

基于事件驱动控制的混杂动态博弈系统的纳什均衡分析

陈向勇^{1,2,3†}, 曹进德², 赵 峰¹, 姜晓伟³

(1. 临沂大学 自动化与电气工程学院, 山东 临沂 276005; 2. 东南大学 数学学院, 江苏 南京 211189;

3. 中国地质大学 复杂系统先进控制与智能化湖北省重点实验室; 自动化学院, 湖北 武汉 430074)

摘要: 本文研究了基于事件驱动控制的混杂动态博弈系统的纳什均衡分析问题. 首先, 分析了事件驱动机制对混杂动态博弈过程的影响, 进而, 在进行状态空间描述的基础上, 给出了混杂动态博弈的纳什均衡的定义, 并建立了对应博弈系统的策略型模型. 其次, 结合Lanchester方程, 分别讨论了两类混杂动态博弈系统的均衡问题, 包括事件驱动策略设计和固定的情况, 获得了均衡解存在的必要条件. 最后, 通过数值模拟进行了应用分析, 验证了所取得结果的合理性和科学性, 并总结了混杂动态博弈研究的未来工作.

关键词: 事件驱动控制; 混杂动态博弈; 纳什均衡; Lanchester方程

引用格式: 陈向勇, 曹进德, 赵峰, 等. 基于事件驱动控制的混杂动态博弈系统的均衡分析及应用. 控制理论与应用, 2021, 38(11): 1801 – 1808.

DOI: 10.7641/CTA.2021.10789

Nash equilibrium analysis of hybrid dynamic games system based on event-triggered control

CHEN Xiang-yong^{1,2,3†}, CAO Jin-de², ZHAO Feng¹, JIANG Xiao-wei³

(1. School of Automation and Electrical Engineering, Linyi University, Linyi Shandong 276005, China;

2. School of Mathematics, Southeast University, Nanjing Jiangsu 211189, China;

3. Hubei Key Laboratory of Advanced Control and Intelligent Automation of Complex Systems; School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: This paper studies the Nash equilibrium analysis and application of event-triggered hybrid dynamic games system. Firstly, we consider the influence of event driven mechanism on the process of hybrid dynamic games. Then, by summarizing the state space model of hybrid dynamic games, the definition of Nash equilibrium is given, and the strategic model of corresponding game system is established. Secondly, combined with Lanchester equation, the equilibrium problems of two kinds of event driven hybrid dynamic games are discussed, including event driven strategy design and fixed case, and the necessary conditions for the existence of equilibrium solutions are obtained. Finally, the application analysis is carried out through numerical simulation, which verifies the rationality and scientificity of the results, and summarizes the future research work of hybrid dynamic games.

Key words: event-triggered control; hybrid dynamic games; Nash equilibrium; Lanchester equation

Citation: CHEN Xiangyong, CAO Jinde, ZHAO Feng, et al. Nash equilibrium analysis of hybrid dynamic game systems based on event-driven control. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(11): 1801 – 1808

1 引言

20世纪60年代中期, 诺贝尔奖获得者泽尔腾将纳什均衡概念引入动态分析, 开创了动态博弈的研究. 经过近六十年发展, 一系列重要成果被提出, 比如, 属于连续动态博弈范畴的微分对策^[1]已被成功应用于飞

行器追逃控制、多目标协同作战等方面; 源于棋牌游戏的事件动态博弈^[2]在2007年被首次提出并实现了对逻辑层面有限阶段动态博弈的分析和求解^[3].

近年来, 混杂动态博弈已经成为新的研究热点. 它源于作战行动和棋牌游戏, 描述的是两个非合作智能

收稿日期: 2021-8-25; 录用日期: 2021-11-03.

†通信作者. E-mail: cxy8305@163.com.

本文责任编辑: 洪奕光.

国家自然科学基金项目(12026235, 12026234, 62173175), 高等学校学科创新引智计划项目(B17040), 山东省自然科学基金项目(ZR2019BF045, ZR2019MF021, ZR2019QF004); 山东省高等学校科研计划项目(J18KA354).

Supported by the National Natural Science Foundation of China (12026235, 12026234, 62173175), the 111 project (B17040), the Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2019BF045, ZR2019MF021, ZR2019QF004) and the Project of Shandong Province Higher Educational Science and Technology (J18KA354).

主体之间事件动态博弈和微分对策相互作用的多阶段博弈过程. 然而, 逻辑状态演化的引入使得系统结构复杂度变高, 导致传统的博弈模型无法准确地描述系统的内在结构和演化特征, 对其进行建模和求解变得非常困难, 如何建立更有效描述混杂动态博弈演化过程的数学模型成为首要解决的问题. 其中, 徐等首次通过一个空战实例介绍了基于事件触发的混杂动态博弈问题的内容与处理方法^[4]. 此后, 针对阶段数较少的混杂动态博弈, 陈等建立了基于Lanchester方程的状态空间表述模型, 分别对连续最优策略和事件变招策略的求解^[5-6]. 针对逻辑层面的有限动态博弈, 程代展教授给出了演化博弈的代数状态空间描述和博弈策略的矩阵表示^[7-8]. 2019年, 借鉴混杂动态系统的思想, 文献[9]首次提出了博弈切换演化动力学框架(图1a所示), 即不同博弈模式对应不同环境状态, 个体行为和当前时间进行博弈共同决定下一时间进行的博弈, 并研究了网络结构群体合作演化行为. 以上研究结果都为混杂动态博弈系统的分析和控制提供了较好的基础模型.

