Vol. 40 No. 3 Mar. 2023

# 伺服系统弹性负载的闭环辨识方法

郑立楷,吴玉香,王孝洪<sup>†</sup>,黄淇松

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 为有效解决机械谐振问题, 伺服系统弹性负载的辨识是非常关键的步骤. 本文以工业中最常见的双惯量系统作为辨识对象设计闭环辨识方法, 使用伪随机二进制序列作为激励并采集电机电流转速信号. 在此基础上, 使用最小二乘法拟合系统的自回归移动平均模型, 并提高模型阶次以保证拟合精度. 为抑制采样噪声的影响, 提出基于平衡截断的模型降阶方法, 根据Hankel奇异值大小判断系统阶次并提取主要模态. 最后, 通过仿真和实验进行验证, 结果表明: 相比于传统辨识方法, 本文所提出的辨识方法能够有效抑制噪声干扰, 具有更高的精度.

关键词: 机械谐振; 系统辨识; 最小二乘法; 模型降阶

引用格式: 郑立楷, 吴玉香, 王孝洪, 等. 伺服系统弹性负载的闭环辨识方法. 控制理论与应用, 2023, 40(3): 468 – 476

DOI: 10.7641/CTA.2022.11058

## Closed-loop identification method for servo elastic load

ZHENG Li-kai, WU Yu-xiang, WANG Xiao-hong<sup>†</sup>, HUANG Qi-song

(School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

**Abstract:** The identification for the servo elastic load is an essential step to solve mechanical resonance problem. This paper designs a closed-loop identification method for the two-mass system, which is the most common in industrial application. The current and velocity signals of the motor are collected while the pseudo-random binary sequence is used to stimulate system. On this basis, the least squares method is applied to fit the auto-regressive and moving average model, using a higher fitting order to ensure the accuracy. In order to suppress the influence of sampling noise, a balanced truncation based model reduction method is proposed, which judges the order of the system and extracts dominant states according to the Hankel singular value. In the end, the proposed method is verified by simulation and experiment. The results show that: compared with the traditional identification method, the proposed identification method can effectively suppress noise and has higher accuracy.

Key words: mechanical resonance; system identification; least squares method; model reduction

**Citation:** ZHENG Likai, WU Yuxiang, WANG Xiaohong, et al. Closed-loop identification method for servo elastic load. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(3): 468 – 476

## 1 引言

近年来,我国政府提出"中国制造2025",将工业机器人、数控机床作为发展重点,列入第一个十年行动计划.在工业机器人、机床应用中,其机械传动部分常常会用到传动轴、变速器、联轴器等装置连接电机与执行机构.这些连接设备实际并不是理想刚体,而存在弹性特性.弹性连接负载对伺服系统的控制性能影响较大,容易激发机械谐振,导致转速转矩脉动,定位精度下降,甚至引发安全问题[1].

为了解决机械谐振问题,首先需要辨识弹性负载的谐振模型.其中,系统谐振峰与反谐振峰的频率与

阻尼系数是指导抑振控制器设计的最重要参数. 若其辨识精度较低,则所设计控制器的抑振效果将劣化, 甚至导致更严重的机械谐振<sup>[2]</sup>.

工业中的伺服负载,可以根据其中弹性连接机构的个数,建模为双惯量<sup>[3-4]</sup>、三惯量<sup>[5-6]</sup>或多惯量系统.弹性连接机构越多,系统结构越复杂,模型阶次也越高.根据辨识前是否需要确定模型结构,可以将弹性负载的辨识方法分为参数法和非参数法两种<sup>[7]</sup>.

参数法在系统辨识之前需要确定待辨识模型的结构、阶次,并以此构建待辨识参数向量,进而使用数值拟合算法进行求解<sup>[8-9]</sup>.文献[8]针对双惯量系统,使

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62173150) and the GuangDong Basic and Applied Basic Research Foundation (2022B1515120003).

收稿日期: 2021-11-02; 录用日期: 2022-04-07.

<sup>&</sup>lt;sup>†</sup>通信作者. E-mail: xhwang@scut.edu.cn.

本文责任编委: 陈增强.

国家自然科学基金项目(62173150), 广东省基础与应用基础研究基金项目(2022B1515120003)资助.

