

高阶滑模控制理论综述

刘 陆^{1,2}, 丁世宏^{1†}, 李世华²

(1. 江苏大学 电气信息工程学院, 江苏 镇江 212013;

2. 东南大学 复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室, 江苏 南京 210096)

摘要: 滑模控制方法因其结构简单且对系统不确定及外部扰动具有良好的鲁棒性受到人们的广泛关注. 因此, 目前正处于飞速发展阶段. 首先, 本文回顾了滑模控制理论的起源, 简单介绍了传统一阶滑模控制方法的发展; 其次, 列举了几种常用的二阶滑模控制方法, 并介绍了其工作原理; 接着, 总结了高阶滑模控制理论的研究现状, 主要包括齐次性算法和继电-多项式算法的研究成果; 最后, 结合高阶滑模控制方法中需要克服的问题, 讨论了未来可能的研究方向.

关键词: 高阶滑模; 齐次算法; 继电-多项式算法; 智能滑模; Lyapunov方法

引用格式: 刘陆, 丁世宏, 李世华. 高阶滑模控制理论综述. 控制理论与应用, 2022, 39(12): 2193 – 2201

DOI: 10.7641/CTA.2022.10804

A survey for high-order sliding mode control theory

LIU Lu^{1,2}, DING Shi-hong^{1†}, LI Shi-hua²

(1. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang Jiangsu 212013, China;

2. Key Laboratory of Measurement and Control of Complex Systems of Engineering, Ministry of Education, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

Abstract: The sliding mode control method has been paid much attention due to its simple structure and good robustness to system uncertainty and external disturbance. Therefore, it is in a stage of rapid development. Firstly, the survey reviews the origin of sliding mode control theory and briefly introduces the development of traditional first-order sliding mode control method. Secondly, we list several commonly used second-order sliding mode control methods, and then introduce their working principles. Next, the research status of high-order sliding mode control theory is summarized, mainly including the research results of the homogeneous algorithm and the relay-polynomial algorithm. Finally, combining with the problems that need to be overcome, the future outlook of high-order sliding mode control method is discussed.

Key words: high order sliding mode; homogeneous algorithm; relay-polynomial algorithm; intelligent sliding mode; Lyapunov method

Citation: LIU Lu, DING Shihong, LI Shihua. A survey for high-order sliding mode control theory. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(12): 2193 – 2201

1 引言

滑模控制系统是一类特殊的变结构系统. 早在20世纪50年代, 前苏联工程师就已将变结构思想应用于实际系统, 并且取得了良好的控制效果. 后来, 控制论专家Emelyanov, Utkin等学者对该控制思想产生了浓厚的兴趣, 并从数学的角度对其进行了刻画和解释, 首次提出了滑模控制理论这一概念^[1-2]. 滑模控制的本质是使在规定的开关流形(滑模面)附近, 受控状态

轨迹的速度矢量总是指向开关流形. 这种运动形式是通过施加破坏性(非连续)控制行为来诱导产生的, 一般以开关控制策略的形式出现. 通过上述控制作用, 从空间任意一点出发的状态轨迹都能够在有限时间内到达滑模面(到达阶段), 并沿着滑模面运动至平衡点(滑动模态阶段). 值得一提的是, 只有当系统状态始终满足滑模动力学时, 理想的滑动模态才存在. 通常来说, 需要一个无限切换的开关方程才能确保滑动模

收稿日期: 2021-08-26; 录用日期: 2022-02-24.

†通信作者. E-mail: dsh@ujs.edu.cn; Tel.: +86 511-88787773.

本文责任编辑: 孙健.

国家自然科学基金项目(62103170, 61973142), 江苏省自然科学基金项目(BK20210745), 江苏高校优势学科建设工程, 东南大学复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室开放课题项目(MCCSE2021A03)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62103170, 61973142), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20210745), the PAPD of Jiangsu Higher Education Institutions and the Open Project Fund of Key Laboratory of Measurement and Control of Complex Systems of Engineering, Ministry of Education, Southeast University (MCCSE2021A03).

态存在.

得益于开关方程的非连续特性,滑模控制方法在应对参数摄动、未建模动态以及外部扰动等不确定性时具有强鲁棒性的特点.因而,自滑模控制理论成立以来,学者们对其进行了大量的理论与应用研究,文献[3-4]介绍了滑模控制理论形成初期的不同发展阶段及发展趋势,为滑模控制方法早起的发展提供了方向指导.进入21世纪以来,随着计算机行业的飞速发展,利用计算机的在线学习能力完成控制作用逐渐走进人们的视野.为此,文献[5]着重介绍了基于软计算技术的滑模控制理论的发展过程,并展望了其未来的发展趋势.在过去的十年中,研究表明,通过事件触发抽样取代时间抽样,可以提高抽样系统的整体性能.基于此,文献[6]介绍了不同的事件触发滑模控制策略的设计方法,并分析了它们的优缺点.另外,截至2021年10月25日,通过谷歌学术搜索关键词“sliding mode control”,有192万条结果,这也从侧面反映出滑模控制理论是非线性控制领域中的一个新的研究热点.

早期的滑模控制算法是基于线性滑模面构造的.例如,一般单输入-单输出线性系统可等价转化为可控标准型 $\dot{x} = Ax + Bu$,这里 $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $u \in \mathbb{R}$ 为系统输入,矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$B = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^n.$$

基于线性滑模面 $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$, $c_i > 0$,可设计常值切换的滑模控制器 $u = -\beta \cdot \text{sgn}(s)$,控制增益 β 是一个充分大的常数,以满足系统镇定的要求.进而,为了减弱扰动对闭环系统的影响,学者们提出了基于等效控制理论的滑模控制算法,该算法一般为 $u = u_{\text{eq}} + u_s$ 的形式, u_{eq} 用来消除扰动对系统的影响, u_s 为切换控制项.显而易见,由于用专门的等效控制项来处理系统扰动,所以其切换项增益可以很小,从而能够避免过大的抖振问题.但是,如前文所述,只有当系统处于滑动模态时,才对满足匹配条件的外界干扰、模型不确定性和未建模动态具有不变性,这说明,在早期的滑模控制器设计中,“到达阶段”并不具有强鲁棒性^[7].为了更充分研究“到达阶段”的特性,我国学者高为炳院士等^[8]率先提出了趋近律的概念,列举了诸如等速趋近律、指数趋近律、幂次趋近律直到一般趋近律,系统的阐述了“到达阶段”的动态特性.另外,文献[9]提出了一种积分滑模控制方法,直接避免了传统滑模控制中的“到达阶段”,使得系统从初始时刻即

具有较强的鲁棒性,并将其应用于伺服电机系统、机械臂系统的控制器设计.但是,文献[9]所给出的滑模控制方法对系统模型要求较高,它要求被控对象的标称模型必须满足最小相位特性,限制了该方法的应用范围.为了克服这一局限性,文献[10]将文献[9]中的方法进行了推广,提出了一种新的积分滑模控制方法,解决了标称部分为非最小相位系统的滑模控制器设计问题.此外,文献[11]提出了一种基于积分滑模的状态或干扰估计方法,并给出了闭环系统的性能分析.而且,文献[12]还针对不满足匹配条件的非确定性系统提出了一种鲁棒滑模控制方法.注意到,基于传统线性滑模面的滑模控制方法,系统状态最快只能按指数收敛律渐近收敛到原点,即系统状态不可能在有限时间内收敛.