当前, 人工智能在围棋、星际争霸等博弈场景的应用^[10-11], 为动态博弈问题的求解带来便利并取得算法方面的进步, 使得博弈系统的策略集和阶段数逐渐庞大, 呈现出规模大和结构复杂度高的特点. 特别在博弈演化过程中, 预测结果千变万化, 导致传统的博弈理论无法准确分析其演化规律. 因此, 众多研究者开始重新审视复杂动态博弈中纳什均衡的意义和作用, 并对博弈从初始状态到均衡的动态演化过程及参与者的运动规律进行深入探索. 其中, 演化稳定策略^[12-13]为复杂博弈均衡解的研究实现了突破. 文献[14-15]对多阶段演化博弈中的有限理性问题进行了理论分析和应用验证, 实现了对传统博弈问题参与者“理性”基础的修正. 文献[16]给出多阶段有限博弈的均衡分析和一致性预测成立条件. 文献[17]针对具有大策略集的多阶段博弈给出期望条件, 实现了均衡的存在性分析和求解. 文献[18-19]针对复杂动态博弈的演化特点, 利用事件树给出了激励均衡、完美子博弈强均衡和开环反馈纳什均衡的概念和性质. 这都为混杂动态博弈均衡问题的分析提供理论借鉴.

另一方面, 复杂博弈均衡的求解在智能优化算法方面^[20]取得了进步. 针对非合作博弈系统, 提出时变纳什均衡和广义纳什均衡等概念, 设计了有效求解的分布式智能优化方法^[21-23]. 由此, 上述研究成果已经在大规模复杂博弈的均衡求解方面发挥了作用. 然而, 混杂动态博弈的均衡解需要在多阶段演化后通过动态调整才能达到, 而且参与者对保证利益最大化行动的理解存在较大差异, 而针对混杂动态博弈均衡的存在性分析、性质分类等研究成果较少.

受上述分析的启发, 本文研究了基于事件驱动控制的混杂动态博弈系统的纳什均衡分析问题. 首先, 分析了事件驱动机制对混杂动态博弈过程的影响, 进而, 在进行状态空间描述的基础上, 给出了混杂动态博弈的纳什均衡的定义, 并建立了对应博弈系统的策略型模型. 其次, 结合Lanchester方程, 分别讨论了两类混杂动态博弈系统的均衡问题, 包括事件驱动策略设计和固定的情况, 获得了均衡解存在的必要条件. 最后, 数值模拟进行了应用分析, 验证了所取得结果的合理性, 并总结了混杂动态博弈研究的未来工作.

2 模型描述和基础知识

图1展示了非合作动态博弈双方的混杂动态演化过程, 其中, X 和 Y 为博弈双方的决策者, 从图1不难看出, 混杂动态博弈的演化过程包含两个层面, 一是决策者的变招 X 和 Y 发生在离散时刻, 每次变招都是根据博弈双方观察和探测的态势信息确立的, 都会改变对阵的形势, 引起连续系统的结构性变化, 表现为事件驱动的逻辑状态变化. 另一层面就是双方连续动态的博弈过程, 具体是根据决策者的指令和系统的结构特征而不断调整连续控制输入, 来改变各单元状态量, 但是博弈双方的态势不会发生改变, 属于系统结构不变情况下的连续控制过程, 如此构成了混合动态博弈的演化过程. 由此, 依据文献[4-5]的建模原则, 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, E_x, U, t), \\ \dot{y} = g(x, y, E_y, V, t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: x 和 y 是 X 和 Y 的状态向量; $t \in [0, T]$, T 是终端时刻; E_x 和 E_y 分别是双方引起系统结构变化的事件驱动控制策略; U 和 V 是连续控制输入向量. 进而, 定义如下的性能指标函数:

$$J(E_x, E_y, U, V) = \Phi(x(T), y(T)) + \int_0^T h(x, y, E_x, E_y, U, V) dt, \quad (2)$$

其中: $\Phi(x(T), y(T))$ 为与终端状态向量有关的连续函数; $h(x, y, E_x, E_y, U, V)$ 为连续函数. 由此构成了混合动态博弈系统的状态空间描述的一般形式.

由此, 设博弈双方在 t_k ($1 \leq k < \infty$)时进行引起系统结构变化的事件驱动变招, 其中 $t_k \in [t_0, t_f]$, $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq \dots \leq t_f$, t_0 为初始时刻, t_f 为终端时刻, 可确定策略集为 $U = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$, $V = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$, $E_x = \{E_{x1}, E_{x2}, \dots, E_{xk}\}$, $E_y = \{E_{y1}, E_{y2}, \dots, E_{yk}\}$. 定义博弈双方在确定连续控制和事件变招策略集后的对阵态势集合为 $S = \{s_0, s_1, \dots, s_k, s_f\}$, $s_0 = \{s_{x0}, s_{y0}\}$ 为初始态势, 演化稳定结局为 $s_f = \{s_{xf}, s_{yf}\}$, 对应的 s_q ($q = 1, 2, \dots, k$)为

演化过程中双方确定策略后的态势, 由此可以得到

$$s_{q+1} = s_q \cdot \Sigma_q,$$

其中 $\Sigma_q = \Sigma(U_q, V_q, E_{xq}, E_{yq})$ 为态势转移函数, 则

$$s_f = s_0 \cdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2 \cdots \Sigma_k.$$

