z_3 - \cdots - \lambda_{\rho-1} z_\rho + a\delta_k \hat{v}), \quad (15a)$$

$$\hat{v} = -\frac{1}{\psi(t) - |\vartheta|} \vartheta, \quad (15b)$$

其中:  $\delta_k$ 是正常数,  $\hat{v}$ 是辅助输入. 因此, 事件触发漏斗控制器设计为

$$u_{\sigma(t)}(t) = \hat{u}_{\sigma(t_j^e)}(t_j^e), \quad t \in [t_j^e, t_{j+1}^e), \quad (16)$$

其中 $\{t_j^e, j \in \mathbb{N}\}$ 表示触发时刻序列, 满足 $t_j^e < t_{j+1}^e$ . 为简便起见, 假定初始的触发时刻为 $t_0^e = 0$ .

事实上, 在非线性切换系统的事件触发漏斗控制研究中, 当在任意连续的触发间隔内发生子系统切换时, 候选子系统的控制器和子系统之间就会自然地发生异步切换. 异步切换可能会降低切换系统性能, 甚至造成切换系统的不稳定. 在本文中, 为了处理异步切换问题, 一个切换的动态事件触发机制设计如下:

$$\tilde{e}_{\sigma(t)}(t) = u_{\sigma(t)}(t) - \hat{u}_{\sigma(t)}(t), \quad (17)$$

$$t_{j+1}^e = \inf\{t > t_j^e | \eta(t) + \theta(r_{1\sigma(t)} - |\tilde{e}_{\sigma(t)}(t^-)|) \leq 0\}, \quad (18)$$

其中:  $\tilde{e}_{\sigma(t)}$ 是切换的采样误差,  $\theta > 0$ 和 $r_{1k} > 0, k \in M$ 是设计常数,  $\eta(t)$ 是内部动态变量, 满足

$$\dot{\eta}(t) = -r_0 \eta(t) + r_{1\sigma(t)} - |\tilde{e}_{\sigma(t)}(t)|, \quad (19)$$

其中 $r_0 > 0$ 是常数, 且初值满足 $\eta(0) > 0$ . 联合式(17)–(19)和 $r_0 > 0, r_{1k} > 0, k \in M$ , 并利用比较引理<sup>[21]</sup>, 容易得出对所有 $t \geq 0$ , 有 $\eta(t) + \theta(r_{1\sigma(t)} - |\tilde{e}_{\sigma(t)}(t)|) \geq 0$ 和 $\eta(t) \geq 0$ . 另外, 式(19)表明 $\dot{\eta}(t) \leq -r_0 \eta(t) +$

$\max_{k \in M}\{r_{1k}\}$ , 结合 $\eta(t) \geq 0$ , 容易得出 $\eta(t)$ 是有界的.

根据式(15a)(17), 式(14)整理为

$$a\dot{\vartheta} = a\delta_{\sigma(t)}\hat{v} + a^\rho \lambda_\rho [\Delta_{\sigma(t)}(t, \xi, x) - y_r^{(\rho)}] + a^\rho \lambda_\rho g_{\sigma(t)}(x)\tilde{e}_{\sigma(t)}. \quad (20)$$

则系统(8b)和(20)写成奇异摄动的形式:

$$\dot{\vartheta} = \delta_{\sigma(t)}\hat{v} + a^{\rho-1} \lambda_\rho [\Delta_{\sigma(t)}(t, \xi, x) - y_r^{(\rho)}] + a^{\rho-1} \lambda_\rho g_{\sigma(t)}(x)\tilde{e}_{\sigma(t)}, \quad (21a)$$

$$a\dot{\bar{z}}_{\rho-1} = A\bar{z}_{\rho-1} + B\vartheta, \quad (21b)$$

其中:  $\bar{z}_{\rho-1} = [z_1 \ \cdots \ z_{\rho-1}]^T$ , 矩阵 $A = [0 \ 1 \ \cdots \ 0; 0 \ 0 \ 1 \ \cdots \ 0; \cdots; 0 \ \cdots \ 0 \ 1; -1/\lambda_\rho \ \cdots -\lambda_{\rho-2}/\lambda_\rho \ -\lambda_{\rho-1}/\lambda_\rho] \in \mathbb{R}^{(\rho-1) \times (\rho-1)}$ 和 $B = [0 \ \cdots 1/\lambda_\rho] \in \mathbb{R}^{(\rho-1) \times 1}$ . 对于矩阵 $A$ , 通过选择正常数 $\lambda_2, \dots, \lambda_\rho$ 保证它是赫尔维茨的.

那么, 系统(8a)(21a)(21b)的标准形式描述为

$$\dot{\xi} = h_{\sigma(t)}(\xi, x_1), \quad (22a)$$

$$a\dot{\bar{z}}_{\rho-1} = A\bar{z}_{\rho-1} + B\vartheta, \quad (22b)$$

$$\dot{\vartheta} = \delta_{\sigma(t)}\hat{v} + a^{\rho-1} \lambda_\rho [\Delta_{\sigma(t)}(t, \xi, x) - y_r^{(\rho)}] + a^{\rho-1} \lambda_\rho g_{\sigma(t)}(x)\tilde{e}_{\sigma(t)}, \quad (22c)$$

其中:  $\bar{z}_{\rho-1}$ 是快变量,  $\vartheta$ 是慢变量.

### 3.2 稳定性分析

首先, 分析漏斗边界初值 $\psi(0)$ 和跟踪误差初值的绝对值 $|e(0)|$ 的差是严格正的等价于漏斗边界初值 $\psi(0)$ 和虚拟输出初值的绝对值 $|\vartheta(0)|$ 的差是严格正的.