考虑到有限时间控制系统具有两个显著优点:一方面,有限时间控制可使系统状态有限时间收敛,而状态的有限时间收敛从理论上来说是时间最优的;另一方面,与渐近收敛系统相比,有限时间收敛系统往往具有更好的抗干扰性能^[13].为此,Yu、Man等学者构造了非线性滑模面 $\dot{x} + cx^{q/p} = 0$,其中 $c > 0$, p 和 q 是正奇数且满足 $p > q$,并在此基础上提出了终端滑模的概念^[14],使系统状态在到达滑模面之后可以沿着滑模面在有限时间内收敛到原点.然而,利用终端滑模方法进行控制器设计时涉及对 $x^{q/p}$ 的求导,由于 $0 < q/p < 1$,求导后将会产生奇异性问题.为此,文献[15]对文献[14]中的终端滑模进行了改进,并将终端滑模中的滑模面改进为 $\dot{x}^{p/q} + c^{p/q}x = 0$,提出了非奇异终端滑模控制方法,由于这里的 $p/q > 1$,此时对滑模面求导不会带来奇异性问题.此外,文献[16]将文献[15]中终端滑模面参数 p/q 推广为特定区间上的任意实数.

值得注意的是,上述滑模控制方法都是基于连续时间系统提出的.但如前文所述,进入21世纪以来,随着计算机行业的飞速发展,利用计算机采样实现控制算法已逐步代替传统的机械结构控制手段.而计算机采样控制的第一步就是将连续系统离散化,且上述滑模控制的有限时间收敛性质在离散条件下不再成立.因此,研究离散时间下的滑模控制设计与稳定性分析具有重要的实际意义.基于上述考虑,学者们提出了两类离散滑模设计方法.一类是对连续时间域中的滑模控制器直接进行离散化处理,即类似于传统滑模控制理论,滑模控制器的设计是在连续时间域中完成的.在该思想下,文献[17-18]在等效控制的基础上,分别针对单输入系统和多输入系统进行了离散滑模控制设计与分析.进而,文献[19]基于终端滑模控制方法,证明了离散终端滑模的有限时间稳定性,并给出了系统的显式有界性与控制参数的关系.文献[20]基于标准超螺旋算法,引入齐次系统理论设计了离散超螺旋控制方法,并从理论上分析了影响该方法控制精度的

因素. 另一类则是先对被控对象的模型进行离散化处理, 然后在离散时间域中进行控制设计. 由于该类方法与连续时间域中的控制设计区别较大, 我国学者高为炳先生在研究了拟滑动模态和拟滑动模带的基础上, 重新针对离散系统建立了趋近律的趋近条件^[21]. 另外, 针对离散系统的扰动估计问题, 文献[22–23]提出了含有扰动补偿的离散趋近律, 从而进一步提高了离散滑模的控制精度. 进而, 考虑到高阶系统的抗干扰问题, 文献[24–25]在传统微分器的基础上提出了离散微分器, 为以后的离散高阶滑模控制研究提供了基本工具.

尽管滑模控制器的非连续特性能够有效地抑制干扰对系统的影响, 使系统状态能够沿着滑模面运动至平衡点. 但受非连续控制影响, 当系统状态到达滑模面之后, 并非严格沿着滑模面滑动到平衡点, 而是在滑模面两侧来回穿越、移动, 导致系统产生抖振问题^[26–28]. 不仅如此, 由于被控对象越来越复杂, 不可避免会存在一些滞后环节、惯性环节, 以及系统本身的离散性, 这是导致系统存在抖振的又一重要原因. 现有的处理抖振方法主要包括边界层方法^[29]、模糊方法^[30]、扰动补偿方法^[31]等. 但是, 几乎所有削弱抖振的方法都是以牺牲系统的鲁棒性能为代价^[32]. 因而, 如何在不影响系统性能的前提下减小抖振带来的负面影响是滑模控制理论学者需要解决的核心问题. 另外, 利用传统滑模理论进行控制器设计时, 滑模面的相对阶要求为一阶, 即控制输入必须显式地出现在滑动变量的一阶导数中. 显然, 该要求严格限制了滑模面的选择与设计, 成为了滑模控制理论发展中的一个严重问题. 虽然这些问题到目前为止还没有完美的解决方案, 但是, 学者们针对上述问题已经提出了各种方法, 并且考虑了与其他研究方法整合来解决上述问题, 如: 智能算法. 其中, 本文展开讨论的高阶滑模控制方法, 可以在不影响系统鲁棒性的前提下, 解决传统滑模中存在的抖振和相对阶限制问题.

2 高阶滑模的定义及常用工具

滑模控制的主要目的是选择一个合适的约束函数, 当系统状态处于滑动模态阶段时, 该约束函数能够收敛到零. 因此, 可以利用约束函数的光滑程度来对滑模进行分类. 更确切地说, 定义滑模面为滑动变量为零的形式(滑动变量一般是状态和时间的平滑函数, 这里用 s 表示), 即 $s = 0$, 并让它与非连续系统的Filippov轨迹^[33]保持一致. 显然, 由于在滑动模态上滑动变量为零, 则研究滑动变量是没有意义的. 此时, 可以通过对滑动变量求导进行分类, 直至 $s^{(r)}$ 在滑动模态轨迹的小临域内包含不连续, 需要指出的是, 这里的 r 为常数, 表示滑动变量的相对阶数. 综上, 可将高阶滑模的定义总结如下:

定义1 考虑一个非连续微分方程

$$\dot{x} = f(x), \quad s = s(x) \quad (1)$$

满足Filippov提出的“平均”意义下的解, s 为光滑输出函数. 假如满足如下条件:

- 1) 全阶导数 $\dot{s}, \dots, s^{(r-1)}$ 是状态 x 的连续函数;
- 2) 集合

$$s = \dot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0 \quad (2)$$

非空且包含Filippov轨迹, 则在集合(2)上的运动称为 r 阶滑模.