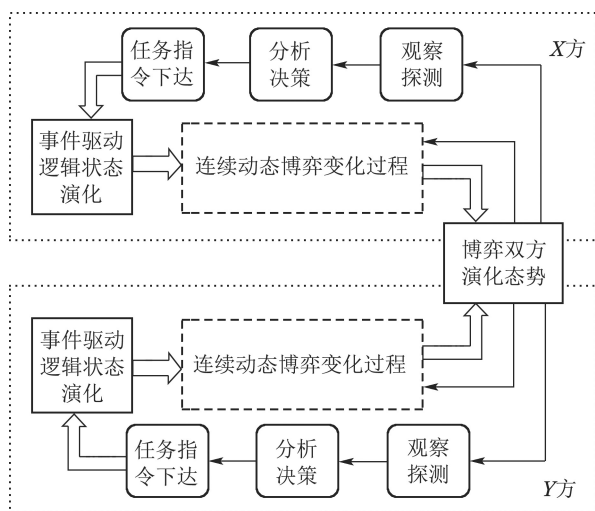


图 1 混杂动态博弈系统演化结构图

Fig. 1 Evolution structure of hybrid dynamic games system

由此, 可以用一个七元数组建立混杂动态博弈系统的策略型模型

$$G = (P, S, C, E, \Sigma, R, J), \quad (3)$$

其中: $P = \{X, Y\}$ 是博弈双方的决策者集合, 决策双方对应的状态向量一般定义为 $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 和 $y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$; $S = \{s_0, s_1, \dots, s_k, s_f\}$ 为态势集合, $C = \{U, V\}$ 为连续控制策略集合; $E = \{E_x, E_y\}$ 为双方根据态势制定的事件驱动策略; $\Sigma: s \times (E \times C) \rightarrow s$ 为态势转移函数集合; R 是由博弈双方制定的演化规则, 包括行动集、信息集和预先制定的规则等; J 为性能指标函数。

本文主要是针对所建立基于事件驱动控制的混杂动态博弈系统, 对其纳什均衡进行分析。根据博弈论和微分对策理论, 当混杂动态博弈的事件触发次数较少和策略集合较小时, 可知博弈的纳什均衡需要满足

$$J(E_x^*, E_y, U^*, V) \geq J(E_x^*, E_y^*, U^*, V^*) \geq J(E_x, E_y^*, U, V^*), \quad (4)$$

其中 (U^*, V^*, E_x^*, E_y^*) 为均衡解, 即博弈双方选择的最优连续控制策略和事件驱动的最佳变招策略。

注 1 式(4)中给出的纳什均衡的定义是按照传统博弈论和微分对策的基础理论所提出的。由于本文研究的混杂动态博弈主要是由事件驱动控制和连续微分对策相互作用所组成的, 而每一次变招的发生都和系统的结构特性、参数和性能指标等有着紧密的联系, 因此在每一次事件驱动策略不变的连续博弈演化中, 纳什均衡解都是存在的。

3 主要结果

本节重点考虑事件驱动控制策略和连续控制策略对混杂动态博弈演化的影响, 将分别对事件驱动的混杂动态博弈的均衡问题和事件策略固定的混杂动态博弈系统的均衡问题进行分析。

3.1 事件驱动控制的混杂动态博弈的纳什均衡

针对系统(1)和性能指标(2), 设博弈双方的连续控制输入量是固定量, 则混杂动态博弈的纳什均衡问题转化为求解最佳事件驱动策略 (E_x^*, E_y^*) 使得

$$J(E_x^*, E_y) \geq J(E_x^*, E_y^*) \geq J(E_x, E_y^*). \quad (5)$$

基于此, 结合Lanchester方程, 考虑如下的一类混杂动态博弈系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} \psi_{ji} y_j(t) + u_i(t), \\ \dot{y}_j(t) = - \sum_{i=1}^m \beta_{ij} \phi_{ij} x_i(t) + v_j(t), \end{cases} \quad (6)$$

对应的性能指标函数为

$$J = \sum_{i=1}^m \eta_i x_i(T) - \sum_{j=1}^n \theta_j y_j(T), \quad (7)$$

其中: $\alpha_{ji} > 0$ 为Y方第j个单元对X方第i个单元的损耗系数; $\beta_{ij} > 0$ 为X方第i个单元对Y方第j个单元的损耗系数; η_i 和 θ_j 分别为终端状态所对应的重要性加权因子; $\psi_{ji} \in \{0, 1\}$ 和 $\phi_{ij} \in \{0, 1\}$ 是事件驱动变量。特别是, 当在 t_q 时刻发生变招时会引起对应值的选取, 则对应的事件驱动策略的表达式为

$$E_{yq} = \begin{bmatrix} \psi_{1q1} & \cdots & \psi_{nq1} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{1qm} & \cdots & \psi_{nqm} \end{bmatrix},$$

$$E_{xq} = \begin{bmatrix} \phi_{1q'1} & \cdots & \phi_{mq'1} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{1q'm} & \cdots & \phi_{mq'n} \end{bmatrix},$$

针对上述表达式中的事件驱动变量, 满足

$$\sum_{i=1}^m \psi_{jqi} = 1; \quad \sum_{j=1}^n \phi_{i_q'j} = 1,$$

其中: ψ_{jqi} 为事件驱动策略确定后Y方第j个单元会对阵X方的第i个单元; 同样, $\phi_{i_q'j}$ 表示X方第 i_q' 个单元会对阵Y方第j个单元; $\{1_q, \dots, n_q\} \in \{1, \dots, n\}$ 表示Y方在 t_q 时刻变招发生后的选择的对阵方式; 同样 $\{1_{q'}, \dots, m_{q'}\} \in \{1, \dots, m\}$ 表示X方在 t_q 时刻变招发生后的选择的对阵方式。

注 2 以上讨论的模型(6)属于系统(1)的范畴, 可以改写成

$$\begin{cases} \dot{x} = f(\alpha, y, E_x, U, t), \\ \dot{y} = g(\beta, y, E_y, V, t), \end{cases} \quad (8)$$

其中 α 和 β 为对应 $\alpha_{ji} > 0$ 和 $\beta_{ij} > 0$ 的系数矩阵. 同样, 对应的性能指标(7)属于指标(2)的范畴.