由于本文考虑的漏斗是有限的, 即 $\varphi(0) > 0$ , 记 $\bar{\psi} = \sup_{t \in [0, \infty)} \psi(t)$ , 则满足 $\bar{\psi} > 0$ . 对切换系统(22b), 选择李雅普诺夫候选函数

$$V_{\bar{z}_{\rho-1}} = \bar{z}_{\rho-1}^T P \bar{z}_{\rho-1}, \quad (23)$$

其中 $P$ 为正定对称矩阵, 满足 $PA + A^T P = -Q, Q = Q^T > 0$ . 对式(23)沿着系统(22b)的解求导, 可得

$$a\dot{V}_{\bar{z}_{\rho-1}} = -\bar{z}_{\rho-1}^T Q \bar{z}_{\rho-1} + 2\bar{z}_{\rho-1}^T P B \vartheta \leq -\lambda_{\min}(Q) \|\bar{z}_{\rho-1}\|^2 + 2\|\bar{z}_{\rho-1}\| \|PB\| \|\vartheta\|.$$

则有

$$\forall \|\bar{z}_{\rho-1}\| \geq b|\vartheta|, \quad \dot{V}_{\bar{z}_{\rho-1}} \leq -\frac{b_0}{a} \|\bar{z}_{\rho-1}\|^2, \quad (24)$$

其中:  $b = \frac{2\|PB\|}{w\lambda_{\min}(Q)}$ ,  $b_0 = \lambda_{\min}(Q)(1 - w)$ ,  $0 < w < 1$ .

如果 $\vartheta$ 满足 $|\vartheta| \leq \bar{\psi}$ , 根据式(24), 可知当 $\|\bar{z}_{\rho-1}\| \geq b\bar{\psi}$ ,  $\dot{V}_{\bar{z}_{\rho-1}}$ 是负定的. 结合式(23), 可知存在正常数 $b_1, b_2$ , 使得集合 $\{\bar{z}_{\rho-1} \in \mathbb{R}^{\rho-1} | V_{\bar{z}_{\rho-1}}(\bar{z}_{\rho-1}) \leq b_1 \bar{\psi}^2\}$ 是系统(22b)的正不变集, 且在该集合里 $z_1$ 满足 $|z_1| \leq b_2 \bar{\psi}$ .

那么, 根据  $z_1 = x_1 - y_r$  和假设 1, 可得状态  $x_1$  满足

$$|x_1| \leq |z_1| + |y_r| \leq b_2 \bar{\psi} + \bar{y}_r, \quad (25)$$

其中  $\bar{y}_r$  是一个常数, 满足  $|y_r(t)| \leq \bar{y}_r, \forall t \geq 0$ .

此外, 根据引理 1, 在一类平均驻留时间  $\tau_a$  满足式 (4) 的切换信号作用下, 如果系统 (22a) 的初值满足  $\xi(0) \in \Omega_{\xi 0} = \{\xi(0) \in \mathbb{R}^{n-\rho} \mid \|\xi(0)\| \leq \bar{c}\}$ ,  $\bar{c}$  是一个正常数, 则结合式 (25), 可得对于所有  $t \geq 0$ , 有

$$\|\xi(t)\| \leq \underline{\alpha}^{-1}(\mu_0^{N_0} e^{(\lambda_s + \lambda_u)T_0} \bar{\alpha}(2\alpha_0(b_2 \bar{\psi} + \bar{y}_r)) + \underline{\alpha}(\mu_0 e^{(\lambda_s + \lambda_u)T_0} \bar{\alpha}(\bar{c}))), \quad (26)$$

取常数  $d_4$  满足  $d_4 \geq \underline{\alpha}(\mu_0 e^{(\lambda_s + \lambda_u)T_0} \bar{\alpha}(\bar{c})) + \underline{\alpha}^{-1}(\mu_0^{N_0} \times e^{(\lambda_s + \lambda_u)T_0} \bar{\alpha}(2\alpha_0(b_2 \bar{\psi} + \bar{y}_r)))$ , 可得对于所有的  $t \geq 0$ , 有  $\|\xi(t)\| \leq d_4$  成立.

基于上述分析, 定义两个紧集

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \{\xi \in \mathbb{R}^{n-\rho} \mid \|\xi\| \leq d_4\} \times \\ &\quad \{\bar{z}_{\rho-1} \in \mathbb{R}^{\rho-1} \mid V_{\bar{z}_{\rho-1}}(\bar{z}_{\rho-1}) \leq b_1 \bar{\psi}^2\} \times \\ &\quad \{\vartheta \in \mathbb{R} \mid |\vartheta| \leq \bar{\psi}\}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Xi_0 &= \Omega_{\xi 0} \times \{\bar{z}_{\rho-1} \in \mathbb{R}^{\rho-1} \mid V_{\bar{z}_{\rho-1}}(\bar{z}_{\rho-1}) \leq b_1 \psi_0^2\} \times \\ &\quad \{\vartheta \in \mathbb{R} \mid |\vartheta| \leq \psi_0\}, \end{aligned} \quad (28)$$

其中  $\psi_0$  是一个常数, 满足  $0 < \psi_0 < \psi(0)$ . 接下来, 针对切换系统 (22), 将会证明如果  $|\vartheta(0)| < \psi(0)$ , 则在一类切换信号具有平均驻留时间  $\tau_a$  满足式 (4) 下, 可得对于所有  $t \geq 0$ ,  $|\vartheta(t)| \leq \bar{\psi}$ . 借助于式 (24)–(27) 之间的分析, 可得对于所有  $t \geq 0$ , 有  $(\xi, \bar{z}_{\rho-1}, \vartheta) \in \Xi_1$  成立.

如果  $|\vartheta(0)| \leq \psi_0$ , 结合  $\psi_0 < \psi(0)$ , 可知  $\vartheta(0)$  和漏斗边界函数的初值有一个严格正的距离, 即存在一个正常数  $\varsigma$ , 使得

$$\psi(0) - |\vartheta(0)| > \varsigma. \quad (29)$$

根据式 (6) 中  $z_i$  的定义, 可知如果所有的初始状态  $x_i(0)$  是有界的, 则  $z_i(0) = O(a)$ ,  $i = 1, \dots, \rho$ . 结合式 (13) 中虚拟输出  $\vartheta$  的定义, 可得

$$\vartheta(0) - e(0) = \vartheta(0) - z_1(0) = O(a). \quad (30)$$

通过式 (29) 和 (30), 可得

$$\psi(0) - |e(0)| > \varsigma - O(a). \quad (31)$$

根据式 (31), 可知对于充分小的  $a$ , 存在一个正常数  $\tilde{\varsigma} < \varsigma$ , 使得

$$\psi(0) - |e(0)| > \tilde{\varsigma}. \quad (32)$$

式 (32) 表明跟踪误差初值的绝对值  $|e(0)|$  和漏斗边界函数的初值  $\psi(0)$  有严格正的距离. 因此, 结合式 (29)–(32) 之间的分析, 可知漏斗边界函数的初值  $\psi(0)$  和虚拟输出初值的绝对值  $|\vartheta(0)|$  的差是严格正的等价于漏斗边界函数的初值  $\psi(0)$  和跟踪误差初值的绝对值  $|e(0)|$  的差是严格正的.