由于非连续系统(1)不满足Lipschitz条件, 所以该系统的解无法利用传统的微分方程理论来描述. 针对这一问题, Filippov借助微分包含理论, 提出了“平均”意义下的解, 本文所考虑的非连续滑模控制系统的解都是“平均”意义下的Filippov解. 详细的解释, 请参考文献[33–34].

接下来给出高阶滑模控制设计中常用的齐次度概念.

定义2^[35] 对于固定坐标系 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 以及实数 $m_1, \dots, m_n > 0$, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$f_i(\varepsilon^{m_1} x_1, \dots, \varepsilon^{m_n} x_n) = \varepsilon^{k+m_i} f_i(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

其中 $k \in \mathbb{R}$ 且 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 则向量 $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的齐次度为 k ; 类似地, 若扩展向量 $f(x, u)$ 满足

$$f_i(\varepsilon^{m_1} x_1, \dots, \varepsilon^{m_n} x_n, \varepsilon^{m_{n+1}} u) = \varepsilon^{k+m_i} f_i(x, u),$$

则其满足齐次性; 同理, 若

$$V(\varepsilon^{m_1} x_1, \varepsilon^{m_2} x_2, \dots, \varepsilon^{m_n} x_n) = \varepsilon^k V(x)$$

成立, 则函数 $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的齐次度为 k .

3 几类二阶滑模控制方法

尽管早在20世纪末, 文献[36]就提出了早期的高阶滑模控制算法, 并给出了详细的算法分析结果, 而且Levant也于1987年在他的博士论文中首次系统地提出了高阶滑模的概念^[37]. 但由于该算法理论上尚有缺陷, 如对滑动模态的估计尚未解决, 所以该理论在当时并未引起重视. 此后, 文献[38]基于齐次性理论, 解决了滑动模态的估计问题. 另外, 在1994年变结构控制与Lyapunov技术专题讨论会上, Fridman和Levant介绍的高阶滑模控制理论引起了研究者的极大兴趣^[39]. 至此, 高阶滑模控制理论终于得到了应有的关注, 很多学者开始将研究兴趣转移到高阶滑模控制理论及应用方面^[40–42].

文献[36]给出了最简单的二阶滑模控制算法, 即现在的螺旋算法. 后来, 文献[43]将螺旋算法推广至超螺旋算法, 其优点在于不需要滑动变量导数信息的情况下也能达到有限时间收敛. 但由于上述超螺旋算法只能在单输入单输出系统中使用, 文献[44]基于已知

单输入情况,设计了一种多输入的超螺旋算法.尽管超螺旋算法是二阶滑模控制方法,但其只能处理相对阶数为1的系统.因此,文献[45]设计了一种新的超螺旋算法来应对系统相对阶数大于1时的情况.文献[46]提出的次优算法是另一种常用的二阶滑模控制方法,该方法是基于时间最优控制发展而来的.另外,为了削弱系统抖振的影响,文献[47]提出了准连续二阶滑模的概念,其优势在于控制信号在除了平衡点处的其他区域均连续.从实际角度来看,由于实际系统往往不可能被控制到原点,因此利用准连续方法是可以避免抖振问题的.与螺旋算法类似,准连续算法也需要连续测量滑动变量和其导数的信息.为了克服这一问题,文献[48]提出了一种具有任意阶渐近最优鲁棒性的微分器,为后续的高阶滑模控制设计与应用提供了一个基本工具.

经过几十年的研究,二阶滑模作为最简单的高阶滑模,其理论已日趋完善.下面就简单介绍几种常用的二阶滑模控制方法.

首先,考虑如下非线性系统:

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u, \quad (3a)$$

$$s = s(t, x), \quad (3b)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $u \in \mathbb{R}$ 为控制输入, $f(t, x)$ 和 $g(t, x)$ 为未知光滑非线性函数. 假设滑动变量 s 和 $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ 已知, 滑动变量 s 的相对阶为2, 且该系统的解为 Filippov“平均”意义下的解.

沿系统(3a)对滑动变量(3b)求二阶导数可得

$$\ddot{s} = f(t, x) + g(t, x)u, \quad (4)$$

其中 $f(t, x) = \ddot{s}|_{u=0}$ 和 $g(t, x) = \frac{\partial \ddot{s}}{\partial u} > 0$ 为未知光滑函数. 通常, 上述未知光滑函数满足如下假设:

假设 1 存在正常数 K_m, K_M 和 C 使得

$$|f(t, x)| \leq C, \quad K_m \leq g(t, x) \leq K_M.$$

3.1 螺旋算法

螺旋算法的控制器形式如下:

$$u = -k_1 \operatorname{sgn}(s) - k_2 \operatorname{sgn}(\dot{s}), \quad (5)$$

其中控制参数需满足

$$(k_1 + k_2)K_m - C > (k_1 - k_2)K_M + C,$$

$$(k_1 - k_2)K_m > C.$$

在控制器(5)作用下, 滑模变量 $(s, \dot{s})$ 将以螺旋的形式有限时间趋于零, 故取名为螺旋算法, 其轨迹如图1所示.

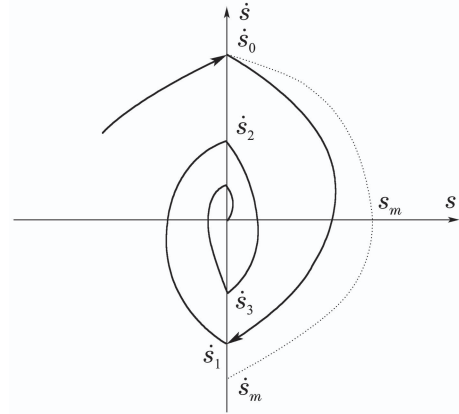


图1 螺旋算法(5)作用下 $s-\dot{s}$ 的相平面轨迹
Fig. 1 The phase $s-\dot{s}$ under twisting controller (5)

图中 $\dot{s}_0, \dot{s}_1, \dot{s}_2$ 是相轨迹与轴线 $s = 0$ 相交的点. 显然 $|\dot{s}_1| \leq |\dot{s}_m|$, 且 $|\dot{s}_1|/|\dot{s}_0| = q_1 < 1$. 由此类推, 将轨迹延伸到负半平面 $s < 0$, 可确保不等式 $|\dot{s}_{i+1}|/|\dot{s}_i| \leq q_1 < 1$ 成立. 同理, 存在一个 $q_2 \in (0, 1)$, 使得 $|s_{i+1}|/|s_i| \leq q_2$. 显然, 这些条件可以保证闭环系统的收敛性能. 详细证明见文献[36].