用三阶离散输出误差模型进行辨识,通过递推最小二乘算法拟合参数向量,之后将得到的离散传递函数转化为连续传递函数,可以同时得到电机及负载转动惯量、传动轴刚性等6个机械参数.文献[9]针对皮带传动负载展开研究,由于皮带负载的机械参数会在运行过程中发生改变,利用带遗忘因子的最小二乘法对其简化三阶模型进行在线辨识,并通过实验验证了所提出方法在系统运行中能够较好地拟合变化参数.以上方法拟合阶次低、待定参数少,因而存储计算量较小.但其需要事先确定系统阶次,适用范围较窄,且对采样噪声较为敏感,在噪声较大场合往往无法得到准确模型.

相较于参数法,非参数法类似于"黑箱"操作,不 必事先确定系统模型,因而理论上适用于任何复杂的 系统[7], 非参数法采用响应曲线模型来描述系统, 如 时域的阶跃响应模型[10]、脉冲响应模型[11], 频域的频 率响应模型[12-14], 其适用范围广, 但所得到的模型往 往包含大量测量噪声. 如何确定系统阶次, 有效提取 谐振模态,是非参数法辨识的研究重点. 文献[10] 针对天线伺服提出一种基于阶跃响应的快速建模方 法, 其根据二阶欠阻尼系统的阶跃响应特性, 确定系 统主导谐振极点的频率与阻尼比. 该方法计算简单, 但辨识精度较低. 文献[11]利用伺服系统的脉冲响应 序列构建Hankel矩阵,并通过对Hankel矩阵的奇异值 分解实现模型降阶. 该方法能够有效消除测量噪声, 但仅适用于脉冲响应为有限长序列的系统. 文献[12] 使用快速傅里叶变换获取伺服系统的频率响应,并根 据bode图确定其谐振频率与反谐振频率. 该方法在工 程中较为常用,但噪声干扰较大,且阻尼系数无法确 定. 文献[13-14]使用Welch法求取机电系统的频率响 应输出,可以有效抑制采样噪声干扰,之后使用非线 性最小二乘算法拟合系统的谐振峰与反谐振峰. 该方 法辨识精度较高,但计算量大,实现较困难,实际工程 并不适用.

本文针对伺服弹性负载的辨识问题,以工业中最常见的双惯量系统作为辨识对象,提出一种基于最小二乘法与平衡截断的辨识方法.首先,使用最小二乘法拟合弹性负载的参数模型,这一思路与传统参数法辨识一致<sup>[9]</sup>,但所使用的模型阶次较高,目的在于尽可能地保留系统中的有用信息.之后,求取高阶模型的平衡实现,根据Hankel奇异值分布确定阶次,从而提取系统的主导模态.该方法相较于传统非参数法,数据存储计算量更小;而相较于传统参数法,其不需要事先确定系统模型阶次,可以推广于多惯量系统的辨识,辨识精度更高,对噪声的抑制能力更强.

本文后续内容安排如下:第2节对双惯量系统的动力学方程及传递函数进行推导;第3节详细阐释了所提出的伺服系统闭环辨识方法;其包括辨识信号获

取、高阶模型拟合以及模型降阶3个部分;第4节通过仿真,比较了所提出辨识方法与传统最小二乘直接辨识法在不同噪声条件下的辨识效果;第5节在所搭建的双惯量伺服平台上对所提出辨识方法的有效性进行了实验验证;第6节总结本文工作的主要结论.

## 2 双惯量系统建模

在实际工业应用中, 电机与负载之间通常使用弹性轴连器或柔性连接杆进行连接, 如图1. 此时可以将伺服系统建模为一个双惯量模型<sup>[3]</sup>, 其动力学方程为

$$\begin{cases} J_{\mathrm{M}}\dot{\omega}_{\mathrm{M}} = T_{\mathrm{M}} - T_{\mathrm{S}}, \\ J_{\mathrm{L}}\dot{\omega}_{\mathrm{L}} = T_{\mathrm{S}} - T_{\mathrm{L}}, \\ T_{\mathrm{S}} = K_{\mathrm{S}}\left(\theta_{\mathrm{M}} - \theta_{\mathrm{L}}\right) + b_{\mathrm{S}}\left(\omega_{\mathrm{M}} - \omega_{\mathrm{L}}\right), \\ \dot{\theta}_{\mathrm{M}} = \omega_{\mathrm{M}}, \\ \dot{\theta}_{\mathrm{L}} = \omega_{\mathrm{L}}, \end{cases}$$
(1)

式中:  $J_{\text{M}}$ ,  $J_{\text{L}}$ 为电机转动惯量和负载转动惯量;  $\theta_{\text{M}}$ ,  $\theta_{\text{L}}$ 为电机转子角度和负载角度;  $\omega_{\text{M}}$ ,  $\omega_{\text{L}}$ 为电机转速和负载转速;  $T_{\text{M}}$ ,  $T_{\text{L}}$ 为电机输出转矩和负载转矩,  $T_{\text{S}}$ 为电机和负载角度不一致而产生的扭转转矩;  $K_{\text{S}}$ ,  $b_{\text{S}}$ 为轴连器的刚性系数和阻尼系数.