主要结果如下:

**定理 1** 在假设 1–4 下, 考虑由切换系统 (22), 事件触发漏斗控制器 (16) 和切换的动态事件触发机制 (17)–(18) 组成的切换闭环系统, 如果选择正常数  $\lambda_2, \dots, \lambda_\rho$  使得矩阵  $A$  是赫尔维茨的, 预设的漏斗函数  $\varphi(t)$  满足  $\varphi(t) \in \Psi$ , 且系统初始条件满足  $(\xi(0), \bar{z}_{\rho-1}(0), \vartheta(0)) \in \Xi_0$ , 则在一类平均驻留时间  $\tau_a$  满足式 (4) 的切换信号作用下, 保证切换闭环系统具有如下的性质:

1) 对于所有  $t \geq 0$ , 切换闭环系统的所有信号都是有界的, 且存在正常数  $d_s$  使得

$$\psi(t) - |\vartheta(t)| \geq d_s. \quad (33)$$

因此, 可知  $\vartheta(t)$  一直在性能漏斗里演化, 并且辅助输入  $v(t)$  是有界的.

2) 存在  $\tilde{a}$  使得对于每个  $a \in (0, \tilde{a}]$ , 有

$$\psi(t) - |e(t)| \geq d_s^*, \quad (34)$$

其中  $d_s^*$  是一个正常数. 因此, 跟踪误差  $e(t)$  一直在预设的性能漏斗内演化.

3) 采样中的奇诺现象可以避免.

**证** 对应于上述的 3 个性质 1)–3), 定理 1 的证明也将分为下面的 I)–III) 3 个部分给出.

I) 由于  $(\xi(0), \bar{z}_{\rho-1}(0), \vartheta(0)) \in \Xi_0$  且  $\psi_0 < \psi(0)$ , 可知存在一个正常数  $\varsigma$ , 使得式 (29) 成立, 并且存在一个时间  $t_1^*$ , 使得

$$\psi(t) - |\vartheta(t)| \geq \frac{\varsigma}{2}, \quad \forall t \in [0, t_1^*]. \quad (35)$$

根据微分方程解的存在和唯一性定理<sup>[21]</sup>, 可知存在一个正常数  $\hat{s}_t \geq t_1^*$ , 使得在  $t \in [0, \hat{s}_t]$ , 切换闭环系统的解是存在的.

根据  $\varphi \in \Psi$  和式 (11), 可知  $\varphi$  和  $\dot{\varphi}$  是有界的, 并且  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) > 0$ . 又因考虑的漏斗是有限的, 即  $\varphi(0) > 0$ , 可得  $\frac{d}{dt} \psi(t)|_{[0, \infty)}$  是有界的. 因此, 可知漏斗的边界函数  $\psi(t)$  是全局李普希茨的, 并表示其李普希茨常数为  $L_0$ . 记  $\underline{\psi} := \inf_{t \in [0, \infty)} \psi(t)$ , 可有  $\underline{\psi} > 0$ . 定义

$$d_s := \min\left\{\frac{\underline{\psi}}{2}, \frac{\delta_m \underline{\psi}}{2(L_0 + A_0 + A_1)}, \frac{\varsigma}{2}\right\}, \quad (36)$$

其中  $\delta_m = \min_{k \in M} \{\delta_k\}$ ,  $A_0, A_1$  是正常数, 将在后面给出定义. 由此, 可知  $d_s$  是正常数. 结合式 (35)–(36), 可得

$$\psi(t) - |\vartheta(t)| \geq d_s, \quad \forall t \in [0, t_1^*]. \quad (37)$$

接下来, 将用反证法证明下面结果:

$$\psi(t) - |\vartheta(t)| \geq d_s, \quad \forall t \in [t_1^*, \hat{s}_t]. \quad (38)$$

首先, 根据式 (37), 可得  $\psi(t_1^*) - |\vartheta(t_1^*)| \geq d_s$ . 假设式 (38) 不成立, 结合  $\vartheta(t)$  的连续性, 可知存在一个时间

间隔 $[t_2^*, t_3^*]$ , 使得

$$\psi(t) - |\vartheta(t)| \geq d_s, \forall t \in [t_1^*, t_2^*], \quad (39)$$

$$\frac{d_s}{2} < \psi(t) - |\vartheta(t)| \leq d_s, \forall t \in [t_2^*, t_3^*]. \quad (40)$$

那么, 结合式(37)(39)–(40), 可得对于所有 $t \in [0, t_3^*]$ ,  $\vartheta(t)$ 满足

$$|\vartheta(t)| < \psi(t) - \frac{d_s}{2} \leq \bar{\psi} - \frac{d_s}{2}. \quad (41)$$

式(41)表明 $|\vartheta(t)| < \bar{\psi}$ , 结合式(23)–(28)之间的分析, 可得在一类平均驻留时间 $\tau_a$ 满足式(4)的切换信号作用下, 对于所有 $t \in [0, t_3^*]$ , 有 $(\xi, \bar{z}_{\rho-1}, \vartheta) \in \Xi_1$ 成立, 其中,  $\xi$ 和 $\bar{z}_{\rho-1}$ 的界不依赖 $a$ .

考虑一个正定函数 $V_\vartheta(\vartheta) = \frac{1}{2}\vartheta^2$ . 根据式(7)(15b)(22c), 可得 $V_\vartheta$ 的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_\vartheta(\vartheta) &= \vartheta \dot{\vartheta} = \\ &\vartheta[\delta_k \dot{v} + a^{\rho-1} \lambda_\rho [\Delta_k(t, \xi, C^{-1}(a)z + \tilde{y}_r) - y_r^{(\rho)}] + a^{\rho-1} \lambda_\rho g_k(x) \tilde{e}_k] \leq \\ &|\vartheta| [a^{\rho-1} \lambda_\rho [\Delta_k(t, \xi, C^{-1}(a)z + \tilde{y}_r) - y_r^{(\rho)}] - \delta_k \frac{|\vartheta|}{\psi(t) - |\vartheta|} + \\ &|a^{\rho-1} \lambda_\rho g_k(x) \tilde{e}_k|], \forall k \in M. \end{aligned} \quad (42)$$