3.2 次最优算法

次最优算法是由双积分系统的时间最优控制方法演变而来^[49], 其最大特点为收敛区域能够预先设定. 次最优算法的控制器形式如下:

$$u = -k_1 \operatorname{sgn}(s - s^*/2) + k_2 \operatorname{sgn}(s^*), \quad (6)$$

其控制参数需满足

$$k_1 - k_2 > \frac{C}{K_m}, \quad k_1 + k_2 > \frac{4C + K_M(k_1 - k_2)}{3K_m},$$

s^* 为 $\dot{s} = 0$ 时对应的 s 值, 其初始值为0. 系统相平面轨迹如图2所示.

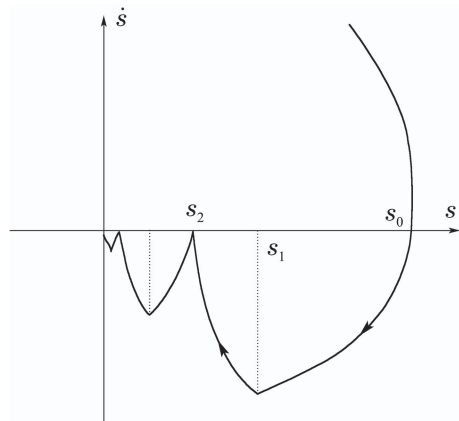


图2 次最优算法(6)作用下 $s-\dot{s}$ 的相平面轨迹
Fig. 2 The phase $s-\dot{s}$ under suboptimal controller (6)

显然, 次最优算法实现的前提是 s 及其导数 $\dot{s}$ 已知. 另外, 由于计算机采用离散采样的形式进行计算, 使用计算机实现次最优算法时只需要知道每个采样点上 s 及 $\dot{s}$ 的具体信息. 通常情况下, 当连续两个采样点

间滑模变量的误差 Δs 改变符号时, 可认为 $\dot{s} = 0$. 此时, 通过计算, 可以得到次最优控制器所需的 s 及 s^* 信息. 详细证明见文献[49].

3.3 准连续算法

上述二阶滑模算法均是由符号函数构成, 会引起系统抖振. 为削弱抖振, 文献[50]提出了一种准连续的二阶滑模控制器

$$u = -\beta_2 \frac{\dot{s} + \beta_1 [s]^{\frac{1}{2}}}{|\dot{s}| + \beta_1 |s|^{1/2}}, \quad (7)$$

这里 $[\cdot]^\alpha = |\cdot|^\alpha \operatorname{sgn}(\cdot)$, 下文同样适用, 其参数满足

$$\beta_1, \beta_2 > 0, \beta_2 K_m - C > 0,$$

$$\beta_2 K_m - C - 2\beta_2 K_m \frac{\beta_1}{\rho + \beta_1} - \frac{1}{2}\rho^2, \rho > \beta_1.$$

对于充分大的 β_2 , 存在常数 $\rho_1, \rho_2: 0 < \rho_1 < \beta_1 < \rho_2$, 可使系统状态轨迹在有限时间内进入由曲线 $\dot{s} + \rho_1 [s]^{\frac{1}{2}} = 0$ 和 $\dot{s} + \rho_2 [s]^{\frac{1}{2}} = 0$ 构成的区域(虚线部分)且不会逃离, 如图3所示.

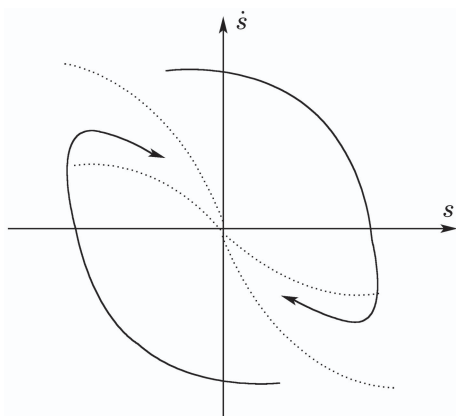


图3 准连续二阶滑模算法(7)作用下 s - $\dot{s}$ 的相平面轨迹
Fig. 3 The phase s - $\dot{s}$ under quasi-continuous controller (7)

3.4 超螺旋算法

对传统二阶滑模算法来说, 大部分算法需要假设 $\dot{s}$ 已知. 然而, 大多情况下无法得到 $\dot{s}$ 的精确值. 针对该问题, Levant提出了超螺旋算法[43].

沿系统(3a)对式(3b)中定义的滑模变量 s 求导可得

$$\dot{s} = f'(t, x) + g'(t, x)u, \quad (8)$$

其中 $f'(t, x)$ 和 $g'(t, x)$ 为未知光滑函数, 满足假设:

假设2 存在正常数 $K'_m, K'_M, U_{\max}, q \in (0, 1)$ 和 L 使得

$$|f'(t, x)| + U_{\max}|g'(t, x)| \leq L,$$

$$K'_m \leq g'(t, x) \leq K'_M,$$

$$|f'(t, x)/g'(t, x)| < qU_{\max}.$$

则超螺旋控制器可以设计为

$$u = -k_1 [s]^{\frac{1}{2}} + u_1,$$

$$\dot{u}_1 = \begin{cases} -u, & |u| > U_{\max}, \\ -k_2 \operatorname{sgn}(s), & |u| \leq U_{\max}, \end{cases} \quad (9)$$

其参数满足

$$k_1 > \sqrt{\frac{2}{(K'_m k_2 - L)} \frac{(K'_m k_2 + L)K'_M(1+q)}{K'_m(1-q)}},$$

$$k_2 K'_m > L.$$

系统相轨迹如图4所示. 点 s_m 为曲线与轴 $\dot{s} = 0$ 的交点, 且 $2(K'_m k_2 - L)s_m = \dot{s}_0^2$. 通过计算可知 $\dot{s}_m = -\frac{2}{k_1}(\frac{L}{K'_m} + k_2)s_m^{1/2}$, 可得 $|\dot{s}_m/\dot{s}_0| < 1$. 由于 $|\dot{s}_1| \leq |\dot{s}_m|$, 所以 $|\dot{s}_1/\dot{s}_0| < 1$ 成立. 重复上述步骤, 可确保不等式 $|\dot{s}_{i+1}/\dot{s}_i| < 1$ 成立. 同理, 不等式 $|s_{i+1}/s_i| < 1$ 也成立. 因此, 闭环系统是有限时间稳定的, 详细证明见文献[43].

