

# 拓扑切换下IT2 T-S模糊非线性多智能体系统全局逆最优控制

魏文军<sup>1,2†</sup>, 尉晶波<sup>1</sup>

(1. 兰州交通大学 自动化与电气工程学院, 甘肃 兰州 730070;

2. 兰州交通大学 光电技术与智能控制教育部重点实验室, 甘肃 兰州 730070)

**摘要:** 针对连续非线性多智能体系统的全局最优协同控制问题, 本文提出了模糊输出反馈和逆最优方法的分布式一致性最优控制律和相应的控制策略. 首先, 通过一种区间2型T-S模糊模型将非线性系统等价转化为线性系统. 其次, 基于逆最优方法设计了全局最优协同控制律和相应的模糊输出反馈控制策略, 智能体间仅仅通过局部通信, 即可实现拓扑切换下非线性多智能体系统的二次性能全局最优控制, 且系统的收敛速度大大提高. 基于局部稳定性理论给出了全局逆最优控制的充要条件. 最后, 通过MATLAB算例验证所提方法的正确性和可行性.

**关键词:** 非线性多智能体系统; IT2 T-S模糊; 全局逆最优; 协同控制; 拓扑切换

**引用格式:** 魏文军, 尉晶波. 拓扑切换下IT2 T-S模糊非线性多智能体系统全局逆最优控制. 控制理论与应用, 2022, 39(10): 1985 – 1994

DOI: 10.7641/CTA.2021.10775

## Global inverse optimal control for IT2 T-S fuzzy nonlinear multi-agent system under directed switching topologies

WEI Wen-jun<sup>1,2†</sup>, YU Jing-bo<sup>1</sup>

(1. School of Automation and Electrical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070, China;

2. Key Laboratory of Optoelectronic and Intelligent Control, Ministry of Education, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070, China)

**Abstract:** For the global optimal cooperative control problem of continuous nonlinear multi-agent system, this paper proposes a distributed consensus optimal control law with fuzzy output feedback and inverse optimal methods and corresponding control strategies. Firstly, the nonlinear system is equivalent to the linear system by an IT2 T-S fuzzy model. Secondly, the global optimal cooperative control law and the corresponding fuzzy output feedback control strategy are designed based on the inverse optimal method, only through local communication between agents, the quadratic performance global optimal control of nonlinear multi-agent system under switching topologies can be realized, and the convergence speed of the system is greatly improved. Based on the local stability theory, the necessary and sufficient conditions for inverse optimal control are proposed. Finally, the correctness and feasibility of the proposed method are verified by Matlab examples.

**Key words:** nonlinear multi-agent system; IT2 T-S fuzzy; global inverse optimal; cooperative control; switching topologies

**Citation:** WEI Wenjun, YU Jingbo. Global inverse optimal control for IT2 T-S fuzzy nonlinear multi-agent system under directed switching topologies. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(10): 1985 – 1994

## 1 引言

多智能体系统的一致性控制由于其广泛的应用, 如无人机编队控制<sup>[1–2]</sup>, 自主移动的智能体群<sup>[3]</sup>等, 引起了广泛的关注. 一般而言, 多智能体系统的一致性问题分为无领导者一致性<sup>[4]</sup>和有领导者跟随一致

性<sup>[5]</sup>. 无领导者一致性是为每个智能体设计一致性控制律, 通过智能体间的局部通信, 使智能体最终趋于一致. 有领导者跟随一致性是指一个智能体作为领导者, 其余智能体作为跟随者. 领导者作为指令发出者, 生成参考轨迹, 跟随者通过智能体间的局部通信跟踪

收稿日期: 2021–08–23; 录用日期: 2022–05–17.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: weiwenjun@mail.lzjtu.com; Tel.: +86 13893158343.

本文责任编辑: 徐金明.

国家重点研发计划(2017YFB1201003-20), 光电技术与智能控制教育部重点实验室(兰州交通大学)开放课题(KFKT2020-11)资助.

Supported by the National Key R&D Program of China (2017YFB1201003-20), the Opening Foundation of Key Laboratory of Opto-technology and the Intelligent Control (Lanzhou Jiaotong University) (KFKT2020-11).

到领导者信号,实现多智能体的跟踪一致性.

多智能体最优一致性控制是多智能体一致性控制的一个重要的分支,在实际工程应用中有着重要的意义.最优控制是指在满足系统稳定性条件下,使得系统的性能指标取得极值.文献[6–8]提出了一种通过求解线性二次调节器(linear quadratic regulator, LQR)问题的分布式最优控制设计方法,虽然解决了多智能体系统的最优控制问题,但系统达到稳态的时间长.针对具有输入约束的一般线性多智能体系统的最优一致性控制问题,文献[9]利用逆最优方法提出了基于滚动时域控制的一致性策略,设计了最优一致性协议.文献[10]利用逆最优方法研究了线性多智能体系统中各智能体状态可测的最优一致性控制问题.文献[11–12]提出了一种基于模糊自适应动态规划的最优控制算法,解决了多智能体系统的一致性最优控制问题.文献[13]提出了一种基于神经逆最优控制的控制律设计方法,解决了非线性离散多智能体系统的分散镇定控制问题.文献[14]为解决非线性离散多智能体系统的分布式逆最优控制问题,提出了一种基于非合作博弈的协同控制方法.而对于全局最优控制问题,通常需要智能体的全局信息,在实际应用中很难获得智能体的全局信息.在文献[15]中,为每个智能体设计了分布式近似最优控制器,解决了系统的分布式最优控制问题.文献[16]为解决异构非线性多智能体系统的最优控制问题,通过分布式观测器为每个智能体提供领导者信息,利用无模型近似动态规划算法提出了一种最优分布式控制协议.文献[17]考虑了指定性能和带有输入死区约束的严格反馈非线性系统,提出了自适应模糊最优控制算法,使系统的跟踪误差约束在指定范围内.文献[18]研究了一类不确定的严格反馈非线性系统的自适应模糊反优化控制问题,利用反步递归算法提出了自适应模糊逆向优化方案,保证系统从输入到状态的稳定性,并且在目标函数方面实现反优化.文献[19]研究了一般线性多智能体系统的逆最优控制问题,提出了基于静态输出反馈的最优协同控制协议.

在实际应用中,智能体控制性能的好坏对系统整体的运行有重要的意义,比如瞬态性能、稳态性能和最优性能,其中系统的瞬态性能依赖于系统特征值的位置.针对这一点,文献[20]引入两个关于闭环系统特征值的性能指标来评价一致性性能:收敛率和阻尼率.收敛率用于评价智能体的收敛速度,阻尼率用于评价智能体的振荡行为.然而,现有的基于LQR的一致性设计方法[6–8,21]在解决这类问题时存在重大缺陷,因为很难选择合适的权重矩阵,使得多智能体系统的特征值不能位于特定的区域,从而很难获得理想的一致性性能.

上述文献虽研究解决了多智能体系统的最优控制

问题,但这些文献解决智能体控制性能的同时没有考虑系统整体性能最优.主要存在以下问题:1)研究对象主要为线性或非线性离散多智能体系统,所提的研究方法无法满足一般连续非线性多智能体系统;2)仅仅考虑了系统的整体最优性能,单个智能体的控制效果一般且收敛时间长,无法满足对单个智能体性能要求高的系统.

基于上述讨论,本文针对一般连续非线性多智能体系统,研究拓扑切换下的全局最优协同控制问题.主要的创新点如下:1)提出了通过一种IT2 T-S模糊模型将连续非线性系统等价转化为线性系统;2)基于局部稳定性理论,给出了全局逆最优控制的充要条件和全局逆最优控制的设计过程;3)基于全局逆最优控制条件,设计了拓扑切换下全局最优控制律,使得多智能体系统实现期望性能下的全局最优控制,同时实现了单个智能体的期望性能,解决了现有文献中控制效果一般和系统达到一致时间长的问题.