注3 因为 ψ_{jqi} 和 $\phi_{iq'j}$ 都是0-1型事件驱动变量. 根据Lanchester方程的基础理论, 当上述的矩阵中列和条件被满足时, 表示博弈双方在选择对阵单元的时候必须集中全部力量攻击对方.

由此, 根据动态博弈求解均衡的极大极小值原理, 可以得到上述博弈系统均衡存在的必要条件.

定理1 设上述混杂动态博弈系统的伴随函数为 $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$, 对应系统的Hamilton函数为

$$H(x, y, \lambda, \mu, E_x, E_y, t) = - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_{ji} \psi_{ji} \right) y_j + \lambda_i u_i(t) - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \beta_{ij} \phi_{ij} \right) x_i + \mu_j v_j(t). \quad (9)$$

则该博弈系统的纳什均衡存在的必要条件满足

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \mu_j \beta_{ij} \phi_{ij} e_s, \\ \dot{\mu}_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_{ji} \psi_{ji} e_s, \\ \lambda_i(T) = \frac{\partial J}{\partial x_i} = \eta_i, \\ \mu_j(T) = \frac{\partial J}{\partial y_j} = -\theta_j, \end{cases} \quad (10)$$

以及

$$\begin{aligned} H(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*, E_x^*, E_y^*, t) = \\ \max_{E_x} \min_{E_y} H(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*, E_x, E_y, t) = \\ \min_{E_x} \max_{E_y} H(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*, E_x, E_y, t). \end{aligned} \quad (11)$$

对应的最佳事件驱动策略满足

$$\psi_{ji}^* = \begin{cases} 1, & \max_i (\lambda_i^* \alpha_{ji}) = \lambda_{i^*}^* \alpha_{ji^*}, \\ 0, & \max_i (\lambda_i^* \alpha_{ji}) \neq \lambda_{i^*}^* \alpha_{ji^*}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\phi_{ij}^* = \begin{cases} 1, & \max_j (-\mu_j^* \beta_{ij}) = -\mu_{j^*}^* \beta_{ij^*}, \\ 0, & \max_j (-\mu_j^* \beta_{ij}) \neq -\mu_{j^*}^* \beta_{ij^*}. \end{cases} \quad (13)$$

证 根据式(10)可知

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i(t) < 0, & \dot{\mu}_j(t) > 0, \\ \lambda_i(T) > 0, & \mu_j(T) < 0. \end{cases}$$

因此, 对于任意 $t \in [0, T]$, 总有

$$\lambda_i(t) > 0, \mu_j(t) < 0.$$

由此, 条件(11)就转化为

$$\begin{cases} \max_{E_x} \sum_{j=1}^n (-\mu_j^*) \beta_{ij} \phi_{ij}, \\ \max_{E_y} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \alpha_{ji} \psi_{ji}, \end{cases} \quad (14)$$

又 $\sum_{j=1}^n (-\mu_j^*) \beta_{ij} \phi_{ij} e_s$ 和 $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \alpha_{ji} \psi_{ji} e_s$ 分别为 $-\mu_j^* \beta_{ij}$ 和 $\lambda_i^* \alpha_{ji}$ 的加权平均和, 所以可以很容易得到式(12)和式(13).

注4 此定理的具体证明过程可参考文献[6]给出的定理证明.

注5 由于 $\lambda_i(t)$ 和 $\mu_j(t)$ 是连续变化的, 因此 $\lambda_i^*(t) \alpha_{ji}$ 和 $\mu_j^*(t) \beta_{ij}$ 也是连续变化的, 因此在临近每一个变招时刻所在的小领域内都是保持稳定不变的, 也就是变招发生后会出现系统结构不变的连续动态博弈过程.

3.2 事件策略固定的混杂动态博弈的纳什均衡

针对系统(1)和性能指标(2), 设博弈双方事件驱动策略是固定不变的, 则混杂动态博弈的均衡问题转化为求解最优控制策略 (U^*, V^*) 使得

$$J(U^*, V) \geq J(U^*, V^*) \geq J(U, V^*). \quad (15)$$

类似于上节, 结合Lanchester方程, 考虑如下类博弈系统模型

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} \psi_{ji} y_j(t) + u_i(t), \\ \dot{y}_j(t) = - \sum_{i=1}^m \beta_{ij} \phi_{ij} x_i(t) + v_j(t), \end{cases} \quad (16)$$

对应的性能指标函数为

$$J = \sum_{i=1}^n x_i(T) - \sum_{j=1}^n y_j(T). \quad (17)$$

由于博弈双方的事件驱动策略是固定不变的且顺序已知, 假设在博弈演化过程中事件驱动变招发生的路径为

$$r = ((t_0, E_0), (t_1, E_1), \dots, (t_k, E_k)),$$

其中: (t_k, E_k) 为在 t_k 时刻的事件驱动策略 E_k , $E_q = \{E_{xq}, E_{yq}\}$. 要求变招次数固定, 并要求终端时刻的状态变量都大于0. 以及

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \psi_{jqi} = 1; & \sum_{j=1}^n \phi_{iq'j} = 1, \\ \sum_{j=1}^n \psi_{jqi} = 1; & \sum_{i=1}^m \phi_{iq'j} = 1. \end{cases}$$

注6 根据Lanchester方程的基础理论, 当上述的矩阵中列和和行和条件被满足时, 所表示的物理含义是指博弈双方在对阵选择中己方的一个单元只能选择对阵对方的一个单元.

由此, 针对博弈双方的连续控制输入 $u_i(t) \in [u_*,$

u^*]和 $v_i(t) \in [v_*, v^*]$ 需满足

$$\begin{cases} \int_{t_{q-1}}^{t_q} u_i(t) dt \leq M_0, & \int_{t_{q-1}}^{t_q} v_j(t) dt \leq N_0, \\ \int_{t_{q-1}}^{t_q} u^* dt \geq M_0, & \int_{t_{q-1}}^{t_q} v^* dt \geq N_0, \end{cases}$$

其中: u_*, u^*, v_*, v^*, M_0 和 N_0 为非负实数, $q = 1, \dots, k$.