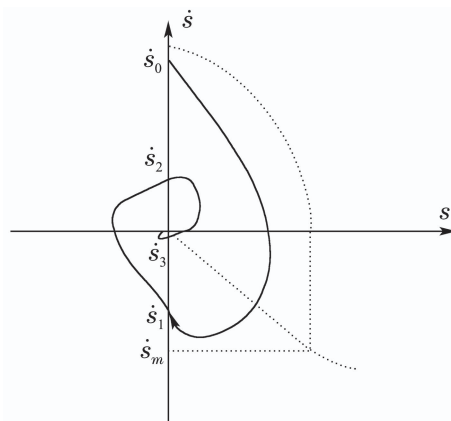


图4 超螺旋算法(9)作用下 s - $\dot{s}$ 的相平面轨迹
Fig. 4 The phase s - $\dot{s}$ under super-twisting controller (9)

4 任意阶滑模算法

上述结果主要针对系统相对阶数为2的低阶系统, 关于相对阶大于2时的情况, 也有一些有意义的结果. 针对形如式(3)的系统, 当系统的相对阶数为 r 时, 根据定义1, 系统状态在有限时间内能达到滑模面 $s = 0$ 并具有 r 阶滑动模式

$$s = \dot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0.$$

此时有

$$s^{(r)} = f(t, x) + g(t, x)u, \quad (10)$$

其中 $f(t, x) = s^{(r)}|_{u=0}$ 和 $g(t, x) = \frac{\partial s^{(r)}}{\partial u} \neq 0$ 为未知光滑函数. 通常, 上述未知光滑函数也需满足假设1. 下面, 基于滑模动力学(10)简单介绍任意阶滑模控制方面的结果.

4.1 齐次性算法

定义 $q \in \mathbb{N}$ 且 $q > 1$. 任意阶齐次控制器的形式如下:

$$u = -\alpha \Psi_{i,r}(s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}),$$

这里的控制变量满足

$$\begin{aligned} \Psi_{i,r} &= \text{sgn}(s^{(i)} + \beta_i N_{i,r} \Psi_{i-1,r}), \quad \Psi_{0,r} = \text{sgn}(s), \\ N_{i,r} &= (|s|^{\frac{q}{r}} + |\dot{s}|^{\frac{q}{r-1}} + \dots + |s^{(r-1)}|^{\frac{q}{r-i+1}})^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

其中系数 β_i 的选取决定了收敛速率. 该控制器利用递归法构建, 控制器的参数取决于相对阶数 r 的定义, 且增益 $\alpha > 0$ 需依据 C, K_m, K_M 进行调整.

高阶滑模算法一般是基于齐次性理论构建的, 文献[51]最早提出了任意阶齐次性高阶滑模控制方法, 该方法能够在有限时间内镇定单输入单输出最小相位系统. 由于齐次性能显著简化高阶滑模控制器的结构设计问题, 文献[52-53]先后基于齐次性理论和准齐次性理论建立了具有普遍性的任意阶滑模控制方法. 另外, 受准连续方法启发, 为了削弱高阶滑模中的抖振问题, 文献[47]提出了准连续齐次性高阶滑模控制方法, 其控制形式如下:

$$u = -\alpha \Psi_{i,r}(s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}),$$

这里的控制变量满足

$$\begin{aligned} \varphi_{i,r} &= s^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} \Psi_{i-1,r}, \\ N_{i,r} &= |s^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}}, \quad \Psi_{i,r} = \frac{\varphi_{i,r}}{N_{i,r}}, \\ \Psi_{0,r} &= \frac{\varphi_{0,r}}{N_{0,r}} = \text{sgn}(s), \quad N_{0,r} = |s|, \quad \varphi_{0,r} = s. \end{aligned}$$

随后, 针对一类多输入多输出系统, 文献[54]提出了一种基于几何齐次性的高阶滑模鲁棒有限时间控制器. 为了进一步消除抖振问题, 文献[55]将超螺旋算法和几何齐次性相结合, 提出了一种连续高阶滑模控制方案, 该方案构造了一个时变控制增益以获得其最小容许值. 此外, 考虑到Lyapunov函数与鲁棒性之间的紧密联系, 文献[56]利用Lyapunov函数设计了齐次高阶滑模控制器, 并取得了理想的控制效果.

4.2 继电-多项式算法

尽管上述齐次性算法可以有效地处理相对阶数为任意值的系统, 但观察其控制器结构可以发现, 随着系统阶数增大, 控制器的复杂性会显著增加. 针对这一问题, 文献[57]基于齐次性理论提出了一种名为继电-多项式的算法, 该算法建立了闭环高阶滑模动力学的Lyapunov稳定性分析, 其控制器形式如下:

$$\begin{aligned} u &= -\alpha \text{sgn}([s^{(r-1)}]^{\frac{q}{2}} + \\ &\quad \beta_{r-1} [s^{(r-2)}]^{\frac{q}{2}} + \dots + \beta_1 [s]^{\frac{q}{2}}). \end{aligned}$$

另外, 考虑到该控制器的非连续性, 准连续继电-多项式控制器设计如下:

$$u = -\alpha \frac{[s^{(r-1)}]^{\frac{q}{2}} + \beta_{r-1} [s^{(r-2)}]^{\frac{q}{2}} + \dots + \beta_1 [s]^{\frac{q}{2}}}{|s^{(r-1)}|^{\frac{q}{2}} + \beta_{r-1} |s^{(r-2)}|^{\frac{q}{2}} + \dots + \beta_1 |s|^{\frac{q}{2}}}.$$

同样地, 继电-多项式算法中的系数 β_i 也决定了系

统的收敛速率, 且增益 $\alpha > 0$ 需依据 C, K_m, K_M 进行调整.

观察继电-多项式控制器可以看出, 控制器的项数与系统的相对阶数 r 相同. 显然, 该方法大大降低了高阶滑模控制设计的复杂性. 得益于该方法的优良性能, 文献[58]在其基础上, 提出了一种收敛时间可估计的继电-多项式算法. 进一步, 考虑到实际系统中滑模动力学(10)的输出通常会受到限制, 文献[59]将障碍函数引入继电-多项式算法中, 设计了一种能处理输出受限的高阶滑模控制方法. 在此基础上, 文献[60]将文献[59]中处理的对称输出受限拓展至非对称情形, 扩大了该算法的应用范围. 最后, 文献[61]将上述文献进行总结, 得出了一种标准的控制器, 该控制器同时能处理对称与非对称输出限制问题. 另外, 观察滑模动力学(10)的结构, 不难发现, 在对滑动变量连续求导的过程中, 不可避免的会有一些额外信息存在于滑动变量的各阶导数中. 此时, 令 $s_1 = s$, 则可将 $\dot{s}_1$ 中的信息分成一个新的滑动变量 s_2 加上额外项的情形. 重复上述步骤, 可得含有非匹配项的滑模动力学方程

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = s_2 + f_1(s_1), \\ \dot{s}_2 = s_3 + f_2(s_1, s_2), \\ \vdots \\ \dot{s}_{n-1} = s_n + f_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1}), \\ \dot{s}_n = f(t, x) + g(t, x)u, \end{cases} \quad (11)$$