## 2 图论

考虑具有 $N$ 个节点的非空有限集的加权有向图 $G=(V, E, A)$ ,其中 $V=(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N)$ ,边集 $E \subset V \times V$ ,相关的邻接矩阵 $A=[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ .始于根节点 $j$ 并终止于节点 $i$ 的边缘用 $(\nu_j, \nu_i)$ 表示,这意味着信息从节点 $j$ 流向节点 $i$ ,边 $(\nu_j, \nu_i)$ 的权重 $a_{ij}$ 为正.即若 $(\nu_j, \nu_i) \in E$ ,则 $a_{ij} > 0$ ,否则, $a_{ij} = 0$ .在本文中,假设没有重复的边和自闭环,即 $a_{ii} = 0, \forall i = \{1, 2, \dots, N\}$ .若 $(\nu_j, \nu_i) \in E$ ,则节点 $j$ 称为节点 $i$ 的邻接节点.节点 $i$ 的邻接节点集表示为 $N_i = \{j | (\nu_j, \nu_i) \in E\}$ .定义有向图的入度矩阵 $D = \text{diag}\{d_i\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,其中 $d_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$ ;定义拉普拉斯矩阵 $L = D - A$ .若图 $G$ 中两个节点可以通过一条路径连起来,则称图 $G$ 为连通图.若图 $G$ 中的每两个顶点都可以有一条有向路连接,则称图 $G$ 为强连通图.若图 $G$ 为强连通图,其含有一个零特征值.图 $G$ 含有一个有向生成树,则存在从节点 $i$ 到图中每个其他节点的有向路径.

## 3 非线性多智能体系统

本文考虑非线性多智能体系统由 $N$ 个非线性子系统组成.第 $i$ 个非线性子系统的动态方程为

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + f_i[x_i(t)], \quad (1)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$ 为非线性智能体的个数; $A_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为系统状态矩阵; $B_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为系统输入矩阵; $x_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 为第 $i$ 个子系统的状态列向量; $u_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 为第 $i$ 个子系统的控制输入向量; $f_i(\cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 非线性函数.

为了表示非线性系统的局部线性输入/输出关系,应用一种局部线性输入输出关系模型<sup>[4]</sup>—IT2 T-S模糊模型.非线性系统可根据IT2 T-S模糊模型转化为下

列局部线性子系统:

规则  $l$ : 若  $\theta_{1,i1}(x_i(t)) = \mu_{1,i1}^l, \theta_{1,i2}(x_i(t)) = \mu_{1,i2}^l, \dots, \theta_{1,ip_i}(x_i(t)) = \mu_{1,ip_i}^l$ , 则

$$\dot{x}_i(t) = A_{il}x_i(t) + B_{il}u_i(t) + E_{il}x_i(t) = \bar{A}_{il}x_i(t) + B_{il}u_i(t), \quad (2)$$

其中:  $E_{il} \in \mathbb{R}^{m \times m}, l = 1, 2, \dots, r$ ,  $r$  为模糊规则数.

$x_i = [x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{im}]^T; u_i = [u_{i1} \ u_{i2} \ \dots \ u_{in}]^T$ .

局部线性子系统式(2)的全局方程为

$$\dot{x}(t) = A_l x(t) + B_l u(t) + E_l x(t) = \bar{A}_l x(t) + B_l u(t). \quad (3)$$

利用单点模糊化, 乘积模糊推理和加权平均数模糊化, IT2 T-S 模糊系统将式(1)可写为式(4)

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_{1,i}(x_i)) [\bar{A}_{il}x_i(t) + B_{il}u_i(t)], \quad (4)$$

其中隶属度函数

$$h_{il}(\theta_{ip}(t)) = \frac{\prod_{p=1}^p \mu_{ip}^l(\theta_{ip}(t))}{\sum_{l=1}^r \prod_{p=1}^p \mu_{ip}^l(\theta_{ip}(t))}, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\sum_{l=1}^r h_l(\theta_{ip}(t)) = 1. \quad (6)$$

系统式(3)的全局动态方程为

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + Bu(t), \quad (7)$$

其中:  $\bar{A} = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) \bar{A}_l, B = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) B_l$ .

不失一般性, 推导本文结论前, 对 IT2 T-S 模糊化的多智能体系统做出以下假设:

**假设 1** ( $\bar{A}_{il}, B_{il}$ ) 是可控制的.

**假设 2** 图  $G$  含有一个有向生成树.

分别对有领导者和无领导者情况下当智能体能够获取邻接智能体的状态信息, 基于 LQR 方法<sup>[21]</sup>设计的全局状态反馈控制器

$$u = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) K_l x. \quad (8)$$

使得多智能体系统的全局目标函数(9)最小.

$$J = \int_0^{+\infty} \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) [x^T(t) Q_l x(t) + u^T(t) R_l u(t)] dt, \quad (9)$$

其中:  $K_l$  为局部线性子系统全局反馈增益;  $Q_l, R_l$  为已知的对称非负定矩阵; 反馈增益矩阵

$$K_l = R_l^{-1} \bar{B}_l^T P_l,$$

其中  $P_l$  为 Riccati 方程式(10)的唯一正定对称解.

$$\bar{A}_l^T P_l + P_l \bar{A}_l - P_l B_l R_l^{-1} \bar{B}_l^T P_l + Q_l = 0, \quad (10)$$

式(10)可等价于

$$\bar{A}_l^T P_l + P_l \bar{A}_l - K_l^T R_l K_l + Q_l = 0, \quad (11)$$

$$B_l^T P_l = R_l K_l. \quad (12)$$

**引理 1**<sup>[5]</sup> (局部稳定性) 给定仿射映射  $S$ , 其包含一个  $D \supset S$ , 若存在一个二次函数  $V(x): D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V(x) = x^T \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) P_l x \geq 0$ , 满足

$$S = \ker P_l,$$

$$V(x) = x^T \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) P_l x \geq 0,$$

$$\dot{V}(x) = x^T \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) P_l x \leq 0,$$

$$\{x \in D | \dot{V}(x) = 0\} = S,$$

则  $S$  为李雅普诺夫渐进稳定的.

**引理 2**<sup>[10]</sup> 若矩阵  $K_l B_l$  为半正定满秩矩阵且  $\text{rank}(K_l B_l) = \text{rank}(K_l)$ , 则存在矩阵  $R_l = R_l^T > 0$  和  $P_l = P_l^T > 0$  满足  $K_l = R_l^{-1} B_l^T P_l$ .

由引理 2 可推出下列命题.

**命题 1** 若以下条件成立

1) 若  $K_l B_l$  为半正定矩阵且  $\text{rank}(K_l B_l) = \text{rank}(K_l)$ , 存在矩阵  $R_l = R_l^T > 0$  和  $P_l = P_l^T > 0$  满足  $K = R^{-1} B^T P$ ;

2)  $K_l$  是稳定的到  $P_l$  的零空间; 对于逆最优控制问题,  $K_l$  是最优的和  $P_l$  为 Riccati 方程的半正定解.

**证** 由式(11)可得

$$Q_l = -\bar{A}_l^T P_l - P_l \bar{A}_l + K_l^T R_l K_l. \quad (13)$$

考虑以下性能指标:

$$\begin{aligned} J(x_0) &= \int_0^{+\infty} \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) [x^T Q_l x + u^T R_l u] dt = \\ &= \int_0^{+\infty} [x^T \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) Q_l x + \\ &+ u^T \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) R_l u] dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) [x^T Q_l x + \\ &+ u^T K_l^T R_l K_l u] dt = \\ &= \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) [x^T(0) P_l x(0) - \\ &+ x^T(\infty) P_l x(\infty)] + \int_0^{+\infty} x^T \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) \cdot \\ &\cdot [K_l - R_l^{-1} B_l^T P_l]^T R [K_l - R_l^{-1} B_l^T P_l] x dt. \quad (14) \end{aligned}$$

由于  $K_l$  是稳定的在  $P_l$  的零空间,  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_l x(t) = 0$ .