根据文献[5]给出的定理, 在 $[t_{q-1}, t_q]$ 时间区间内, 混杂动态博弈(16)–(17)转化为传统的微分对策问题, 由此, 可以得到关于在 $[t_{q-1}, t_q]$ 内事件驱动策略不变的博弈系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{i_q}(t) = -\alpha_{j_q i_q} y_{j_q}(t) + u_{i_q}(t), \\ \dot{y}_{j_q}(t) = -\beta_{i_q j_q} x_{i_q}(t) + v_{j_q}(t), \end{cases} \quad (18)$$

和

$$J_q = \sum_{i_q=1}^n x_{i_q}(t_q) - \sum_{j_q=1}^n y_{j_q}(t_q), \quad (19)$$

所对应纳什均衡存在的必要条件.

定理 2 考虑系统(18)和性能指标(19), 如果存在常数 $\lambda_q > 0$ 和 $\mu_q > 0$ 以及控制输入 $u_{i_q}^*(t) \in [u_*, u^*]$, $v_{j_q}^*(t) \in [v_*, v^*]$, 满足

$$\begin{cases} \int_{t_{q-1}}^{t_q} u_{i_q}(t) dt \leq \int_{t_{q-1}}^{t_q} u_{i_q}^*(t) dt, \\ \int_{t_{q-1}}^{t_q} v_{j_q}(t) dt \leq \int_{t_{q-1}}^{t_q} v_{j_q}^*(t) dt, \end{cases} \quad (20)$$

则在 $[t_{q-1}, t_q]$ 内系统的纳什均衡存在的必要条件是辅助函数

$$L(u_{i_q}^*(t), v_{j_q}^*(t), \lambda_k, \mu_k, t) = \max_{u_{i_q}} \min_{v_{j_q}} (\Omega_1 u_{i_q} - \Omega_2 v_{j_q} - \lambda_k u_{i_q} + \mu_k v_{j_q})$$

成立, 则在 $[t_{q-1}, t_q]$ 内, 可得

$$J_q(u_{i_q}^*(t), v_{j_q}^*(t)) = \max_{u_{i_q}} \min_{v_{j_q}} J_q(u_{i_q}, v_{j_q}),$$

其中:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{\frac{\beta_{i_q j_q}}{\alpha_{j_q i_q}}} e^{\sqrt{\alpha_{j_q i_q} \beta_{i_q j_q}}(t_q - t)} + \\ (1 - \sqrt{\frac{\beta_{i_q j_q}}{\alpha_{j_q i_q}}}) e^{-\sqrt{\alpha_{j_q i_q} \beta_{i_q j_q}}(t_q - t)} \end{pmatrix}, \\ \Omega_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \sqrt{\frac{\alpha_{j_q i_q}}{\beta_{i_q j_q}}}) e^{\sqrt{\alpha_{j_q i_q} \beta_{i_q j_q}}(t_q - t)} + \\ (1 - \sqrt{\frac{\alpha_{j_q i_q}}{\beta_{i_q j_q}}}) e^{-\sqrt{\alpha_{j_q i_q} \beta_{i_q j_q}}(t_q - t)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

证 根据式(15)可知

$$\begin{cases} L(u_{i_q}^*(t), v_{j_q}(t), \lambda_k, \mu_k, t) \geq \\ L(u_{i_q}^*(t), v_{j_q}^*(t), \lambda_k, \mu_k, t), \\ L(u_{i_q}^*(t), v_{j_q}^*(t), \lambda_k, \mu_k, t) \geq \\ L(u_{i_q}(t), v_{j_q}^*(t), \lambda_k, \mu_k, t). \end{cases}$$

对其两边在时间区间 $[t_{q-1}, t_q]$ 内求积分并利用式(20)可得均衡解所对应的最优性能指标

$$J_q(u_{i_q}^*(t), v_{j_q}^*(t)) = \max_{u_{i_q}} \min_{v_{j_q}} J_q(u_{i_q}, v_{j_q})$$

成立. 证毕.

注 7 此定理的证明可参考文献[5]的证明.

注 8 当在时间区间 $[t_{q-1}, t_q]$ 内, 上述性能指标成立时, 我们可以确认整个博弈系统的性能指标也能达到最优, 并且在每个时间区间 $[t_{q-1}, t_q]$ 内的子博弈系统的纳什均衡解为

$$u_{i_q}^*(t) = \begin{cases} u^*, & \Omega_1 \geq \lambda_k, \\ u_*, & \Omega_1 \leq \lambda_k, \end{cases} \quad v_{j_q}^*(t) = \begin{cases} v^*, & \Omega_2 \geq \mu_k, \\ v_*, & \Omega_2 \leq \mu_k. \end{cases}$$

对应的连续控制策略变化时刻可以根据 $\Omega_1 = \lambda_k$ 和 $\Omega_2 = \mu_k$ 求得, 则对应的均衡解可以改写为

$$\begin{aligned} u_{i_q}^*(t) &= \begin{cases} u^*, & t \in [t_{q-1}, t_{\lambda_k}], \\ u_*, & t \in (t_{\lambda_k}, t_q], \end{cases} \\ v_{j_q}^*(t) &= \begin{cases} v^*, & t \in [t_{q-1}, t_{\mu_k}], \\ v_*, & t \in (t_{\mu_k}, t_q]. \end{cases} \end{aligned}$$

注 9 本部分讨论的事件驱动策略是不变的, 但是变招时刻是需要计算出来, 根据文献[5]提供的计算步骤, 可以从终端时刻开始往前逐级求取每一时间区间 $[t_{q-1}, t_q]$ 内的最优连续控制策略, 在此基础上, 利用静态优化方法可以求得变招时刻以及最终整个混杂博弈系统的纳什均衡.