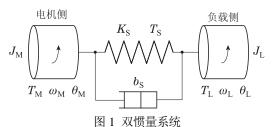


Fig. 1 Two-mass system

本文所讨论的伺服系统为永磁交流伺服系统, 其使用 $i_d = 0$ 的矢量控制策略来进行控制. 此时, 电机的输出转矩 $T_M$ 由q轴电流分量 $i_q$ 决定, 并满足

$$T_{\rm M} = \frac{3}{2} n_{\rm p} \psi_{\rm r} \cdot i_{\rm q} = K_{\rm t} \cdot i_{\rm q}, \tag{2}$$

式中:  $n_p$ 为电机极对数;  $\psi_r$ 为电机转子磁链;  $K_t = \frac{3}{2} n_p \psi_r$ 为电机转矩系数. 将式(2)代入式(1), 之后对式(1)做拉氏变换, 可以得到双惯量系统的模型框图如图2

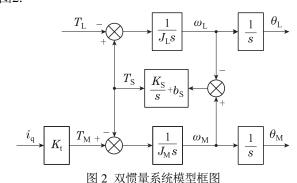


Fig. 2 Control diagram of the two-mass system

根据图2, 可以得到电机转矩 $T_{\rm M}$ 到转速 $\omega_{\rm M}$ 的传递

函数 $G_L(s)$ 为

$$G_{\rm L}(s) = \frac{\omega_{\rm M}(s)}{T_{\rm M}(s)} = \underbrace{\frac{1}{J_{\Sigma}s}}_{G_{\rm rigid}(s)} \cdot \underbrace{\frac{J_{\rm L}s^2 + b_{\rm S}s + K_{\rm S}}{J_{\rm P}s^2 + b_{\rm S}s + K_{\rm S}}}_{G_{\rm res}(s)}, \quad (3)$$

式 中: 有 $J_{\Sigma} = J_{\rm M} + J_{\rm L}$ ,  $J_{\rm P} = \frac{J_{\rm M}J_{\rm L}}{J_{\rm M} + J_{\rm L}}$ . 由 式(3)可知,  $G_{\rm L}(s)$ 由一阶刚性环节 $G_{\rm rigid}(s)$ 和二阶弹性环节 $G_{\rm res}(s)$ 所组成.  $G_{\rm res}(s)$ 包含了一对共轭零点和一对共轭极点,零极点的振荡频率(Hz)与阻尼系数分别为

$$\begin{cases} f_{\text{ares}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{\text{S}}}{J_{\text{L}}}}, \; \xi_{\text{ares}} = \sqrt{\frac{b_{\text{S}}^2}{4K_{\text{S}}J_{\text{L}}}}, \\ f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{\text{S}}}{J_{\text{P}}}}, \; \xi_{\text{res}} = \sqrt{\frac{b_{\text{S}}^2}{4K_{\text{S}}J_{\text{P}}}}, \end{cases}$$
(4)

共轭零极点在bode图上分别体现为反谐振峰和谐振峰,如图3所示.

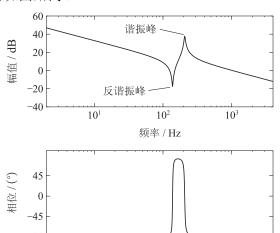


图 3 双惯量系统Bode图

 $1.0^{2}$ 

频率 / Hz

Fig. 3 Bode diagram of the two-mass system

#### 3 双惯量系统辨识过程

#### 3.1 闭环辨识环节设计

为了实现对双惯量系统的有效辨识,需要施加合适的激励信号,充分激发系统在各个频段的输出响应,同时噪声干扰较小.工程上常用伪随机二进制序列(pseudo-random binary sequence, PRBS)作为辨识激励信号,其不仅具有白噪声的优点,功率谱范围宽,不易受环境因素影响,而且可以通过移位寄存器非常方便地得到<sup>[6]</sup>.图4为PRBS信号的示意图.