当  $K_l = R_l^{-1} B_l^T P_l$  时, 性能指标  $J(x_0)$  达到最小值. 因此, 全局  $u = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) K_l x$  是最优的. 证毕.

**命题2** 对于逆最优控制问题,  $K_l$  是最优的; 当  $Q_l \geq 0$  和  $R_l \geq 0$  时,  $P_l$  为 Riccati 方程的唯一半正定解, 当条件成立

- 1)  $K_l/2$  是稳定的在  $P_l$  的零空间;
- 2)  $K_l B_l$  为半正定矩阵.

**证** 由命题1可知, 对于系统, 存在矩阵  $P_l = P_l^T > 0$ ,  $R_l = R_l^T > 0$  和  $Q_l = Q_l^T > 0$  满足

$$0 = (\bar{A}_l - \frac{1}{2} B_l K_l)^T P_l + P_l (\bar{A}_l - \frac{1}{2} B_l K_l) + \bar{Q}_l + (\frac{1}{2} K_l)^T (2 R_l) (\frac{1}{2} K_l), \quad (15)$$

$$B_l^T P_l = R_l K_l. \quad (16)$$

状态反馈控制器  $u = u = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) K_l x/2$  使得系统的全局性能指标  $J = \int_0^{+\infty} \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) [x^T(t) \cdot Q_l x(t) + 2u^T(t) R_l u(t)] dt$  达到最小. 证毕.

由上述证明可知, 对任意  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  且  $x_0 \neq 0$  时, 系统性能指标的最优值为

$$J^*(x_0) = x_0^T \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) P_l x_0 = \int_0^{+\infty} \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) x^T \cdot (\bar{Q}_l + \frac{1}{2} K_l^T R_l K_l) x dt, \quad (17)$$

因为  $P_l \geq 0$ , 则上式中的  $\bar{Q}_l + \frac{1}{2} K_l^T R_l K_l \geq 0$ .

令  $Q_l = \bar{Q}_l + \frac{1}{2} K_l^T R_l K_l$ , 在式(14)两边减去  $K_l^T R_l K_l$  得

$$(\bar{A}_l - B_l K_l)^T P_l + P_l (\bar{A}_l - B_l K_l) = -Q_l - K_l^T R_l K_l \leq 0. \quad (18)$$

根据引理1,  $K_l$  是稳定的在  $P_l$  的零空间和  $K_l B_l$  为半正定阵, 由式(18)和命题1,  $K_l$  是最优的对于反馈控制律  $u = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) K_l x$ , 意味着  $K_l$  是线性二次最优的对于  $R_l = R_l^T > 0$  和  $Q_l = Q_l^T > 0$ .

**命题3** 对于逆最优控制问题, 若  $R_l = R_l^T > 0$  和  $Q_l = Q_l^T > 0$ ,  $K_l$  是最优的和相应的黎卡提方程具有对称正定解  $P_l$ . 当且仅当系统满足下列条件:

- 1) 矩阵  $\bar{A}_l - B_l K_l$  为 Hurwitz;
- 2)  $K_l B_l$  为半正定矩阵.

#### 4 多智能体系统全局逆最优控制律设计

不失一般性, 设计全局逆最优控制律前, 假设模糊

化的系统矩阵  $\bar{A}_l$  和  $B_l$  可写为以下形式:

$$\bar{A}_l = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B_l = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix},$$

其中:  $A_{11} \in \mathbb{R}^{(m-n) \times (m-n)}$ ,  $A_{12} \in \mathbb{R}^{(m-n) \times n}$ ,  $A_{21} \in \mathbb{R}^{n \times (m-n)}$ ,  $A_{22}, B_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 矩阵对  $(A_{11}, A_{12})$  是可控的.

本文假设智能体  $i$  能够获取邻接智能体的状态信息, 在此前提条件下研究有向拓扑切换下有领导者和无领导者的非线性多智能体系统全局逆最优协同控制问题.

#### 4.1 有领导者多智能体系统全局最优控制

假设领导者和跟随着为同构智能体. 领导者系统的动态方程如下:

$$\dot{v}_0(t) = \bar{A}_m v_0(t), \quad (19)$$

其中:  $v_0$  为领导者系统的状态向量,  $\bar{A}_m$  为领导者系统的状态矩阵.

设计局部子系统  $i$  的控制律  $u_i = c K_{il} \varepsilon_i$ , 使得多智能体系统的所有节点都能同步于领导者节点, 同时使得系统的二次型性能指标值达到最小.

定义线性子系统  $i$  邻接误差方程为

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\sigma(t)} (x_j - x_i) + h_{i0}^{\sigma(t)} (v_0 - x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\sigma(t)} (\delta_j - \delta_i) - h_{i0}^{\sigma(t)} \delta_i, \quad (20)$$

系统的全局邻接误差方程为

$$\varepsilon = (L + H)^{\sigma(t)} \otimes I_n \delta, \quad (21)$$

其中:  $\delta_i = x_i - v_0$ ,  $\varepsilon = [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n]^T$ ,  $\delta = [\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n]^T$ ,  $I_n$  为  $n \times n$  单位矩阵,  $a_{ij}^{\sigma(t)}$  为  $t$  时刻多智能体  $i$  与  $j$  间的权重系数;  $h_{i0}^{\sigma(t)}$  为  $t$  时刻智能体  $i$  与领导者间的权重系数, 当  $h_{i0}^{\sigma(t)} = 0$  时, 表示系统为无领导者系统, 否则, 系统为有领导者系统; 增益参数  $c > 0$ ;  $N$  为智能体的个数;  $K_i$  为智能体  $i$  对应的反馈控制增益矩阵.  $H^{\sigma(t)} = \text{diag}\{h_{10}^{\sigma(t)}, h_{20}^{\sigma(t)}, \cdots, h_{n0}^{\sigma(t)}\}$ .

模糊化的多智能体系统的全局闭环方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) [\bar{A}_l x(t) + B_l u(t)] = \\ &= \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) [(I_n \otimes \bar{A}_l) x(t) - \\ &= c(L + H)^{\sigma(t)} \otimes (B_l K_l) \varepsilon(t)] = \\ &= (I_n \otimes \bar{A}) x(t) - c(L + H)^{\sigma(t)} \otimes (BK) \varepsilon(t). \end{aligned} \quad (22)$$

多智能体系统的全局闭环误差方程为

$$\dot{\delta}(t) = [(I_n \otimes \bar{A}) - c(L + H)^{\sigma(t)} \otimes (BK)] \delta(t). \quad (23)$$

**引理3**<sup>[10]</sup> 设  $\lambda_i$  为矩阵  $(L + H)^{\sigma(t)}$  的特征值.

若全局闭环跟踪误差系统实现渐近稳定, 当且仅当矩阵  $\bar{A}_l - c\lambda_i B_l K_l$  为 Hurwitz.

**定理 1** 对于全局跟踪误差系统, 设计分布式控制律式, 当且仅当矩阵  $(L + H)^{\sigma(t)}$  为正定矩阵, 系统的全局二次性能指标达到最优.

$$J = \int_0^{+\infty} \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) [\delta^T(t) \tilde{Q}_l \delta(t) + u^T(t) \tilde{R}_l u(t)] dt, \quad (24)$$

其中:  $\tilde{Q}_l = \tilde{Q}_l^T > 0$  和  $\tilde{R}_l = \tilde{R}_l^T > 0$ .