注 10 如果变招时刻也是固定, 这样整个混杂动态博弈系统就被划分为 $k+1$ 个微分对策子系统, 只需要按照微分对策原理, 求出每一时间段内的子博弈系统的纳什均衡并将其整合, 所对应的结果就是整个混杂博弈系统的纳什均衡结果.

3.3 应用例子

近年来, Lanchester方程已被成功应用于市场竞争、公共交通投资、人口预测模型等^[24–25]. 文献[5–6]也给出了两类基于Lanchester方程的混杂动态博弈系统模型. 由此, 本文针对与系统模型(6)和模型(16)有关的应用例子进行均衡分析.

例 1 设系统的连续控制输入量全为0, 考虑如下混杂动态博弈模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -9\psi_{11q}y_1 - \psi_{21q}y_2, \\ \dot{y}_1 = -\phi_{11q}x_1, \\ \dot{y}_2 = -\phi_{12q}x_1, \end{cases} \quad (21)$$

和如下描述的性能指标为

$$J = 9x_1 - y_1 - 9y_2. \quad (22)$$

设系统状态的初始值为 $x_{10} = 100, y_{10} = 30, y_{20} = 30$, 终端时间为 $T = 0.489$. 首先根据定理1可以求出纳什均衡解满足的条件为

$$\begin{cases} \psi_{11}(t) = \psi_{21}(t) = 1, \\ \phi_{11_q}(t) + \phi_{12_q}(t) = 1, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T,$$

即满足

$$E_{yq} = [1 \ 1], E_{x0} = [1 \ 0].$$

进而, 根据文献[6]的理论结果, 可知, 对于 E_x 在 $t_q = 0.384$ 时刻会发生一次变招, 对应的事件驱动策略为

$$E_{x1} = [0 \ 1].$$

则基于系统(21)和性能指标(22)的事件驱动的混杂动态博弈系统的纳什均衡满足

$$(E_x^*, E_y^*) = ((E_{x0}^*, E_{x1}^*), (E_{y0}^*, E_{y1}^*)) = (([1 \ 0], [0 \ 1]), ([1 \ 1], [1 \ 1])).$$

例2 在例1的基础上, 保持系统模型不变, 但性能指标为

$$J = 9x_1 - 9y_1 - y_2. \quad (23)$$

由此, 按照已取得的理论分析结果, 可以求出在博弈演化时间段内没有新的变招发生, 则对应博弈系统的纳什均衡满足

$$(E_x^*, E_y^*) = (E_{x0}^*, E_{y0}^*) = ([1 \ 0], [1 \ 1]).$$

注11 从例1和例2可以看出, 上述事件驱动的混杂动态博弈系统纳什均衡的存在性与模型的系数和性能指标的重要性因子有关系.

例3 考虑文献[5]给出的例子, 系统的状态描述模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -\sum_{j=1}^2 \alpha_{ji} \psi_{ji_q} y_j(t) + u_i(t), \\ \dot{y}_j(t) = -\sum_{i=1}^2 \beta_{ij} \phi_{ij_q} x_i(t) + v_j(t), \end{cases} \quad (24)$$

和性能指标

$$J = \sum_{i=1}^2 x_i(T) - \sum_{j=1}^2 y_j(T). \quad (25)$$

对应的上述混杂博弈系统的参数设为 $\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0.04, \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0.05, \beta_{11} = \beta_{21} = 0.09, \beta_{12} = \beta_{22} = 0.08$ 以及系统的初始值为 $x_{10} = x_{20} = y_{10} = y_{20} = 1000, M_0 = N_0 = 100, u_* = 25, u^* = 50, v_* = 20, v^* = 40, T = 6$. 事件驱动策略设定为

$$(E_x, E_y) = ((E_{x0}, E_{x1}), (E_{y0}, E_{y1})) = \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right).$$

则按照本文的理论分析结果和文献[5]的基本理论, 可

以得到变招时刻为 $t_1 = 2.5$, 对应博弈系统的纳什均衡解 (U^*, V^*) 需要满足

$$u_1^*(t) = u_2^*(t) = \begin{cases} 50, & t \in [0, 1.5] \cup (2.5, 3], \\ 25, & t \in (1.5, 2.5] \cup (3, 6] \end{cases}$$

和

$$v_1^*(t) = v_2^*(t) = \begin{cases} 40, & t \in [0, 4], \\ 20, & t \in (4, 6]. \end{cases}$$

注12 从例3可以看出, 在事件驱动策略固定的前提下, 混杂博弈系统的纳什均衡的存在性与变招发生的时刻以及最优连续控制输入有关系.

4 结论和展望

本文对基于事件驱动的混杂动态博弈系统的均衡问题进行了研究. 在建立系统的状态空间模型和策略型表达式的基础上, 分析了事件驱动控制在混杂动态博弈演化中的作用和意义, 给出了传统意义上的纳什均衡的定义. 进而, 针对事件驱动变化的混杂动态博弈系统和事件策略固定的混杂动态博弈系统, 分别对纳什均衡的存在性进行了分析, 展示出混杂动态博弈系统在一定条件下纳什均衡的特点. 最后通过应用分析展示了分析结果的可行性.