联合假设1, 假设4和 $\forall t \in [0, t_3^*]$ ,  $(\xi, \bar{z}_{\rho-1}, \vartheta) \in \Xi_1$ , 可得 $a^{\rho-1} \lambda_\rho [\Delta_k(t, \xi, C^{-1}(a)z + \tilde{y}_r) - y_r^{(\rho)}]$ 在 $[0, t_3^*]$ 内是有界的, 即存在不依赖 $a$ 的正常数 $\Lambda_0$ , 使得

$$|a^{\rho-1} \lambda_\rho [\Delta_k(t, \xi, C^{-1}(a)z + \tilde{y}_r) - y_r^{(\rho)}]| \leq \Lambda_0, \quad (43)$$

其中 $a \in (0, a_1)$ ,  $a_1$ 是正常数. 另外, 根据切换的动态事件触发机制(18), 对任意 $k \in M$ , 有

$$|a^{\rho-1} \lambda_\rho g_k(x) \tilde{e}_k| \leq |a^{\rho-1} \lambda_\rho g_k(x) (\frac{\eta(t)}{\theta} + r_{1k})|. \quad (44)$$

根据式(7)和 $\forall t \in [0, t_3^*]$ ,  $(\xi, \bar{z}_{\rho-1}, \vartheta) \in \Xi_1$ , 可知 $a$ 是有界的. 由于函数 $g_k(x)$ 是连续的, 可得 $\forall t \in [0, t_3^*]$ ,  $g_k(x)$ 是有界函数. 又由于 $\eta(t)$ 是有界的, 则根据式(44), 可得对于 $\forall t \in [0, t_3^*]$ , 存在正常数 $\Lambda_1$ , 使得

$$|a^{\rho-1} \lambda_\rho g_k(x) \tilde{e}_k| \leq \Lambda_1, \forall k \in M. \quad (45)$$

此外, 由于假设式(38)不成立, 可知

$$\psi(t) - |\vartheta(t)| < d_s, t \in [t_1^*, \hat{s}_t]. \quad (46)$$

则有

$$|\vartheta(t)| > \psi(t) - d_s \geq \underline{\psi} - d_s, t \in [t_1^*, \hat{s}_t]. \quad (47)$$

根据式(36)中 $d_s$ 的定义, 可得 $d_s \leq \underline{\psi}/2$ . 因此, 可有

$$|\vartheta(t)| > \underline{\psi} - \frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2}. \quad (48)$$

结合式(46)(48), 可知

$$\delta_k \frac{|\vartheta|}{\psi(t) - |\vartheta|} > \delta_m \frac{\underline{\psi}}{2d_s}. \quad (49)$$

将式(43)(45)(49)带入式(42), 对 $\forall t \in [t_1^*, t_3^*]$ , 可有

$$\dot{V}_\vartheta(\vartheta) \leq |\vartheta|(A_0 + A_1 - \delta_m \frac{\underline{\psi}}{2d_s}). \quad (50)$$

根据式(36)中 $d_s$ 的定义, 有 $d_s \leq \frac{\delta_m \underline{\psi}}{2(L_0 + A_0 + A_1)}$ ,

则式(50)可以转化为

$$\dot{V}_\vartheta(\vartheta) \leq -L_0 |\vartheta|, \forall t \in [t_1^*, t_3^*]. \quad (51)$$

结合 $\dot{V}_\vartheta(\vartheta) = \vartheta \dot{\vartheta}$ , 对于 $t \in [t_2^*, t_3^*]$ , 通过对式(51)积分, 可得

$$|\vartheta(t_3^*)| - |\vartheta(t_2^*)| \leq -L_0(t_3^* - t_2^*). \quad (52)$$

鉴于 $L_0$ 是函数 $\psi(t)$ 的李普希茨常数, 可得 $|\psi(t_3^*) - \psi(t_2^*)| \leq L_0(t_3^* - t_2^*)$ . 则

$$\psi(t_2^*) - \psi(t_3^*) \leq L_0(t_3^* - t_2^*). \quad (53)$$

结合式(52)–(53), 可得

$$\psi(t_2^*) - |\vartheta(t_2^*)| \leq \psi(t_3^*) - |\vartheta(t_3^*)|. \quad (54)$$

然而, 根据式(39)–(40), 可有 $\psi(t_2^*) - |\vartheta(t_2^*)| = d_s$ 和 $\psi(t_3^*) - |\vartheta(t_3^*)| < d_s$ , 因此有

$$\psi(t_3^*) - |\vartheta(t_3^*)| < \psi(t_2^*) - |\vartheta(t_2^*)|. \quad (55)$$

明显可以看出式(54)和式(55)矛盾, 因此, 结合式(39), 容易推出式(38)成立.

联合式(37)–(38), 有

$$\psi(t) - |\vartheta(t)| \geq d_s, \forall t \in [0, \hat{s}_t]. \quad (56)$$

因此, 对于所有 $t \in [0, \hat{s}_t]$ , 可知 $\vartheta(t)$ 一直在预设漏斗内演化. 联合 $\bar{\psi}$ 的定义和式(56), 对 $\forall t \in [0, \hat{s}_t]$ , 有

$$|\vartheta(t)| \leq \psi(t) - d_s \leq \bar{\psi} - d_s. \quad (57)$$

因此,  $\vartheta(t)$ 是有界的. 那么, 结合式(23)–(28)之间的分析, 可得在一类平均驻留时间 $\tau_a$ 满足式(4)的切换信号作用下, 对于所有 $t \in [0, \hat{s}_t]$ , 有 $(\xi, \bar{z}_{\rho-1}, \vartheta) \in \Xi_1$ 成立, 即系统的轨迹都是有界的. 这个结果和解的最大延拓性矛盾, 因此可有 $\hat{s}_t = \infty$ . 那么, 可得

$$\psi(t) - |\vartheta(t)| \geq d_s, \forall t \geq 0. \quad (58)$$

式(58)说明 $\vartheta(t)$ 不会碰到漏斗边界. 利用式(15b)(57)–(58), 可得

$$|\hat{v}| \leq \frac{|\vartheta|}{\psi(t) - |\vartheta|} \leq \bar{v}, \quad (59)$$

其中 $\bar{v} = \frac{\bar{\psi} - d_s}{d_s}$ , 且 $\bar{v}$ 不依赖 $a$ . 根据 $d_s$ 和 $\bar{\psi}$ 的定义, 可知 $\bar{\psi} \geq \underline{\psi} \geq 2d_s$ , 因此, 常数 $\bar{v}$ 是正的. 结合上述分析和式(15a)(16), 容易得出 $\hat{u}_k$ 和事件触发漏斗控制器 $u_k$ 也是有界的.