**证(必要性)** 由命题 3 可知, 若分布式控制律  $u = -c(L + H)^{\sigma(t)} \otimes K_l \varepsilon$  为最优, 矩阵  $[(L + H)^{\sigma(t)} \otimes K_l] (I_n \otimes B)$  为正定矩阵. 存在一个非奇异矩阵  $T_1$  满足

$$(L + H)^{\sigma(t)} \otimes (K_l B_l) = T_1^{-1} \Lambda_1 T_1, \quad (25)$$

其中  $\Lambda_1$  为矩阵  $(L + H)^{\sigma(t)} \otimes (K_l B_l)$  的特征值对角阵.

矩阵  $(L + H)^{\sigma(t)}$  和  $K_l B_l$  的约旦标准型分别为

$$(L + H)^{\sigma(t)} = Z_1^{-1} J_1^{\sigma(t)} Z_1, \quad (26)$$

$$K_l B_l = Z_2^{-1} J_2 Z_2, \quad (27)$$

其中:  $J_1^{\sigma(t)}, J_2$  分别为  $(L + H)^{\sigma(t)}$  和  $K_l B_l$  的约旦标准型;  $Z_1, Z_2$  为非奇异矩阵.

将式(25)–(26)代入式(28)中, 可得

$$(Z_1 \otimes Z_2)^{-1} (J_1^{\sigma(t)} \otimes J_2) (Z_1 \otimes Z_2) = T_1^{-1} \Lambda_1 T_1. \quad (28)$$

由于系统的通信拓扑图  $G$  包含一个生成树, 其中至少有一个非零增益连接到根节点. 因此拓扑图  $G$  所对应的矩阵  $(L + H)^{\sigma(t)}$  的全部特征值均有正实部. 假设  $(L + H)^{\sigma(t)}$  有共轭复根  $\alpha \pm j\beta$ , 其中  $\alpha > 0, \beta \neq 0 \in \mathbb{R}$ . 假设  $\mu$  为矩阵  $K_l B_l$  的一个非零特征值, 则  $\mu(\alpha \pm j\beta)$  为  $\Lambda_1$  的特征值. 可得  $\mu(\alpha \pm j\beta) > 0$ . 当  $\mu > 0$  和  $\beta = 0$  时, 矩阵  $(L + H)^{\sigma(t)}$  为正定的.

(充分性) 设  $K_l = [K_1 K_2] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , 矩阵

$$(L + H)^{\sigma(t)} \otimes (K_l B_l)$$

为正定矩阵. 由于  $(L + H)^{\sigma(t)}$  为正定矩阵, 则存在一个正定矩阵  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  满足  $(L + H)^{\sigma(t)} \otimes F$  为正定矩阵. 令  $K_2 = FB_1^{-1}$ , 矩阵  $K_l = [K_1 FB_1^{-1}]$  满足  $(L + H)^{\sigma(t)} \otimes (K_l B_l)$  为正定矩阵.

令  $T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ S & I \end{bmatrix}$ , 则

$$\bar{A}_l - c\lambda_i B_l K_l = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} - c\lambda_i B_1 K_1 & A_{22} - c\lambda_i B_1 K_2 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$T_2(\bar{A}_l - c\lambda_i B_l K_l)T_2^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}S & A_{12} \\ \Sigma & SA_{12} + A_{22} - c\lambda_i B_1 K_2 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

其中  $\Sigma = SA_{11} + A_{21} - c\lambda_i B_1 K_1 - (SA_{12} + A_{22} - c\lambda_i B_1 K_2)S$ .

令  $\Sigma = 0$ , 则矩阵  $\bar{A}_l - c\lambda_i B_l K_l$  的特征值转换为矩阵  $A_{11} - A_{12}S \in \mathbb{R}^{(m-n) \times (m-n)}$  的特征值和  $SA_{12} - c\lambda_i B_1 K_2 + A_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的特征值. 设矩阵  $A_3$  和  $A_4$  分别为  $A_{22} - c\lambda_i B_1 K_2$  和  $A_{11} - A_{12}S$  的特征值矩阵, 存在矩阵  $T_3$  和  $T_4$  满足

$$T_3^{-1}(SA_{12} + A_{22} - c\lambda_i B_1 FB_1^{-1})T_3 = A_3, \quad (31)$$

$$T_4^{-1}(A_{11} - A_{12}S)T_4 = A_4. \quad (32)$$

矩阵  $S$  可通过使矩阵  $A_{11} - A_{12}S$  的特征值全部位于左半复平面,  $(A_{11}, A_{12})$  可控的. 当  $F > 0$  和  $\lambda_i > 0$ , 矩阵  $c\lambda_i B_1 FB_1^{-1}$  为正定的, 意味着对于给定的正数  $c_{\min}$ , 存在一个矩阵  $F$  满足: 对于给定的矩阵  $S$ , 当  $c > c_{\min}$  时, 矩阵  $SA_{12} + A_{22} - c\lambda_i B_1 K_2$  的  $m$  个特征值全部位于左半复平面. 根据上述条件, 设  $c_{\min} = 1/\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\lambda}$  为所有矩阵  $(L + H)^{\sigma(t)}$  最小特征值. 矩阵  $S$  根据  $SA_{12} + A_{22} - c_{\min} \bar{\lambda} B_1 K_2$  的特征值全部位于左半复平面求解得出.  $K_1$  可通过  $\Sigma = 0$  求解得出. 由上述可知, 矩阵  $\bar{A}_l - c_{\min} \bar{\lambda} B_l K_l$  为 Hurwitz.

存在实数  $c$  和矩阵  $F$  满足  $\bar{A}_l - c\lambda_i B_l K_l$  为 Hurwitz. 根据命题 1, 存在矩阵  $R_l = R_l^T > 0$  和  $P_l = P_l^T > 0$  满足  $B_l^T P_l = P_l K_l$ . 由于矩阵  $\bar{A}_l - B_l K_l$  为 Hurwitz, 推导可得  $(\bar{A}_l - B_l K_l)^T P_l + P_l (\bar{A}_l - B_l K_l) < 0$ . 接下来证明多智能体系统的局部稳定性. 构造李雅普诺夫函数  $V(x) = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) x^T P_l x$  并求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) [\dot{x}^T P_l x + x^T P_l \dot{x}] = \\ &\sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) \{x^T [(\bar{A}_l - c\lambda_i B_l K_l)^T P_l + \\ &P_l (\bar{A}_l - c\lambda_i B_l K_l)] x\} = \\ &\sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) \{x^T [(\bar{A}_l - B_l K_l)^T P_l + \\ &P_l (\bar{A}_l - B_l K_l)] x + \\ &2(1 - c\lambda_i) x^T K_l^T R_l K_l x\}. \end{aligned} \quad (33)$$

当  $c\lambda_i > 1$ , 推导可知  $\dot{V}(x) < 0$ , 因此  $\bar{A}_l - c\lambda_i B_l K_l$  为 Hurwitz. 根据引理 2, 选择  $S, F$  和  $c > c_{\min}$ , 使得系统为渐进稳定的. 根据命题 3 可知,  $c(L + H)^{\sigma(t)} K_l$  为最优反馈控制增益.

根据命题 3, 对于多智能体系统, 若  $I_n \otimes \bar{A}_l - c[(L + H)^{\sigma(t)} \otimes (B_l K_l)]/2$  为 Hurwitz, 则反馈增益矩阵  $c(L + H)^{\sigma(t)} K_l$  是最优的当任意  $\bar{Q}_l = \bar{Q}_l^T > 0$ . 若令  $c \geq 2c_{\min}$ , 上述条件成立.