这里的 $f_1(s_1), f_2(s_1, s_2), \dots, f_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1})$ 为具有下三角结构的非匹配项. 针对形如式(11)的滑模动力学, 文献[62]采用反步设计法, 给出了其二阶形式的有限时间控制方法. 文献[63]详细介绍了滑模动力学式(11)的任意阶有限时间控制设计方法. 另外, 若当非匹配项具有上三角结构时, 即动力学具有如下结构形式:

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = s_2 + f_1(s_1, \dots, s_n), \\ \dot{s}_2 = s_3 + f_2(s_2, \dots, s_n), \\ \vdots \\ \dot{s}_{n-1} = s_n + f_{n-1}(s_{n-1}, s_n), \\ \dot{s}_n = f(t, x) + g(t, x)u. \end{cases} \quad (12)$$

此时, 针对下三角结构非匹配项提出的方法将不再有效. 为了解决这一问题, 文献[64]利用饱和控制技术, 结合继电-多项式算法设计了一种有限时间控制方法, 并取得了良好的控制效果. 另外, 由于上述方法是基于齐次性理论构建的, 当滑模动力学非匹配通道中含有外部非零扰动时上述方法并不能有效解决. 考虑到这一问题, 文献[65-66]利用有限时间扰动观测器实时估计外部扰动, 提出了补偿型继电-多项式算法.

5 滑模控制方法与智能算法

注意到上述结果的控制增益均为常数, 所以只有在控制器阶数大于系统相对阶数时才具有削弱抖振的作用, 则该方法不可避免地会增加闭环系统的复杂性. 而准连续继电-多项式算法也在一定程度上牺牲了被控系统的动态性能. 为了能在不改变闭环系统稳态与动态性能的前提下有效地削弱抖振, 近十年来, 学者们开始尝试在滑模控制中引入智能算法, 如自适应算法、模糊算法、神经网络等, 利用智能算法的动态学习特性, 在线逼近系统不确定从而获取非连续控制器的时变增益, 以求将系统抖振降至最低.

早在20世纪90年代, 学者们就开始尝试利用智能方法削弱滑模控制中的抖振问题. 1995年, 美国学者Kwan首次提出将滑模算法与自适应技术相结合^[67], 并将其应用于线性系统. 然而, 由于非线性系统的复杂性, 直到本世纪初, 自适应滑模才开始逐渐应用于非线性控制领域. Chang首先针对多输入多输出系统构建了自适应滑模面, 解决了系统中存在的非匹配扰动问题^[68]. 需要指出的是, 文献[68]中自适应律给出的控制增益是单调递增的, 即控制增益只能随扰动增大而增大以确保系统稳定, 但当扰动减小时, 控制增益不会相应减小. 显然, 在这种情况下, 控制量会溢出, 导致系统产生抖振. 为了解决这一问题, Plestan和Shtessel等学者提出了一种控制增益能随扰动减小而减小的自适应滑模控制方法^[69], 并将其拓展至超螺旋算法^[70]. 然而, 上述自适应滑模中的控制增益都是随扰动变化而被动改变的, 也就是说, 每当扰动大于控制增益, 系统就会被迫从“滑动模态阶段”转变为“到达阶段”. 在这种情况下, 并不能确保系统能一直稳定. 为此, 文献[71]基于等效控制理论提出了自适应超螺旋算法, 给出了控制增益的最小值, 最大程度上削弱了抖振. 随后, 文献[72–73]在该方法的基础上构建了自适应非奇异终端滑模控制器和自适应二阶滑模控制器并应用于电动汽车系统与功率变换器系统. 事实上, 虽然通过等效控制得到的自适应方法不需要明确知道扰动的上界, 但仍需上界存在. 实际情况下, 通常无法准确获取扰动的相关信息. 针对该问题, 文献[74]提出了一种基于神经网络技术的滑模控制方法, 该方法不需要扰动的任何信息, 但缺点是前馈神经网络的在线学习时间较长. 为了优化神经网络的在线学习时间, 学者们在传统前馈神经网络的启发下, 相继提出了基于递归神经网络、径向基神经网络的滑模控制方法^[75–76]. 值得注意的是, 正如文献[5]中提到, 自适应和神经网络只是使学习和优化成为可能的过程, 而模糊系统则表示工具. 对于难以解析其模型和表示形式的复杂系统, 利用模糊系统构造一组聚合的简单模型更为有利. 随后, 这种思想在控制领域得到了广泛地应用.

近年来, 随着智能算法的飞速发展, 越来越多的学者注意到了其良好的动态性能, 并将研究方向转移到智能滑模的理论与应用方面, 主要包括自适应滑模控制方法^[77–78]、神经网络滑模控制方法^[79–80]、模糊滑模控制方法^[81–82], 以及上述方法在机械手^[83]、磁悬浮^[84]等实际系统的应用, 限于篇幅, 本文不再赘述.

6 结论

综上所述, 智能滑模算法可以在不改变系统稳态与动态性能的前提下大幅削弱抖振. 目前, 对于智能滑模算法的理论与应用研究已经取得了丰硕的成果, 但是现有的研究成果仍然存在局限性. 注意到已有智能滑模算法大部分都是基于传统一阶滑模设计的, 因此, 到目前为止, 智能高阶滑模控制设计问题仍需完善, 其问题主要包括以下两个方面:

1) 闭环系统的齐次性问题.

现有高阶滑模控制理论体系都是基于齐次性条件建立, 控制设计时需要准确的系统结构信息, 而上述智能算法无法提供该信息.

2) 非匹配不确定问题.

高阶滑模动力学方程中通常存在非匹配不确定项, 而智能算法通常无法直接动态逼近非匹配项.

尽管由于上述问题导致关于智能高阶滑模算法研究难度较大, 但为了克服高阶滑模中的抖振问题, 仍需针对智能高阶滑模展开进一步的研究. 有理由相信, 通过研究人员的坚持不懈地努力, 该课题将会得到进一步的发展.

参考文献:

- [1] EMEJANOV S V. *Automatic Control Systems with Variable Structure*. Munich: R.Oldenbourg-Verlag, 1969.
- [2] UTKIN V I. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. Moscow: Nauka, 1970.
- [3] UTKIN V I. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(2): 212 – 222.
- [4] HUNG J Y, GAO W B, HUNG J C. Variable structure control: a survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, 40(1): 2 – 22.
- [5] YU X, KAYNAK O. Sliding-mode control with soft computing: A survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(9): 3275 – 3285.
- [6] BEHERA A K, BANDYOPADHYAY B, CUCUZZELLA M, et al. A survey on event-triggered sliding mode control. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Industrial Electronics*, 2021, 2(3): 206 – 217.
- [7] LIU Xiangjie, HAN Yaozhen. Continuous higher-order sliding mode control for multi-input multi-output nonlinear uncertain system. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(9): 1236 – 1244.
(刘向杰, 韩耀振. 多输入多输出非线性不确定系统连续高阶滑模控制. *控制理论与应用*, 2016, 33(9): 1236 – 1244.)
- [8] GAO Weibing. *Variable Structure Control Theory and Design Method*. Beijing: Science Press, 1996.
(高为炳. *变结构控制的理论及设计方法*. 北京: 科学出版社, 1996.)