II) 为了证明式(34), 进行如下坐标变换:

$$\tilde{z}_1 = z_1 - \vartheta, \quad (60a)$$

$$\tilde{z}_i = z_i, \quad i = 2, \dots, \rho - 1. \quad (60b)$$

那么, 由式(22), 可得

$$a\dot{\tilde{z}}_1 = \tilde{z}_2 - a[\delta_{\sigma(t)}\hat{v} + a^{\rho-1}\lambda_{\rho}(\Delta_{\sigma(t)}(t, \xi, x) - y_r^{(\rho)}) + a^{\rho-1}\lambda_{\rho}g_{\sigma(t)}(x)\tilde{e}_{\sigma(t)}], \quad (61a)$$

$$a\dot{\tilde{z}}_i = \tilde{z}_{i+1}, \quad i = 2, \dots, \rho - 2, \quad (61b)$$

$$a\dot{\tilde{z}}_{\rho-1} = -\frac{1}{\lambda_{\rho}}\tilde{z}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{\rho}}\tilde{z}_2 - \dots - \frac{\lambda_{\rho-1}}{\lambda_{\rho}}\tilde{z}_{\rho-1}, \quad (61c)$$

记  $\tilde{z} = [\tilde{z}_1 \ \dots \ \tilde{z}_{\rho-1}]^T$ , 式(61)可整理为

$$a\dot{\tilde{z}} = A\tilde{z} - aH[\delta_{\sigma(t)}\hat{v} + a^{\rho-1}\lambda_{\rho}(\Delta_{\sigma(t)}(t, \xi, x) - y_r^{(\rho)}) + a^{\rho-1}\lambda_{\rho}g_{\sigma(t)}(x)\tilde{e}_{\sigma(t)}], \quad (62)$$

其中  $H = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \in \mathbb{R}^{(\rho-1) \times 1}$ .

根据式(6b)(6c), 可知  $z_2(0) = O(a), \dots, z_{\rho}(0) = O(a^{\rho-1})$ . 结合式(13)中  $\vartheta$  的定义, 可得  $\vartheta(0) - z_1(0) = O(a)$ . 那么, 由式(60)和  $\tilde{z}$  的定义, 可得  $\tilde{z}(0) = O(a)$ . 联合式(43)–(45)之间的分析和式(59), 容易得出: 存在正常数  $\varpi$ , 使得对所有  $t \geq 0$ ,  $|\delta_k\hat{v} + a^{\rho-1}\lambda_{\rho}(\Delta_k(t, \xi, x) - y_r^{(\rho)}) + a^{\rho-1}\lambda_{\rho}g_k(x)\tilde{e}_k| \leq \varpi, \forall k \in M$ . 然后, 基于式(62),  $\tilde{z}(0) = O(a)$  和矩阵  $A$  是赫尔维茨的, 容易得出在任意切换信号下, 系统(62)的解也满足  $\tilde{z}(t) = O(a), \forall t \geq 0$ . 因此, 根据  $\tilde{z}(t)$  的定义和式(60a), 可得

$$|\vartheta(t) - e(t)| = |\vartheta(t) - z_1(t)| = |\tilde{z}_1(t)| \leq \varrho a, \quad \forall t \geq 0, \quad (63)$$

其中  $\varrho$  是正常数. 式(63)说明  $|e(t)| - |\vartheta(t)| \leq \varrho a$ . 联合式(58), 可知

$$|e(t)| \leq \psi(t) - d_s + \varrho a, \quad \forall t \geq 0. \quad (64)$$

那么, 对于  $a \in (0, \tilde{a}]$ ,  $\tilde{a} = \frac{d_s - d_s^*}{\varrho}$  和  $d_s^* < d_s$ , 式(64)可转化为

$$|e(t)| \leq \psi(t) - d_s^*, \quad \forall t \geq 0. \quad (65)$$

因此, 式(34)得证, 即跟踪误差  $e(t)$  一直在预设的性能漏斗内演化.

III) 为了证明采样中的奇诺现象可以避免, 划分如下3种情况讨论:

i) 考虑在连续的触发间隔  $[t_j^e, t_{j+1}^e)$ ,  $j \in \mathbb{N}$  之间没有切换发生, 即  $t_j^e < t_{j+1}^e < t_{j+2}^e$  或  $t_j^e < t_{j+1}^e < t_{s+1}^e$ . 则对于  $\forall t \in [t_j^e, t_{j+1}^e)$ , 有  $\sigma(t) = k_s$ . 根据式(16), 可得事件触发漏斗控制器为

$$u_{\sigma(t)}(t) = \hat{u}_{k_s}(t_j^e), \quad \forall t \in [t_j^e, t_{j+1}^e). \quad (66)$$

那么, 根据式(17), 对于  $t = t_{j+1}^e$ , 采样误差满足

$$|\tilde{e}_{\sigma(t)}(t^-)| = |\tilde{e}_{k_s}(t_{j+1}^{e-})| = |\hat{u}_{k_s}(t_j^e) - \hat{u}_{k_s}(t_{j+1}^e)| \leq$$

$$\int_{t_j^e}^{t_{j+1}^e} |\dot{\hat{u}}_{k_s}(\tau)| d\tau. \quad (67)$$

根据式(15), 可得  $\dot{\hat{u}}_{k_s}(t)$  为

$$\dot{\hat{u}}_{k_s}(t) = \frac{1}{a^{\rho}\lambda_{\rho}}(-\dot{z}_2 - \lambda_2\dot{z}_3 - \dots - \lambda_{\rho-1}\dot{z}_{\rho} + a\delta_{k_s}\hat{v}), \quad (68a)$$

$$\dot{\hat{v}} = \frac{\vartheta(\dot{\psi}(t) - d(|\vartheta|)/dt) - \dot{\vartheta}(\psi(t) - |\vartheta|)}{(\psi(t) - |\vartheta|)^2}. \quad (68b)$$