设  $c_{\min} = 1/\bar{\lambda}$ , 通过选择矩阵  $F$  使得  $SA_{12} + A_{22} - B_1 FB_1^{-1}$  为 Hurwitz. 令  $F = \gamma I_n$ , 其中  $\gamma > 0$ . 求解可得  $SA_{12} + A_{22} - B_1 FB_1^{-1}$  的特征值为  $\underline{\lambda} - \gamma$ , 其中  $\underline{\lambda}$  为

$SA_{12} + A_{22}$ 的特征值. 因此, 选择 $\gamma$ 使得特征值 $\lambda - \gamma$ 位于复平面的左半平面. 矩阵 $K_l$ 中的 $K_1$ 和 $K_2$ 可通过 $K_2 = \gamma B_l^{-1}$ 和 $\Sigma = 0$ 求解, 可得 $K_1 = B_l^{-1}[SA_{11} + A_{21} + \gamma S - (SA_{12} + A_{22})S]$ . 系统的逆最优分布式控制增益矩阵 $K_l$ 为

$$K_l = B_l^{-1}[SA_{11} + A_{21} - (SA_{12} + A_{22})S + \gamma S \gamma I_n]. \quad (34)$$

**注1** 在定理1的充分必要性证明中, 若 $\bar{A}_l - B_l K_l$ 为Hurwitz(即每个智能体渐近稳定)和 $K_l B_l$ 为正定矩阵, 则反馈增益 $K_l$ 为最优控制增益. 根据命题3可知, 基于LQR方法的增益矩阵可由式(35)求得. 令矩阵 $Q_l = Q_l^T > 0$ 和 $R_l = R_l^T > 0$ , 控制律中的反馈增益矩阵为

$$K_l = R_l^{-1} B_l^T P_l, \quad (35)$$

其中 $P_l$ 为Riccati方程(36)的唯一正定对称解.

$$\bar{A}_l^T P_l + P_l \bar{A}_l - P_l B_l R_l^{-1} B_l^T P_l + Q_l = 0. \quad (36)$$

证毕.

## 4.2 无领导者多智能体系统全局最优控制

对于无领导者多智能体系统的一致性问题的, 当时间 $t \rightarrow \infty$ , 智能体的状态能够达到同一状态. 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}^+. \quad (37)$$

通过设计分布式一致性控制律 $u_i$ , 使得系统的每个智能体达到同一状态, 并使系统的性能指标达到最小. 设计的无领导者局部线性子系统的全局分布式一致性控制律

$$u = c K_l \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\sigma(t)} (x_j - x_i), \quad (38)$$

其中:  $c > 0$ , 反馈增益矩阵 $K_l \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . 线性化的多智能体的闭环系统方程可写为

$$\dot{x}_i = \sum_{l=1}^r h_{il}(\theta_{1,i}(x_i)) [\bar{A}_{il} x_i + c B_{il} K_{il} \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\sigma(t)} (x_j - x_i)]. \quad (39)$$

全局闭环系统可写为

$$\dot{x} = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) [I_m \otimes \bar{A}_l - c L^{\sigma(t)} \otimes (B_l K_l)] x = [I_m \otimes \bar{A} - c L^{\sigma(t)} \otimes (BK)] x. \quad (40)$$

假设系统的通信拓扑为强连通的, 拓扑图对应的Laplace矩阵 $L^{\sigma(t)}$ 的特征值 $\lambda_1 = 0$ , 其余的特征值均为有正实部的非零特征值.

**定理2** 对于全局闭环系统(40), 在分布式一致性控制律 $u$ 作用下, 系统的全局二次性能指标式(41)是最优的.

$$J = \int_0^{+\infty} \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) [x^T Q_l x + u^T R_l u] dt, \quad (41)$$

其中:  $Q_l = Q_l^T \geq 0$ ,  $R_l = R_l^T \geq 0$ .

此外, 由于全局逆最优分布式一致性控制律式(38)稳定在零空间 $I_m \otimes L^{\sigma(t)}$ , 系统的通信拓扑为强连通拓扑, 因此在最优控制律作用下, 智能体系统能够实现一致性.

**证** 对于Laplace矩阵 $L^{\sigma(t)}$ , 存在一个非奇异矩阵 $T_5$ 满足 $T_5 L^{\sigma(t)} T_5^{-1} = J_3^{\sigma(t)}$ . 其中 $J_3^{\sigma(t)}$ 为矩阵 $L^{\sigma(t)}$ 的特征值对角阵. 存在反馈增益矩阵 $K_l$ 使得 $L^{\sigma(t)} \otimes (B_l K_l)$ 为正定阵. 由于 $K_l B_l$ 为正定的, 根据命题1可知, 存在正定对称阵 $R_l$ 和 $P_l$ 满足

$$K_l = R_l^T B_l^T P_l. \quad (42)$$

于是 $c L^{\sigma(t)} \otimes K_l$ 可写为

$$\begin{aligned} c L^{\sigma(t)} \otimes K_l &= c L^{\sigma(t)} \otimes (R_l^T B_l^T P_l) = \\ (I_n \otimes R_l^{-1})(I_n \otimes B_l)^T (c L^{\sigma(t)} \otimes P_l) &= \\ (R_l \otimes R_l)^{-1} (I_n \otimes B_l)^T [c (R_l L^{\sigma(t)} \otimes P_l)]. \end{aligned} \quad (43)$$

由式(40)得,  $\text{rank}(c L^{\sigma(t)} \otimes K_l) = \text{rank}(c L^{\sigma(t)} \otimes P_l) = (N-1)m$ . 其中 $R_l = T_5^T T_5$ .

下面证明 $c L^{\sigma(t)} \otimes K_l$ 能够渐近稳定到 $L^{\sigma(t)} \otimes I_n$ 的零空间.

令 $c \geq c_{\min} = 1/\bar{\lambda}$ , 分布式最优控制增益 $K_l$ , 其中 $\bar{\lambda}$ 为 $L^{\sigma(t)}$ 的最小正特征值, 选择 $S$ 和 $\gamma$ 使得 $\bar{A}_l - B_l K_l$ 为Hurwitz. 根据定理1的证明可知, 当 $\forall c \geq c_{\min}$ ,  $\bar{A}_l - c \lambda_i B_l K_l$ 为Hurwitz,  $(\bar{A}_l - c \lambda_i B_l K_l)^T P_l + P_l (\bar{A}_l - c \lambda_i B_l K_l) < 0$ .

令 $\bar{P}_l = c (R_l L^{\sigma(t)} \otimes P_l) = c (T_5^T J_3^{\sigma(t)} T_5) \otimes P_l$ , 则 $\ker(\bar{P}_l) = \ker(L^{\sigma(t)} \otimes I_m)$ . 构造 $V(x) = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) x^T \bar{P}_l x$ , 则

$$V(x) = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) c x^T (T_5^T J_3^{\sigma(t)} T) \otimes P_l x. \quad (44)$$

$$\dot{V}(x) =$$

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) x^T \bar{P}_l [I_n \otimes \bar{A}_l - c L^{\sigma(t)} \otimes (B_l K_l)] x + \\ &\sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) x^T [I_n \otimes \bar{A}_l - c L^{\sigma(t)} \otimes (B_l K_l)]^T \bar{P}_l x = \\ &\sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) x^T (T_5 \otimes I_n)^T [(J_3^{\sigma(t)} \otimes (\bar{A}_l P_l) - \\ &c (J_3^{\sigma(t)})^2 \otimes (B_l K_l P_l)) + (J_3^{\sigma(t)} \otimes (\bar{A}_l P_l) - \\ &c (J_3^{\sigma(t)})^2 \otimes (B_l K_l P_l))^T] (T_5 \otimes I_n) x. \end{aligned} \quad (45)$$