由图4可知, PRBS信号的可调参数包括: 时钟周期 $\triangle T$ 、序列长度M、以及信号幅值A. 其中, 时钟周期 $\triangle T$ 为PRBS信号中电平变化的最小时间间隔, 其决定了信号所覆盖的频率范围.  $\triangle T$ 越小, 信号功率谱覆盖得越宽, 对中高频的辨识准确度越高, 但对低频段

的辨识准确度则会降低. 为了保证伺服系统谐振峰附近频段的辨识精度, 通常设计  $\frac{1}{\triangle T}$  为谐振频率的  $10 \sim 20$  倍. 序列长度M不宜设置过短, 否则将导致低频段特性缺失; 但过长则数据存储计算量过大. 信号幅值A需要在保证伺服系统安全运行的前提下尽可能设置得较大, 以保证较高的信噪比.

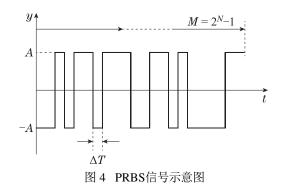


Fig. 4 Schematic diagram of the PRBS signal

伺服系统的辨识通常包括开环辨识和闭环辨识两种<sup>[8]</sup>. 开环辨识是在伺服系统转速开环条件下,直接将激励信号作为伺服系统的转矩给定输入,之后获取电机的转速输出. 开环辨识方式实现简单,但由于辨识过程中的伺服电机的转速和位置无法控制,在有行程和转速限制的系统上安全性较低. 工程上通常使用闭环辨识的方式. 闭环辨识在伺服系统转速闭环的条件下完成,在辨识之前需要确定转速环控制器的参数,并将激励信号作为系统的转速给定输入,之后获取电机的转矩和转速输出信号.

图5展示了本文所提出双惯量系统闭环辨识方法 的整体框图. 图中,  $G_{\rm C}(s)$ 为转速环PI控制器;  $G_{\rm i}(s)$ 为等效电流环环节;  $G_L(s)$ 为待辨识双惯量系统. 由于 伺服系统电流环带宽较高, $G_i(s)$ 可近似为单位比例 环节, 即 $G_i(s) \approx 1$ . 闭环辨识过程可以分为两个阶段: 信号获取与模型辨识. 在信号获取阶段, 为消除电机 在零速附近运动时的非线性库伦摩擦影响[8],需要先 输入小幅值转速阶跃给定, 待电机转速稳定后输入 PRBS信号,以保证辨识时系统运行于线性工作点.而 在模型辨识阶段,信号 $i_{qref}$ , $\omega_{M}$ 需要先减去其直流偏 置 $\tilde{i}_{\text{qref}}, \bar{\omega}_{\text{M}}$ 得到高频分量 $\tilde{i}_{\text{qref}}, \tilde{\omega}_{\text{M}},$ 并将 $\tilde{i}_{\text{qref}}$ 转换为电 机转矩 $\tilde{T}_{\mathrm{M}}$ ,之后通过最小二乘法拟合得到高阶参数模 型 $\hat{G}_{L-HO}(s)$ . 由于实际伺服位置传感器的采样精度 问题,转速采样环节往往会引入采样噪声d,其将降低 系统辨识精度. 为抑制采样噪声影响, 准确提取谐振 模态,还需要通过平衡截断对 $\hat{G}_{L-HO}(s)$ 进行降阶得 到 $\hat{G}_{L-LO}(s)$ . 以上即为双惯量系统闭环辨识的完整 过程,接下来的章节将对最小二乘法拟合与平衡截断 降阶过程进行具体说明.

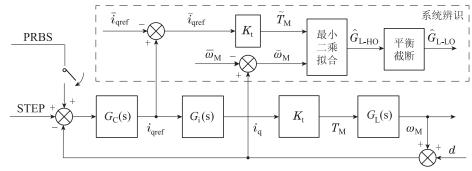


图 5 闭环辨识框图

Fig. 5 Control diagram of closed-loop identification

#### 3.2 高阶参数模型拟合

对于n阶线性时不变离散系统, 其传递函数为

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} \cdots b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n}, \quad (5)$$

对上式做*z*反变换, 可以得到系统在时域上的*n*阶自回 归移动平均(auto-regressive and moving average, AR-MA)模型为

$$y[k] = \phi^{\mathrm{T}}[k] \cdot \theta, \tag{6}$$

式中: 自回归向量 $\phi[k]$ 和参数向量 $\theta$ 分别为

$$\phi[k] = \begin{bmatrix} -y[k-1] \\ -y[k-2] \\ \vdots \\ -y[k-n] \\ u[k-1] \\ u[k-2] \\ \vdots \\ u[k-n] \end{bmatrix}, \ \theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$
 (7)