然而, 混杂动态博弈的研究尚处于起步阶段. 本文的主要研究也主要是结合Lanchester方程, 在一定假设条件的基础上对两类特殊的混杂动态博弈系统的均衡问题进行研究. 仅仅考虑了理性的博弈决策方遵守一致预测的情况, 没有给出一般性的结论. 基于此, 针对于混杂动态博弈系统的建模、分析、控制和应用问题, 未来的研究工作具体包括:

1) 如何较好地描述内在演化规律和结构特征并建立模型是混杂动态博弈首要解决的问题. 近年来, 网络科学的发展及不对称博弈方向的深入研究, 为探讨具有大策略集和多阶段数的混杂动态博弈的演化特征提供了启发和借鉴. 一方面, 针对连续动态博弈, 文献[26]建立了基于Lanchester方程的两阶段攻防对抗博弈系统的网络化模型. 针对逻辑层面的动态博弈, 文献[27]给出了考虑每个节点的演化方程, 建立了表述其演化特征的逻辑动态模型, 给出了切换拓扑的网络演化博弈的代数空间描述. 2020年, 梅森·波特指出多层时序网络已成为未来网络科学的研究热点之一^[28]. 由此, 网络科学的发展为探讨更复杂的混杂动态博弈系统的内在规律和演化特征并建立更准确的模型提供了启发和借鉴.

2) 博弈分析的目的是预测博弈的结果. 由于大策略集和多阶段数的影响, 混杂动态博弈对阵局势更为重要, 纳什均衡的达到应当是在多次博弈后通过动态调整才能达到的, 具有“相对性”和“动态性”. 同时,

在多阶段演化中, 博弈决策双方产生不理性决策, 使得传统的一致预测条件不再成立, 这就需要给出“理性”决策主体一致性预测成立条件, 这样才能混杂动态博弈研究目的与任务, 这是实现混杂博弈控制的基本条件, 也是设计最优策略求解的关键前提。

3) 混杂动态博弈典型特点就是具有较大的策略集和阶段数, 这必然会给最优策略的设计和求解带来极大的困难, 因此需要通过网络节点评估和拓扑结构分析, 研究给出网络演化模型中重要节点的判别条件, 设计消除失效策略的剪枝搜索方法并对大策略集空间简化, 是混杂动态博弈理论研究的另一关键突破。同时, 需要注意的时, 在混杂动态博弈的网络演化中, 网络中多个个体之间需要互相通信和信息交互, 这样才能够实现博弈态势的监测和获取。当出现不完全的不对称信息时, 博弈双方的决策状态会受到影响, 从理论角度, 就需要对衡量博弈双方获得信息的能力进行量化并在模型中体现, 而从算法角度, 就需要对演化稳定策略的求解进行算法设计, 当前, 分布式优化^[31-32]和强化学习技术^[33]为复杂博弈问题的研究提供了算法方面的借鉴, 但这也对本文研究的混杂动态博弈在理论和算法学方面的研究提出了新挑战。

4) 混杂动态博弈的理论体系的完善离不开应用验证。现代物流系统^[29-30]规模大且结构度复杂, 是以离散事件为主的复杂的连续-离散事件相统一的混杂动态系统。特别是, 物流供需博弈演化具有混杂动态特性, 考虑供应量、需求量、供需速度、物流供需信息因素的影响, 构建以需求方和供给方为决策主体、以利益最大化为供需目的的网络化混杂动态博弈模型; 实现物流供需博弈系统的分析和求解, 进而, 通过建立网络演化仿真平台, 实现对物流供需博弈的求解和应用验证, 不断丰富和更新混杂动态博弈系统分析和控制的理论和方法体系。

参考文献:

- [1] LI Dengfeng. *Differential Game and Its Applications*. Beijing: National Defense Industry Press, 2000.
(李登峰. 微分对策及其应用. 北京: 国防工业出版社, 2000.)
- [2] XU Xinhe, ZHENG Xinying. Card and board games and event game theory. *Control and Decision*, 2007, 22(7): 787 – 790.
(徐心和, 郑新颖. 棋牌游戏与事件对策. 控制与决策, 2007, 22(7): 787 – 790.)
- [3] CHENG Daizhan, LIU Zequn. Application of semi-tensor product of matrices to finite games. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(11): 1812 – 1819.
(程代展, 刘泽群. 有限博弈的矩阵半张量积方法. 控制理论与应用, 2019, 36(11): 1812 – 1819.)
- [4] XU Xinhe, SHI Hongyan. A case study: air fight problem and hybrid game. *Proceedings of 19th Chinese Control and Decision Conference*. Shenyang: Northeastern University Press, 2007: 913 – 916.
(徐心和, 石鸿雁. 一个空战实例中的混合对策问题. 第19届中国控制与决策学术年会. 沈阳: 东北大学出版社, 2007: 913 – 916.)
- [5] CHEN Xiangyong, JING Yuanwei, LI Chunji. Optimal control of warfare hybrid dynamic system based on Lanchester equation. *Systems Engineering Theory & Practice*, 2013, 33(10): 2631 – 2638.
(陈向勇, 井元伟, 李春吉. 基于Lanchester方程的作战混合系统最优控制. 系统工程理论与实践, 2013, 33(10): 2631 – 2638.)
- [6] CHEN Xiangyong, JING Yuanwei, LI Chunji. Optimal variable tactic control of warfare hybrid dynamic system based on Lanchester equation. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(6): 773 – 777.
(陈向勇, 井元伟, 李春吉. 基于Lanchester方程的作战混合动态系统最优变招控制. 控制理论与应用, 2012, 29(6): 773 – 777.)
- [7] CHENG D Z, QI H S, LI Z Q. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach*. London: Springer, 2011.
- [8] CHENG D Z, LIU T T. From Boolean game to potential game. *Automatica*, 2018, 96: 51 – 60.
- [9] SU Q, MCAVOY A, WANG L, et al. Evolutionary dynamics with game transitions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2019, 116(51): 25398 – 25404.
- [10] SLIVER D, HUANG A, MADDISON J, et al. Mastering the game of go with deep neural networks and tree search. *Nature*, 2016, 529(7587): 484 – 489.
- [11] LANCTOT M, ZAMBALDI V, GRUSLYS A, et al. A unified game-theoretic approach to multiagent reinforcement learning. *Proceeding of 31st Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2017)*. Long Beach, CA, USA: IEEE, 2017: 1 – 14.
- [12] CHENG D Z, XU T, QI H S. Evolutionarily stable strategy of networked evolutionary games. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(7): 1335 – 1345.
- [13] ZHANG J, LOU J, QIU J, et al. Dynamics and convergence of hyper-networked evolutionary games with time delay in strategies. *Information Sciences*, 2021, DOI: 10.1016/j.ins.2021.02.033.
- [14] KNEELAND T. *Bounded rationality in games: theory, experiments, and applications*. The University of British Columbia, 2013.
- [15] WANG Xianjia, QUAN Ji, LIU Weibing. Study on evolutionary games and cooperation mechanism within the framework of bounded rationality. *Systems Engineering Theory & Practice*, 2011, 31(S1): 82 – 93.
(王先甲, 全吉, 刘伟兵. 有限理性下的演化博弈与合作机制研究. 系统工程理论与实践, 2011, 31(S1): 82 – 93.)
- [16] GUPTA A. *Equilibria in finite games*. University of Liverpool, 2016.
- [17] MYERSO R B, RENY P J. Perfect conditional ϵ -equilibria of multi-stage games with infinite sets of signals and actions. *Econometrica*, 2020, 88(2): 495 – 531.
- [18] REDDY P V, ZACCOUR G. Open-loop and feedback Nash equilibria in constrained linear-quadratic dynamic games played over event tree. *Automatica*, 2019, 107: 162 – 174.
- [19] WANG L, GAO H, LIN C. Strongly strategic support of cooperative solutions for games over event trees. *Operations Research Letters*, 2020, 48: 61 – 66.
- [20] FRIHAUF P, KRSTIC M, BASAR T. Nash equilibrium seeking in noncooperative games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(5): 1192 – 1207.
- [21] YE M J, HU G Q. Distributed seeking of time-varying Nash equilibrium for non-cooperative games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(11): 3000 – 3005.
- [22] YE M J, HU G Q, LEWIS F L, et al. A unified strategy for solution seeking in graphical N-coalition noncooperative games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(11): 4645 – 4652.
- [23] ZHU Y N, YU W W, REN W, et al. Generalized Nash equilibrium seeking via continuous-time coordination dynamics over digraphs. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021, 8(2): 1023 – 1033.

- [24] WANG Q N, ZHANG W. An empirical study on the Lanchester model of combat for competitive advertising decisions. *European Journal of Operational Research*, 2007, 183(2): 871 – 881.
- [25] ZHU Meng, WANG Hong. Applied research on the investment allocation of public transit with Lanchester competition model. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2014, 53(6): 159 – 164.
(朱萌, 汪泓. Lanchester竞争模型及其在公共交通投资中的应用. 中山大学学报, 2014, 53(6): 159 – 164.)
- [26] HOHZAKI R, HIGASHIO T J. An attrition game on a network ruled by Lanchester square law. *Journal of the Operational Research Society*, 2016, 67(5): 691 – 707.
- [27] ZHAO G D, WANG Y Z. Formulation and optimization control of a class of networked evolutionary games with switched topologies. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2016, 22: 98 – 107.
- [28] PORTER M A. Nonlinearity + Networks: A 2020 Vision. KEVREKIDIS P, CUEVAS-MARAVAR J, SAXENA A. (eds.) *Emerging Frontiers in Nonlinear Science. Nonlinear Systems and Complexity*, 2020, 32: 131 – 159.
- [29] ZHANG Xufeng. *Modeling and Simulation of Complex Logistics Network System*. Beijing: China Fortune Press, 2012.
(张旭凤. 复杂物流网络系统建模与仿真. 北京: 中国财富出版社出版, 2012.)
- [30] ZHAO Lindu. *Game Theory of Logistics System*. Beijing: China Science Publishing, 2019.
(赵林度. 物流系统博弈论. 北京: 科学出版社, 2019.)
- [31] YE M J, YIN L, WEN G H, et al. On distributed Nash equilibrium computation: hybrid games and a novel consensus-tracking perspective. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, DOI: 10.1109/TCYB.2020.3003372.
- [32] FANG X, WEN G H, HUANG T W, et al. Distributed Nash equilibrium seeking over markovian switching communication networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, DOI: 10.1109/TCYB.2020.3030824.
- [33] WEN G H, FU J, DAI P, et al. DTDE: A new cooperative multi-agent reinforcement learning framework. *The Innovation*, 2021, 2(4): 100162.

致谢

祝贺中国自动化学会控制理论专业委员会(TCCT)成立60周年. 同时, 诚挚的向中国机器博弈事业开拓者、东北大学徐心和教授(1940–2019年)致敬, 感谢您开创的事件动态对策理论为本文的研究和完成奠定基础.

作者简介:

陈向勇 博士, 副教授, 硕士生导师, 中国自动化学会TCCT物流系统智能优化与控制学组秘书长, 目前研究方向为复杂系统与复杂网络控制与优化、博弈论及应用研究, E-mail: cxy8305@163.com;

曹进德 博士, 教授, 博士生导师, 中国自动化学会TCCT专委会委员, 目前研究方向为复杂系统与复杂网络的理论与应用、神经网络及其动力学分析, E-mail: jdcao@seu.edu.cn;

赵峰 博士, 副教授, 目前研究方向为复杂系统建模与控制、随机系统控制等, E-mail: fzhao1986163@163.com;

姜晓伟 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为网络化系统的分析和控制, E-mail: jxw07045136@126.com.