对角阵 $J_3$ 是由一个零特征值和 $n-1$ 个正特征值构成的对角阵, 即 $J_3 = \text{diag}\{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . 由此可推导出

$$\dot{V}(x) = \sum_{l=1}^r h_l(\theta_1(x)) x^T (T_5 \otimes I_n)^T \Psi_l (T_5 \otimes I_n) x, \quad (46)$$

$$\Psi_l = \text{diag}\{0, Z_{2l}, \dots, Z_{(n-1)l}, Z_{nl}\}. \quad (47)$$

其中:  $Z_{il} = \lambda_i [(\bar{A}_l - c\lambda_i B_l K_l)^T P_l + P_l (\bar{A}_l - c\lambda_i B_l K_l)] < 0, i = 2, 3, \dots, N$ . 由上述证明可知,  $\dot{V}(x) \leq 0$ . 接下来给出关于  $\text{span}\{1_n \otimes \xi\} = \{x \in \mathbb{R}^{nN} | \dot{V}(x) = 0\}$ , 其中  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

因为  $\ker(\bar{P}_l) = \ker(L^{\sigma(t)} \otimes I_n)$ , 若  $x = 1_N \otimes \xi$ , 则  $\dot{V}(x) = 0$ , 从而可得  $\text{span}\{1_n \otimes \xi\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nN} | \dot{V}(x) = 0\}$ . 由上述证明可得  $\text{span}\{1_n \otimes \xi\} = \{x \in \mathbb{R}^{nN} | \dot{V}(x) = 0\}$ .

根据引理1可知,  $cL^{\sigma(t)} \otimes K_l$  为渐近稳定到零空间  $L^{\sigma(t)} \otimes I_n$ . 因此, 命题1中的条件均满足, 无领导者分布式反馈控制律为最优的且渐近稳定, 非线性多智能体系统中的每个智能体能够最终达到一致. 证毕.

从实际角度来看, 多智能体系统的一致性能能够达到预期的期望值是非常有意义的. 系统中的每个智能体的瞬态状态取决于系统闭环极点的位置. 为了更好地使多智能体系统的一致性能能够达到期望值, 本文采用逆最优分布式反馈控制方法解决系统的一致性能能够达到预期值. 针对有无领导者非线性多智能体系统, 给出逆最优分布式控制律设计步骤.

#### 1) 无领导者系统.

**步骤1:** 根据 IT2 T-S 模糊将非线性多智能体系统转化为多个局部线性子系统.

**步骤2:** 根据智能体间的通信拓扑  $L^{\sigma(t)}$ , 求出对应的最小特征值  $\bar{\lambda}$  并令  $c = 1/\bar{\lambda}$ .

**步骤3:** 设计矩阵  $S$  使得  $A_{11} - A_{12}S$  的  $m - n$  个特征值  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-n}\}$  全部位于指定位置.

**步骤4:** 根据式(34)求解反馈增益矩阵  $K_l$  并令  $\gamma \rightarrow +\infty$ .

**步骤5:** 根据求得的反馈增益矩阵  $K_l$  确定系统的逆最优分布式控制律.

#### 2) 有领导者系统.

**步骤1:** 根据 IT2 T-S 模糊将非线性多智能体系统转化为多个局部线性子系统.

**步骤2:** 根据智能体间的通信拓扑  $(L + H)^{\sigma(t)}$ , 求出对应的最小特征值  $\bar{\lambda}$  并令  $c = 1/\bar{\lambda}$ .

**步骤3:** 设计矩阵  $S$  使得  $A_{11} - A_{12}S$  的  $m - n$  个特征值  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-n}\}$  全部位于指定位置.

**步骤4:** 根据式(34)求解反馈增益矩阵  $K_l$  并令  $\gamma \rightarrow +\infty$ .

**步骤5:** 根据求得的反馈增益矩阵  $K_l$  设计系统的全局逆最优分布式一致性控制律.

### 5 仿真算例

下面分别对有向拓扑切换下的有无领导者非线性多智能体系统的全局最优控制给出算例仿真, 验证逆最优分布式反馈控制律的有效性和正确性.

#### 5.1 无领导者系统

非线性系统由6个非线性智能体组成, 智能体间的有向切换拓扑如图1所示, 1 s 为一个拓扑切换周期.

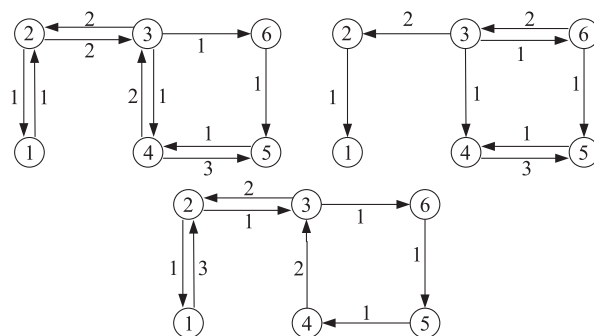


图 1 系统的有向切换拓扑

Fig. 1 The system's directional switching topologies

非线性系统动态方程如式(48)所示.

$$\begin{cases} \dot{x}_{01} = -x_{01} + 2x_{02} + 5x_{03}, \\ \dot{x}_{02} = x_{01} - x_{02} + 2x_{03}, \\ \dot{x}_{03} = -5x_{01} - x_{03} + u_i + \sin x_{02}. \end{cases} \quad (48)$$

利用 IT2 T-S 模糊规则将非线性系统化为不同模糊规则下的线性子系统. 线性子系统可写为

规则  $l_{i1}$  若  $x_{i2}$  在 0 的微小邻域内, 则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_{i2}. \quad (49)$$

规则  $l_{i2}$  若  $x_{i2}$  在  $\pm\pi/2$  的微小邻域内, 则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.64 \end{bmatrix} x_{i2}. \quad (50)$$

模糊规则所对应的隶属度函数如式(51)所示.

$$\begin{cases} h_{1,i1}(x_{i2}) = \frac{e^{-7(x_{i2}-\pi/4)}}{1+e^{-7(x_{i2}-\pi/4)}} \cdot \frac{1}{1+e^{-7(x_{i2}+\pi/4)}}, \\ x_{i2} \in (-\delta, \delta), \\ h_{1,i2}(x_{i2}) = 1 - h_{1,i1}(x_{i2}), \\ x_{i2} \in (\pm\frac{\pi}{2} - \delta, \pm\frac{\pi}{2} + \delta). \end{cases} \quad (51)$$

系统的有向切换拓扑如图1所示, 其对应的 Laplace 矩阵  $L$  的最小正特征值  $\bar{\lambda} = 0.8340$ , 可得出  $c = 1.1991$ .

#### 1) 基于 LQR 分布式反馈控制律.

选择权重矩阵  $Q = I_3$  和  $R = 1$ , 根据式(10)求解最优反馈增益  $K_l$ . 在控制律式(12)作用下, 非线性多智能体系统的一致性如图2所示, 系统误差如图3所示, 所有的智能体在 4.3 s 达到一致.

## 2) 逆最优分布式反馈控制律.

设系统中  $A_{11} - A_{12}S$  对应的特征值为  $-3 \pm j0.5$ ,  $\gamma = 20$ . 在逆最优控制律作用下, 智能体的状态如图4所示, 智能体间的误差如图5所示, 所有的智能体大约在2 s达到一致, 误差衰减为零.