联合式(8b)(8c), 假设1和4及上述I)和II)中的证明过程, 容易得出  $\dot{z}_i, i = 2, \dots, \rho$  是有界的. 又因式(58), 可得  $(\psi(t) - |\vartheta(t)|)^2 \geq \min\{d_s^2, d_s\}$ . 此外, 结合式(22c)和上述I), II)的证明过程, 可知  $\dot{\vartheta}$  是有界的. 又因  $\frac{d(|\vartheta|)}{dt} \leq |\dot{\vartheta}|$ , 可得  $\frac{d(|\vartheta|)}{dt}$  是有界的. 根据  $\varphi(t) \in \Psi$ , 有  $\psi$  和  $\dot{\psi}$  是有界的. 结合上述分析和式(68b), 可有  $|\dot{\hat{v}}|$  是有界的. 因此, 可分析得出  $|\dot{\hat{u}}_k(t)|$  是有界的, 即存在正常数, 使得  $|\dot{\hat{u}}_k(t)| \leq \bar{\zeta}, \forall k \in M$ . 那么, 式(67)可转化为

$$|\tilde{e}_{k_s}(t_{j+1}^e)| \leq (t_{j+1}^e - t_j^e)\bar{\zeta}. \quad (69)$$

另外, 根据切换的动态事件触发机制(18), 对于  $t = t_{j+1}^e$ , 有

$$|\tilde{e}_{k_s}(t_{j+1}^e)| = \frac{\eta(t_{j+1}^e)}{\theta} + r_{1,k_s}. \quad (70)$$

联合式(69)–(70), 可得连续事件间的时间间隔满足

$$t_{j+1}^e - t_j^e \geq \frac{\eta(t_{j+1}^e)/\theta + r_{1,k_s}}{\bar{\zeta}} \geq \frac{r_1}{\bar{\zeta}}, \quad (71)$$

其中  $r_1 = \min_{k \in M}\{r_{1k}\}$ .

ii) 考虑在连续的触发间隔  $[t_j^e, t_{j+1}^e)$ ,  $j \in \mathbb{N}$  之间有超过  $N_0$  次的切换发生, 即  $t_j^e < t_{s+1}^e < t_{s+2}^e < \dots < t_{s+l}^e \leq t_{j+1}^e, l > N_0 + 1, l \in \mathbb{N}$ . 根据定义1, 可知  $N_{\sigma}(t_{j+1}^e, t_j^e) - N_0 \geq 1$ , 那么由式(3), 可得事件间的时间间隔满足  $t_{j+1}^e - t_j^e \geq (N_{\sigma}(t_{j+1}^e, t_j^e) - N_0)\tau_a \geq \tau_a$ .

iii) 考虑在连续的触发间隔  $[t_j^e, t_{j+1}^e)$ ,  $j \in \mathbb{N}$  之间有不少于一且不超过  $N_0$  次的切换发生, 即  $t_j^e < t_{s+1}^e < \dots < t_{s+l}^e \leq t_{j+1}^e, 1 \leq l \leq N_0 + 1, l \in \mathbb{N}$ . 不论在  $t_{j+1}^e$  之后是发生切换或者是触发, 结合式(71)和切换信号满足式(4)平均驻留时间  $\tau_a$  的条件, 容易可知触发时刻在时间间隔  $[t_j^e, t_{j+1}^e)$  上没有聚点.

那么, 结合上述i)–iii)的分析, 容易得出在切换闭环系统中, 触发时刻序列不会有聚点产生, 因此, 采样中不会出现奇诺现象. 证毕.

**注 4** 不同于现有的关于非线性切换系统的事件触发控制方法<sup>[15–16]</sup>, 它们仅为所有子系统设计了一个共同的控制策略, 本文为了降低共同控制器设计带来的保守性, 设计了各个

子系统的事件触发漏斗控制器(16)和切换的动态事件触发机制(18)–(19), 直接解决了异步切换问题. 另外, 不同于文献[15–19], 本文考虑的非线性切换系统(1)可以带有部分非ISS逆动态, 同时, 提出的方法可以保证跟踪误差一直在预设的性能漏斗内演化.

#### 4 仿真示例

为了验证本文提出的动态事件触发漏斗控制方法的实用性和有效性, 本节给出一个双倒立摆系统.

**例1** 考虑由弹簧连接的双倒立摆系统的切换控制, 如图2所示. 根据文献[22], 双倒立摆控制系统的动力学模型描述为

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad (72a)$$

$$\dot{\xi}_2 = \left( \frac{\tilde{m}_1 g \tilde{r}}{J_3} - \frac{h \tilde{r}^2}{4J_3} \right) \sin \xi_1 + \frac{h \tilde{r}}{2J_3} (l - \tilde{b}) + \frac{u_1}{J_3} + \frac{h \tilde{r}^2}{4J_3} \sin x_1, \quad (72b)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (72c)$$

$$\dot{x}_2 = \left( \frac{\tilde{m}_2 g \tilde{r}}{J_4} - \frac{h \tilde{r}^2}{4J_4} \right) \sin x_1 - \frac{h \tilde{r}}{2J_4} (l - \tilde{b}) + \frac{u_2}{J_4} + \frac{h \tilde{r}^2}{4J_4} \sin \xi_2, \quad (72d)$$

其中系统参数的物理意义可参见文献[22]. 根据文献[23], 假设两个预设的候选控制器

$$u_{1k} = J_3 h_{2k}(\xi, x) - \left( \frac{\tilde{m}_1 g \tilde{r}}{J_3} - \frac{h \tilde{r}^2}{4J_3} \right) \sin \xi_1 - \frac{h \tilde{r}}{2J_3} (l - \tilde{b}) - \frac{h \tilde{r}^2}{4J_3} \sin x_1, \quad k = 1, 2.$$