- [9] CHERN T, WU Y. Design of integral variable structure controller and application to electrohydraulic velocity servo systems. *IEE Proceedings D*, 1991, 138(5): 439 – 444.
- [10] WANG J, LEE T, JUANG Y. New methods to design an integral variable structure controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(1): 140 – 143.
- [11] KURKCU B, KASNAKOGLU C, EFE M O. Disturbance/uncertainty estimator based integral sliding-mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(11): 3940 – 3947.
- [12] LI Hui, XIE Jianying. Robust SMC of uncertain time-varying systems dissatisfying matching condition. *Acta Automatica Sinica*, 2001, (2): 252 – 257.
(李辉, 谢剑英. 不满足匹配条件的非确定性系统的鲁棒滑模控制. 自动化学报, 2001, (2): 252 – 257.)
- [13] POLYAKOV A, CORON J M, ROSIER L. On homogeneous finite-time control for linear evolution eqnarray in Hilbert space. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(9): 3143 – 3150.
- [14] MAN Z, YU X. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1997, 44(11): 1065 – 1070.
- [15] FENG Y, YU X, MAN Z. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 2002, 38(12): 2159 – 2167.
- [16] YU S, YU X, SHIRINZADEH B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 2005, 41(11): 1957 – 1964.
- [17] YU X, WANG B, GALIAS Z, et al. Discretization effect on equivalent control-based multi-input sliding-mode control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(6): 1563 – 1569.
- [18] WANG B, YU X, CHEN G. ZOH discretization effect on single-input sliding mode control systems with matched uncertainties. *Automatica*, 2009, 45(1): 118 – 125.
- [19] LI S, DU H, YU X. Discrete-time terminal sliding mode control systems based on Euler's discretization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(2): 546 – 552.
- [20] CHEN Weile, DU Haibo. A second-order discrete-time super-twisting control algorithm based on homogeneous system theory. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(4): 761 – 769.
(陈维乐, 都海波. 一种基于齐次系统理论的二阶离散超螺旋控制算法. 控制理论与应用, 2022, 39(4): 761 – 769.)
- [21] GAO W, WANG Y, HOMAIFA A. Discrete-time variable structure control systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, 42(2): 117 – 122.
- [22] SU W C, DRAKUNOV S V, OZGUNER U. An $O(T^2)$ boundary layer in sliding mode for sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(3): 482 – 485.
- [23] QU S, XIA X, ZHANG J. Dynamics of discrete-time sliding-modecontrol uncertain systems with a disturbance compensator. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(7): 3502 – 3560.
- [24] LIVNE M, LEVANT A. Proper discretization of homogeneous differentiators. *Automatica*, 2014, 50(8): 2007 – 2014.
- [25] BARBOT J, LEVANT A, LIVNE M, et al. Discrete differentiators based on sliding modes. *Automatica*, 2020, 112: 108633.
- [26] CHAO Hongmin, HU Yueming. Dynamical sliding mode control and its applications to output tracking of mobile robots. *Control and Decision*, 2001, 16(5): 565 – 568.
(晁红敏, 胡跃明. 动态滑模控制及其在移动机器人输出跟踪中的应用. 控制与决策, 2001, 16(5): 565 – 568.)
- [27] LIU Jinkun, SUN Fuchun. Research and development on theory and algorithms of sliding mode control. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 407 – 418.
(刘金琨, 孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与进展. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 407 – 418.)
- [28] DU H, YU X, CHEN Z, et al. Chattering-free discrete-time sliding mode control. *Automatica*, 2016, 68: 87 – 91.
- [29] SLOTINE J, SASTRY S. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulator. *Automatica*, 1983, 38(2): 465 – 492.
- [30] WANG Y, SHEN H, KARIMI H, et al. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulator. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(3): 1164 – 1176.
- [31] AGHABABA M. Sliding-mode control composite with disturbance observer for tracking control of mismatched uncertain n -DoF nonlinear systems. *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics*, 2018, 23(1): 482 – 490.
- [32] YOUNG K, UTKIN V I, OZGUNER U. A control engineer's guide to sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999, 7(3): 328 – 342.
- [33] FILIPPOV A. *Differential Eqnarrays with Discontinuous Right-Hand Side*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [34] SHTESSEL Y, EDWARDS C, FRIDMAN L, et al. *Sliding Mode Control and Observation*. Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2013.
- [35] HERMES H. Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls. *Differential Eqnarrays, Stability and Control*. New York: Dekker, 1991.
- [36] EMEL'YANOV S, KOROVIN S, LEVANT A. Second order sliding modes in controlling uncertain systems. *Soviet Journal of Computing and System Science*, 1986, 24(4): 63 – 68.
- [37] LEVANT A. *Higher Order Sliding Modes and Their Application for Controlling Uncertain Processes*. Moscow: Institute for System Studies of USSR Academy of Science, 1987.
- [38] LEVANT A. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 1998, 34(3): 379 – 384.
- [39] FRIDMAN L, LEVANT A. Higher order sliding modes as the natural phenomena of control theory. *Proceedings of the Workshop Variable Structure and Lyapunov Technique*. Benevento: IEEE, 1994, 302 – 309.
- [40] WU Yuxiang, HU Yueming. Second order dynamical sliding mode control and its application to output tracking of mobile manipulators. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(3): 411 – 420.
(吴玉香, 胡跃明. 二阶动态滑模控制在移动机械臂输出跟踪中的应用. 控制理论与应用, 2006, 23(3): 411 – 420.)
- [41] ZONG Q, ZHAO Z, ZHANG J. Higher order sliding mode control with self-tuning law based on integral sliding mode. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(7): 1282 – 1289.
- [42] WENG Yongpeng, GAO Xianwen, LIU Xinming. Data-driven second-order sliding-mode decoupling control for non-affine nonlinear discrete-time system. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(3): 309 – 318.
(翁永鹏, 高宪文, 刘昕明. 非仿射非线性离散系统的数据驱动二阶滑模解耦控制. 控制理论与应用, 2014, 31(3): 309 – 318.)
- [43] LEVANT A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 1993, 58(6): 1247 – 1263.
- [44] NAGESH I, EDWARDS C. A multivariable super-twisting sliding mode approach. *Automatica*, 2014, 50(3): 984 – 988.
- [45] BASIN M V, RODRIGUEZ-RAMIREZ P. A super-twisting algorithm for systems of dimension more than one. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(11): 6472 – 6480.
- [46] BARTOLINI G, PISANO A, PUNTA E, et al. A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems. *International Journal of Control*, 2003, 76(9/10): 875 – 892.
- [47] LEVANT A. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1812 – 1816.
- [48] LEVANT A. Higher order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 2003, 76(9/10): 924 – 941.