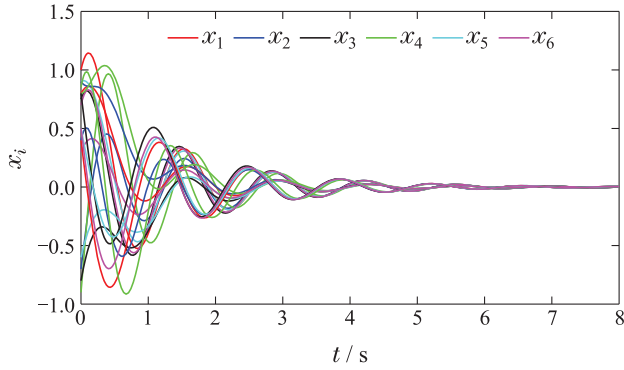


图2 基于LQR分布式反馈控制律下智能体状态

Fig. 2 Agent state under LQR distributed feedback control law

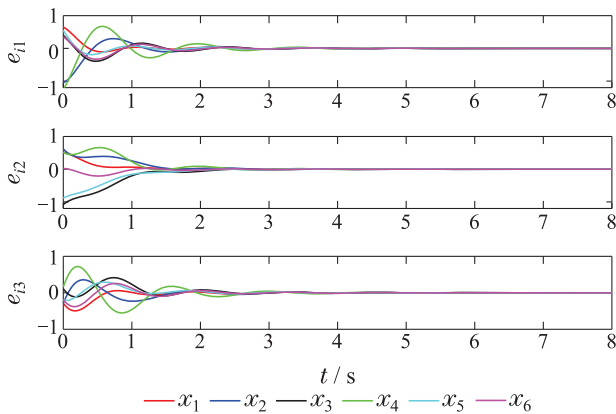


图3 基于LQR分布式反馈控制律智能体误差

Fig. 3 Agent error under LQR distributed feedback control law

通过图3和图5对比, 基于逆最优方法设计的分布式一致性最优反馈控制律作用于多智能体系统时, 非线性智能体达到一致所需时间明显缩短, 对系统有很好的控制效果.

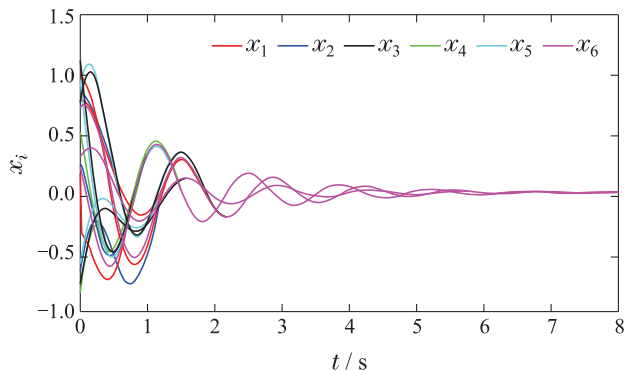


图4 逆最优分布式反馈控制律智能体状态

Fig. 4 Agent state under Inverse optimal distributed feedback control law

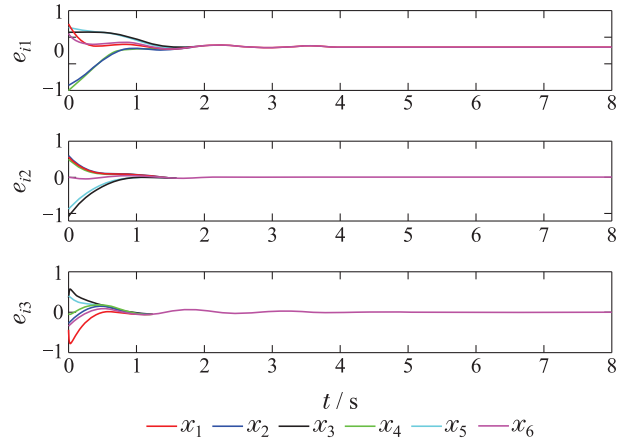


图5 逆最优分布式反馈控制律系统误差

Fig. 5 Agent state under Inverse optimal distributed feedback control law

## 5.2 有领导者系统

系统由6个非线性智能体和1个非线性领导者构成, 通信拓扑如图6所示, 拓扑切换周期为1 s.

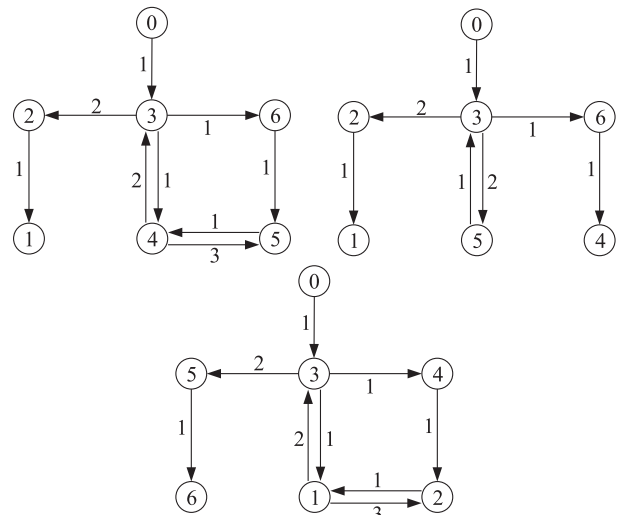


图6 系统的有向切换拓扑

Fig. 6 The system's directional switching topologies

非线性领导跟随者多智能体系统的动态方程如式(48)所示.

非线性领导者系统方程如式(52)所示

$$\begin{cases} \dot{v}_{01} = -v_{01} + 2v_{02} + 5v_{03}, \\ \dot{v}_{02} = v_{01} - v_{02} + 2v_{03}, \\ \dot{v}_{03} = -5v_{01} - v_{03} + \sin v_{02}. \end{cases} \quad (52)$$

通信拓扑网络图2对应的矩阵  $(L + H)^{\sigma(t)}$  最小正特征值  $\bar{\lambda} = 0.4544$ , 则  $c = 2.2007$ . 领导跟随者系统在不同控制律下的领导跟随一致性.

### 1) 基于LQR分布式反馈控制律.

选择权重矩阵  $Q = I_3$  和  $R = 1$ , 根据式(10)求解最优反馈增益矩阵  $K_l$ . 在控制律式(12)作用下, 非线性

性智能体的状态如图7所示, 系统误差如图8所示, 所有智能体大约在5 s时跟踪到领导者, 误差衰减为零。

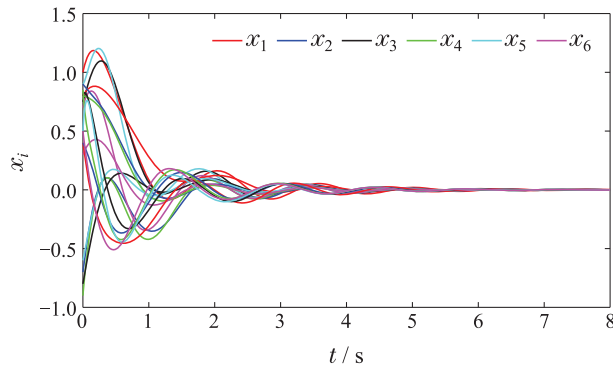


图 7 基于LQR分布式反馈控制律智能体状态

Fig. 7 Agent state under LQR distributed feedback control law

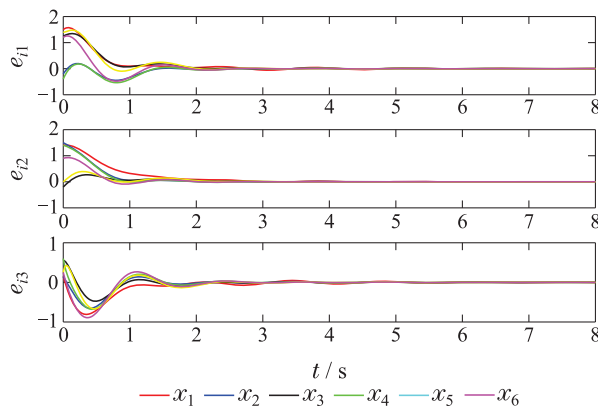


图 8 基于LQR分布式反馈控制律下智能体误差

Fig. 8 Agent error under LQR distributed feedback control law

## 2) 逆最优分布式反馈控制律。

假设 $A_{11} - A_{12}S$ 对应的特征值为 $-2 \pm j1.2$ ,  $\gamma = 100$ , 在逆最优分布式反馈控制律作用下, 智能体的状态如图9所示, 系统误差如图10所示, 所有智能体在4 s达到一致, 系统误差衰减为零, 系统的一致性满足期望值。