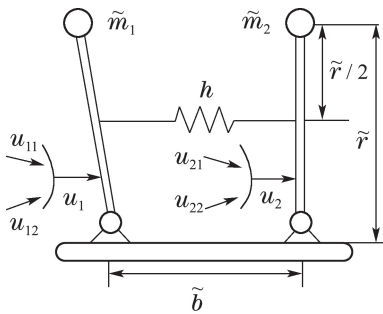


图2 弹簧连接的双倒立摆

Fig. 2 Two inverted pendulums connected by a spring

应用到系统(72), 则系统(72)可以重写为非线性切换系统的形式

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad (73a)$$

$$\dot{\xi}_2 = h_{2\sigma}(\xi, x), \quad (73b)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (73c)$$

$$\dot{x}_2 = g_{\sigma} u_{2\sigma} + \Delta_{\sigma}, \quad (73d)$$

其中:

$$h_{22} = x_1^2 \sin \xi_1 + \xi_2,$$

$$h_{21} = x_1^2 - 1088/325 \xi_1 - 51/13 \xi_2,$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \left( \frac{\tilde{m}_2 g \tilde{r}}{J_4} - \frac{h \tilde{r}^2}{4J_3} \right) \sin x_1 -$$

$$\frac{h \tilde{r}}{2J_4} (l - \tilde{b}) + \frac{h \tilde{r}^2}{4J_4} \sin \xi_2,$$

$$g_1 = g_2 = 1/J_4.$$

参考信号满足  $y_r = 1.3 \sin t$ . 考虑性能漏斗的倒数  $\psi(t)$  为

$$\psi(t) = (1.5\pi - 0.36)e^{-(t/0.8)} + 0.26. \quad (74)$$

容易验证假设1, 2和4是满足的. 针对切换系统(73a)(73b), 选择正定函数

$$W_1(\xi) = \frac{13}{25} \xi_1^2 + \frac{1}{2} (\xi_1 + \xi_2)^2,$$

$$W_2(\xi) = \frac{1}{2} \xi_1^2 + \frac{1}{2} (\xi_1 + \xi_2)^2,$$

可知当取

$$\mu_0 = 26/25, \quad \alpha_0(|x_1|) = \frac{1}{2\sqrt{2}} x_1^2, \quad \lambda_s = 1,$$

$\lambda_u = 14.526$ ,  $\underline{\alpha}(\|\xi\|) = 0.19\|\xi\|$ ,  $\bar{\alpha}(\|\xi\|) = 1.32\|\xi\|$ , 假设3是满足的. 取  $c_0 = 0.0633$ ,  $T_0 = 0.9$  s, 根据式(4), 可得平均驻留时间  $\tau_a$  满足  $\tau_a > 2.280$  s.

然后, 根据式(15), 为切换系统(73)设计子系统的漏斗控制器  $\hat{u}_k, \hat{v}$ , 其中,  $z_1 = x_1 - y_r$ ,  $z_2 = a(x_2 - y_r^{(1)})$ ,  $\vartheta = z_1 + \lambda_2 z_2$ . 则各子系统的事件触发漏斗控制器设计为式(16). 并且, 利用切换的动态事件触发机制(17), 在触发时刻更新控制器(16). 选择相关的设计参数为  $a = 0.03$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\theta = 1.2$ ,  $r_0 = 0.2$ ,  $r_{11} = 0.6$ ,  $r_{12} = 2$ ,  $\delta_1 = 1.2$ ,  $\delta_2 = 1$ .

考虑系统参数

$$\tilde{m}_1 = 2 \text{ kg}, \quad \tilde{m}_2 = 2 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2,$$

$$\tilde{r} = 0.5 \text{ m}, \quad J_3 = 0.5 \text{ kg}, \quad J_4 = 1.62 \text{ kg},$$

$$\tilde{b} = 0.4 \text{ m}, \quad l = 0.5 \text{ m}, \quad h = 100 \text{ m/s}$$

和系统初始条件  $\xi(0) = [0.1; 0.1]^T$ ,  $x = [0.1; 0.2]^T$ ,  $\eta(0) = 0.6$ , 仿真结果如图3–5所示. 切换信号和系统状态轨迹如图3所示. 从图3可以看出, 即使子系统和候选的控制器之间会发生异步切换, 系统状态仍然可以保证是有界的. 图4描述跟踪误差  $e$ , 虚拟输出  $\vartheta$  和漏斗边界  $\psi, -\psi$  的轨线. 从图4可以看出, 跟踪误差和虚拟输出一直保持在性能漏斗内演化. 因此, 本文提出的方法可以有效地保证跟踪误差的暂态性能. 图5描述事件触发时间间隔及  $|\tilde{e}_{\sigma(t)}(t)|$  和  $\frac{\eta(t)}{\theta} + r_{1\sigma(t)}$  的演化过程. 从图5可以看出, 提出的切换动态触发机制不会造成奇诺现象. 因此, 仿真结果验证了提出的动态事件触发漏斗跟踪控制方法的实用性和有效性.

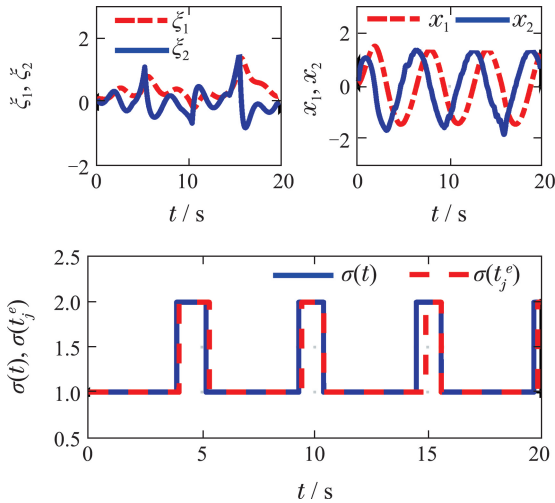


图 3 例 1 的系统状态  $\xi_1, \xi_2, x_1, x_2$  及子系统和实际控制器的切换信号  $\sigma(t), \sigma(t_j^e)$

Fig. 3 System states  $\xi_1, \xi_2, x_1, x_2$ , and switching signals of subsystem and actual controllers  $\sigma(t), \sigma(t_j^e)$  in Example 1

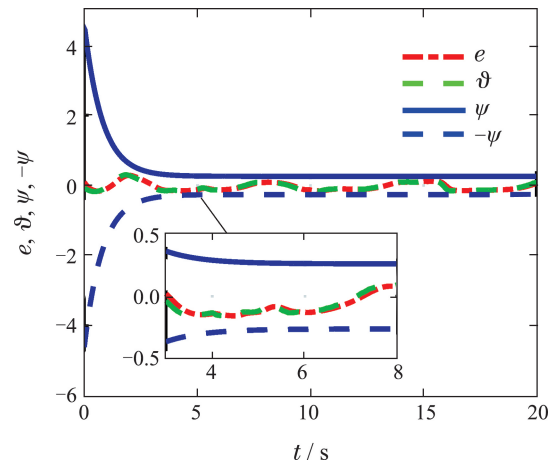


图 4 例 1 的跟踪误差  $e$ , 虚拟输出  $\vartheta$  及性能漏斗上界  $\psi$  和下界  $-\psi$

Fig. 4 Tracking error  $e$ , virtual output  $\vartheta$ , the upper bound  $\psi$  and lower bound  $-\psi$  of performance funnel in Example 1