- [49] BARTOLINI G, FERRARA A, USAI E. Applications of a sub-optimal discontinuous control algorithm for uncertain second order systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1997, 7(4): 299 – 319.
- [50] LEVANT A. Quasi-continuous high-order sliding mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1812 – 1816.
- [51] LEVANT A. Universal SISO sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1447 – 1451.
- [52] LEVANT A. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 2005, 41: 823 – 830.
- [53] ORLOV Y. Finite-time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2005, 43(4): 1253 – 1271.
- [54] DEFOORT M, FLOQUET T, KOKOSYD A, et al. A novel higher order sliding mode control scheme. *Systems and Control Letters*, 2009, 58(2): 102 – 108.
- [55] HAN Y, LIU X. Continuous higher-order sliding mode control with time-varying gain for a class of uncertain nonlinear systems. *ISA Transactions*, 2016, 63: 193 – 201.
- [56] ZAVALA E C, MORENO J A. A new class of fast finite-time discontinuous controllers. *Proceedings of the 13th IEEE Workshop on Variable Structure Systems*. Nantes, France: IEEE, 2014, 7: 1 – 6.
- [57] DING S, LEVANT A, LI S. Simple homogeneous sliding-mode controller. *Automatica*, 2016, 67: 22 – 32.
- [58] CRUZ-ZAVALA E, MORENO J A. Homogeneous high order sliding mode design: A Lyapunov approach. *Automatica*, 2017, 80: 232 – 238.
- [59] DING S, PARK J H, CHEN C C. Second-order sliding mode controller design with output constraint. *Automatica*, 2020, 112: 108704.
- [60] LIU L, DING S, YU X. Second-order sliding mode control design subject to an asymmetric output constraint. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs*, 2021, 68(4): 1278 – 1282.
- [61] LIU L, DING S. A unified control approach to finite-time stabilization of SOSM dynamics subject to an output constraint. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 394: 125752.
- [62] DING S, LI S. Second-order sliding mode controller design subject to mismatched term. *Automatica*, 2017, 77: 388 – 392.
- [63] LIU L, DING S, ZHENG W X. High-order sliding mode controller design subject to lower-triangular nonlinearity and its application to robotic system. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(15): 10367 – 10386.
- [64] MEI K, DING S. Second-order sliding mode controller design subject to an upper-triangular structure. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(1): 497 – 507.
- [65] YANG J, DING Z. Global output regulation for a class of lower triangular nonlinear systems: A feedback domination approach. *Automatica*, 2017, 76: 65 – 69.
- [66] LIU L, DING S. Second-order sliding mode controller design subject to mismatched unbounded perturbations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(18): 4706 – 4722.
- [67] KWAN C M. Sliding mode control of linear systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, 1995, 31(2): 303 – 307.
- [68] CHANG Y. Adaptive sliding mode control of multi-input nonlinear systems with perturbations to achieve asymptotical stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(12): 2863 – 2869.
- [69] PLESTAN F, SHTESSSEL Y, BREGEAULT V, et al. New methodologies for adaptive sliding mode control. *International Journal of Control*, 2010, 83(9): 1907 – 1919.
- [70] SHTESSSEL Y, TALEB M, PLESTAN F. A novel adaptive-gain super-twisting sliding mode controller: methodology and application. *Automatica*, 2012, 48(5): 759 – 769.
- [71] UTKIN V I, POZNYAK A S. Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: equivalent control method. *Automatica*, 2013, 49(1): 39 – 47.
- [72] DING S, LIU L, PARK J H. A novel adaptive nonsingular terminal sliding mode controller design and its application to active front steering system. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(12): 4250 – 4269.
- [73] LIU L, ZHENG W X, DING S. An adaptive SOSM controller design by using a sliding-mode-based filter and its application to Buck converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Regular Papers*, 2020, 67(7): 2409 – 2418.
- [74] YU X, EFE O, KAYNAK O. A general backpropagation algorithm for feedforward neural networks learning. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2002, 13(1): 251 – 259.
- [75] SENG K P, MAN Z, WU H. Lyapunov theory based radial basis function networks for adaptive filtering. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2002, 49(8): 1215 – 1220.
- [76] HAYKIN S. Neural networks—A comprehensive foundation. *Englewood Cliffs*. NJ: Prentice-Hall, 1999.
- [77] RABIEE H, ATAIE M, EKRAMIAN M. Continuous nonsingular terminal sliding mode control based on adaptive sliding mode disturbance observer for uncertain nonlinear system. *Automatica*, 2019, 109: 108515.
- [78] LAGHROUCHE S, HARMOUCHE M, CHITOUR Y, et al. Barrier function-based adaptive higher order sliding mode controllers. *Automatica*, 2021, 123: 109355.
- [79] DA Feipeng, SONG Wenzhong. Sliding mode control based on fuzzy neural networks for nonlinear systems represented by input-output models. *Acta Electronica Sinica*, 2000, 28(7): 51 – 54. (达飞鹏, 宋文忠. 基于输入输出模型的模糊神经网络滑模控制. 电子学报, 2000, 28(7): 51 – 54.)
- [80] SUAREZ O J, VEGA C J, SANCHEZ E N, et al. Neural sliding-mode pinning control for output synchronization for uncertain general complex networks. *Automatica*, 2020, 112: 108694.
- [81] ZHANG Tianping, FENG Chunbo. Fuzzy logic based continuous sliding mode control. *Control and Decision*, 1995, 10(6): 503 – 507. (张天平, 冯纯伯. 基于模糊逻辑的连续滑模控制. 控制与决策, 1995, 10(6): 503 – 507.)
- [82] LI J, YANG G H. Fuzzy descriptor sliding mode observer design: A canonical form-based method. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(9): 2048 – 2062.
- [83] TRAN D T, BA D X, AHN K K. Adaptive backstepping sliding mode control for equilibrium position tracking of an electrohydraulic elastic manipulator. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(5): 3860 – 3869.
- [84] WANG J, ZHAO L, YU L. Adaptive terminal sliding mode control for magnetic levitation systems with enhanced disturbance compensation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2021, 68(1): 756 – 766.

作者简介:

刘 陆 讲师, 硕士生导师, 目前研究方向为智能高阶滑模控制理论与应用, E-mail: liulu2021@ujs.edu.cn;

丁世宏 教授, 博士生导师, 目前研究方向为滑模控制理论与应用, E-mail: dsh@ujs.edu.cn;

李世华 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性系统的分析与综合, E-mail: lsh@seu.edu.cn.