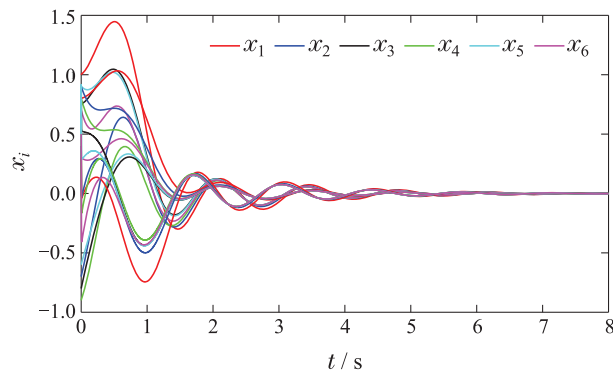


图 9 逆最优分布式反馈控制律智能体状态

Fig. 9 Agent state under inverse optimal distributed feedback control law

对比图8和图10, 有领导者非线性多智能体系统通过逆最优法设计的控制律对非线性多智能体系统有

更好的控制效果, 智能体跟随到领导者所需时间比一般控制律更短。

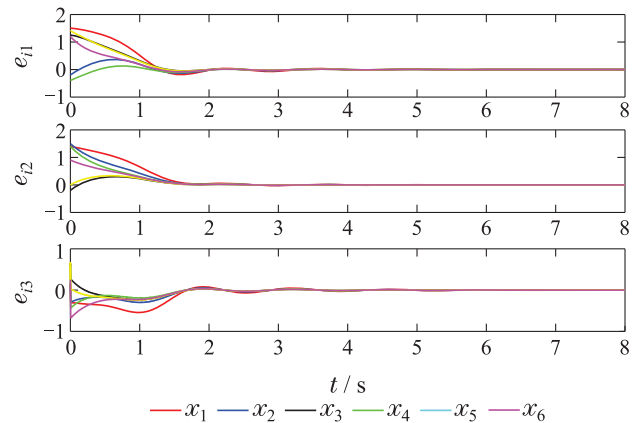


图 10 逆最优分布式反馈控制律智能体误差

Fig. 10 Agent error under inverse optimal distributed feedback control law

## 6 结论

本文研究了拓扑切换下连续非线性多智能体系统全局逆最优控制问题, 提出了用于一般连续非线性系统的方法, 通过IT2 T-S模糊模型将非线性系统方程转化为线性系统方程; 基于逆最优方法设计了拓扑切换下的一致性最优协同控制律, 与基于LQR的方法相比, 基于逆最优方法的最大优势在于: 1) 对非线性多智能体系统有更好地控制效果, 控制效果能够满足要求; 2) 智能体趋于一致或跟随到领导者所需时间更短, 多智能体系统能够快速的达到期望值。

## 参考文献:

- [1] YUAN C Z, HE H B. Cooperative output regulation of heterogeneous multi-agent systems with a leader of bounded inputs. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(2): 215 – 242.
- [2] MA H X, CHEN M, WU Q X. Disturbance observer based inverse optimal tracking control of the unmanned aerial helicopter. *The 8th Data Driven Control and Learning Systems Conference*. Dali, 2019: 448 – 452.
- [3] Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 401 – 420.
- [4] SHEN Q, JIANG B, SHI P, et al. Cooperative adaptive fuzzy tracking control for networked unknown nonlinear multi-agent systems with time-varying actuator faults. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2015, 22(3): 494 – 504.
- [5] KRISTIAN H M, FRANK L. Cooperative optimal control for multi-agent systems on directed graph topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 59(3): 769 – 774.
- [6] ZHANG H W, QU Z H. Lyapunov adaptive and optimal design techniques for cooperative systems on directed communication graphs. *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, 2012, 59(7): 3026 – 3041.
- [7] FRANCESCO B, TAMAS K. Distributed LQR design for identical dynamically decoupled systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(8): 1901 – 1912.

- [8] MA J Y, ZHENG Y S, WANG L. LQR-based optimal topology of leader-following consensus. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(17): 3404 – 3421.
- [9] LI H P, SHI Y, YAN W S, et al. Receding horizon consensus of general linear multi-agent systems with input constraints: An inverse optimality approach. *Automatica*, 2018, 91: 10 – 16.
- [10] ZHANG H G, FENG T, YANG G H, et al. Distributed cooperative optimal control for multi-agent systems on directed graphs: An inverse optimal approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 45(7): 1315 – 1326.
- [11] ZHANG H, ZHANG J, YANG G H, et al. Leader-based optimal coordination control for the consensus problem of multi-agent differential games via fuzzy adaptive dynamic programming. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2015, 23(1): 152 – 163.
- [12] HONG Chengwen, FU Yue. Nonlinear robust approximate optimal tracking control based on adaptive dynamic programming. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(9): 1285 – 1292.  
(洪成文, 富月. 基于自适应动态规划的非线性鲁棒近似最优跟踪控制. 控制理论与应用, 2018, 35(9): 1285 – 1292.)
- [13] MICHEL L F, EDGAR N, et al. Decentralized control for stabilization of nonlinear multi-agent systems using neural inverse optimal control. *Neurocomputing*, 2015, 168: 81 – 91.
- [14] J P Belfo, Aguiar A P, Lemos J M. Distributed inverse optimal control for discrete-time nonlinear multi-agent systems. *IEEE Control Systems Letters*, 2021, 5(6): 2096 – 2101.
- [15] DONG W. Distributed optimal control of multiple systems. *International Journal of Control*, 2010, 83(10): 2067 – 2079.
- [16] MODARES H, LEWIS F L, DAVOUDI A. Optimal output synchronization of nonlinear multi-agent systems using approximate dynamic programming. *International Joint Conference on Neural Networks*. Vancouver: IEEE, 2016: 4227 – 4232.
- [17] GUO Zijie, BAI Weiwei, ZHOU Qi, et al. Adaptive optimal control for a class of nonlinear systems with dead zone input and prescribed performance. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(11): 2128 – 2136.  
(郭子杰, 白伟伟, 周琪, 等. 基于性能指标约束的一类输入死区非线性系统最优控制. 自动化学报, 2019, 45(11): 2128 – 2136.)
- [18] LI Y M, MIN X, TONG S C. Adaptive fuzzy inverse optimal control for uncertain strict-feedback nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(10): 2363 – 2374.
- [19] XIANG L Y, ZHENG E L. An inverse optimal problem for multi-agent systems based on static output feedback control. *IEEE Access*, 2019, 7: 177793 – 177803.
- [20] SHINJI H, HIKARU S, et al. Consensus in hierarchical multi-agent dynamical systems with low-rank interconnections: Analysis of stability and convergence rates. *Proceedings of the 2009 conference on American Control Conference*. St Louis, Mo: IEEE, 2009, 5192 – 5197.
- [21] ZHANG L P, ZHANG G S. Cooperative optimal control for descriptor multi-agent systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2020, 37(1): 935 – 952.

#### 作者简介:

魏文军 教授, 研究方向为多智能体系统协同控制、智能控制。

E-mail: weiwenjun@mail.lzjtu.cn;

尉晶波 研究生, 研究方向为非线性多智能体协同输出调节和最优

控制. E-mail: 1601825694@qq.com.