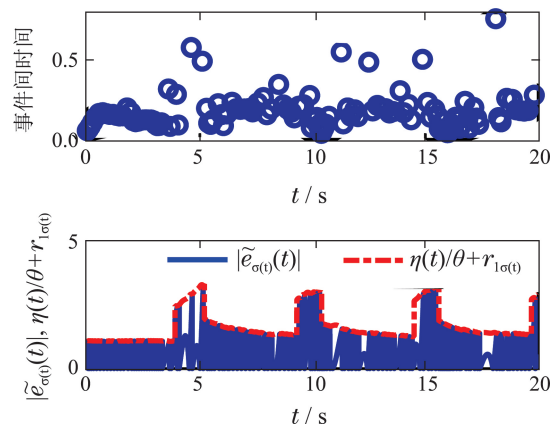


图 5 例 1 的事件间时间及  $|\tilde{e}_{\sigma(t)}(t)|$  和  $\frac{\eta(t)}{\theta} + r_{1\sigma(t)}$  的轨迹

Fig. 5 Inter-event times, trajectories of  $|\tilde{e}_{\sigma(t)}(t)|$  and  $\frac{\eta(t)}{\theta} + r_{1\sigma(t)}$  in Example 1

## 5 结论

本文解决了具有任意相对阶且带有部分非ISS逆动态的非线性切换系统的动态事件触发漏斗跟踪控制问题. 先通过引入一个虚拟输出, 将任意相对阶的切换系统转化为相对阶为一的系统. 再设计了各子系统的事件触发漏斗控制器和切换的动态事件触发机制, 在一类具有平均驻留时间的切换信号下, 保证了跟踪误差一直在预设的性能漏斗内演化, 且所有状态是有界的, 采样中的奇诺现象同时被避免. 最后, 仿真结果验证了该方法的实用性和有效性.

事实上, 当控制器和执行器之间的信息传输中存在网络时延时, 如何求解非线性切换系统的事件触发漏斗控制问题还有待解决.

## 参考文献:

- [1] ÅSTRÖM K J, BERNHARDSSON B. Comparison of periodic and event based sampling for first-order stochastic systems. *Proceedings of the 14th IFAC World Congress*. Beijing: Elsevier, 1999, 32(2): 5006 – 5011.
- [2] GIRARD A. Dynamic triggering mechanisms for event-triggered control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 60(7): 1992 – 1997.
- [3] XING L, WEN C, LIU Z, et al. Event-triggered adaptive control for a class of uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(4): 2071 – 2076.
- [4] LIBERZON D. *Switching in Systems and Control*. Boston: Birkhauser, 2003.
- [5] LONG L. Multiple Lyapunov functions-based small-gain theorems for switched interconnected nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8): 3943 – 3958.
- [6] LONG L, ZHAO J. Switched-observer-based adaptive neural control of MIMO switched nonlinear systems with unknown control gains. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 28(7): 1 – 14.
- [7] SUN Z, GE S S. *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*. London: Springer, 2011.
- [8] VU L, CHATTERJEE D, LIBERZON D. Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control. *Automatica*, 2007, 43(4): 639 – 646.
- [9] SHI Luhuan, ZHANG Tianping, XIA Xiaonan. Adaptive output feedback dynamic surface control for switched systems with prescribed performance. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(4): 818 – 828. (师路欢, 张天平, 夏晓南. 具有预设性能的切换系统输出反馈自适应动态面控制. *控制理论与应用*, 2020, 37(4): 818 – 828.)
- [10] ILCHMANN A, RYAN E P, SANGWIN C J. Tracking with prescribed transient behaviour. *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2002, 7(5): 471 – 493.
- [11] CHOWDHURY D, KHALIL H K. Funnel control for nonlinear systems with arbitrary relative degree using high-gain observers. *Automatica*, 2019, 105: 107 – 116.
- [12] FEI Z, GUAN C, ZHAO X. Event-triggered dynamic output feedback control for switched systems with frequent asynchronism. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 65(7): 3120 – 3127.
- [13] LI T, FU J, DENG F, et al. Stabilization of switched linear neutral systems: an event-triggered sampling control scheme. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(10): 3537 – 3544.

- [14] XIAO X, ZHOU L, DANIEL W C, et al. Event-triggered control of continuous-time switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(4): 1710 – 1717.
- [15] LI S, AHN C K, GUO J, et al. Neural-network approximation-based adaptive periodic event-triggered output-feedback control of switched nonlinear systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 51(8): 4011 – 4020.
- [16] SHU F, ZHAI J. Adaptive event-triggered control for switched p-normal nonlinear systems via output feedback. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, DOI: 10.1109/TCYB.2020.3035404.
- [17] WANG F, LONG L. Switched-observer-based event-triggered adaptive fuzzy funnel control for switched nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2021, DOI: 10.1109/TFUZZ.2021.3067063.
- [18] WANG F, LONG L. Dwell-time-based event-triggered adaptive control for switched strict-feedback nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(17): 7052 – 7073.
- [19] LIAN J, LI C. Event-triggered control for a class of switched uncertain nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 2020, 135: 104592.
- [20] MÜLLER M A, LIBERZON D. Input/output-to-state stability and state-norm estimators for switched nonlinear systems. *Automatica*, 2012, 48(9): 2029 – 2039.
- [21] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- [22] LONG L, BIAN Y. State constraints-based adaptive neural network control for switched nonlinear systems with unmodeled dynamics. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(18): 7835 – 7856.
- [23] SCHWARTZ C A, MABEN E. A minimum energy approach to switching control for mechanical systems. *Control Using Logic-Based Switching*. New York: Springer-Verlag, 1997.

#### 作者简介:

**龙离军** 教授, 博士, 博士生导师, 目前研究方向为切换系统与混杂控制(构造性控制设计)、安全控制、非线性控制理论与自适应控制等,  
E-mail: longlijun@ise.neu.edu.cn, long.lijun@126.com;

**王凤兰** 博士研究生, 目前研究方向为切换系统、事件触发控制,  
E-mail: wangfenglan.2018@163.com.