若已知系统的输入输出序列,则可构造输出向量Y与自回归矩阵 $\Phi$ 为

$$\begin{cases} Y = [ y[n] \ y[n+1] \ \cdots \ y[M] ]^{\mathrm{T}}, \\ \Phi = [ \phi[n] \ \phi[n+1] \ \cdots \ \phi[M] ]^{\mathrm{T}}, \end{cases}$$
(8)

将上式代入式(6), 可得

$$Y = \Phi \cdot \theta. \tag{9}$$

通常,输入输出序列长度M远大于系统的模型阶次n,故式(9)为一个无数值解的超定方程组.现需要求得最优参数估计 $\hat{\theta}$ ,使得拟合残差平方和

$$J = E^{\mathrm{T}}E = [Y - \Phi\hat{\theta}]^{\mathrm{T}}(Y - \Phi\hat{\theta})$$
 (10)

最小. 当矩阵 $\Phi^{\mathrm{T}}\Phi$ 为正定矩阵时, 可使用最小二乘法对 $\hat{\theta}$ 进行求解, 即有

$$\hat{\theta} = [\Phi^{\mathrm{T}}\Phi]^{-1} \cdot \Phi^{\mathrm{T}}Y. \tag{11}$$

以上推导即为最小二乘(least squares, LS)拟合n阶模型参数的一般过程. 由文献[15]可知, 对于线性时不变系统, 若输入为PRBS激励, 其为平稳随机信号,

则系统输出也为平稳随机信号,此时所构建的矩阵  $\Phi^{\mathrm{T}}\Phi$ 能够保证正定性,式(11)成立.

由于辨识过程存在采样噪声d,使用较低阶次的模型通常无法准确提取系统中的谐振分量. 通过提高拟合阶次n,能够有效减小拟合残差平方和J,但计算量也将加大. 本文选取拟合阶次n=50,其能保证较好的辨识效果与相对较小的计算量. 之后的实验部分也将对拟合阶次n的选择问题进行说明.

## 3.3 模型降阶

第3.2节得到了使用最小二乘法拟合的高阶模型,但该模型包含了很多无用的模态,其主要为测量引入的噪声分量.为提取高阶模型中的主要谐振模态,本节使用平衡截断(balanced truncation, BT)法实现模型降阶.

n阶传递函数存在无穷多个最小实现, 其状态空间模型(A,B,C)可表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases}$$
 (12)

由于最小实现满足能控能观条件,故以下Lyapunov方程

$$\begin{cases} AW_{\rm C} + W_{\rm C}^{\rm T} A^{\rm T} = -BB^{\rm T}, \\ W_{\rm O} A^{\rm T} + W_{\rm O} A = -C^{\rm T} C \end{cases}$$
(13)

必定存在唯一正定解. 式中,  $W_{\rm C}$ 与 $W_{\rm O}$ 为正定矩阵, 其为系统的能控Gramian矩阵和能观Gramian矩阵 $^{[16]}$ , 并满足

$$\begin{cases} W_{\rm C} = \int_0^\infty e^{\tau A} B B^{\rm T} e^{\tau A^{\rm T}} d\tau, \\ W_{\rm O} = \int_0^\infty e^{\tau A^{\rm T}} C^{\rm T} C e^{\tau A} d\tau. \end{cases}$$
(14)

现假设存在非奇异变换矩阵T, 而 $\bar{x}$ 为x经过T等价变换之后的状态向量, 则等价变换之后的状态空间模型( $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ )为

$$\begin{cases} \bar{x} = Tx, \\ \bar{A} = T^{-1}AT, \\ \bar{B} = T^{-1}B, \\ \bar{C} = CT. \end{cases}$$
(15)

将式(15)代入式(14)可得

$$\begin{cases} \bar{W}_{\rm C} = T^{-1} W_{\rm C} [T^{-1}]^{\rm T}, \\ \bar{W}_{\rm O} = T^T W_{\rm C} T. \end{cases}$$
(16)

由上式可知, 系统能控能观Gramian矩阵的乘积满足

$$\bar{W}_{\mathcal{C}}\bar{W}_{\mathcal{O}} = T^{-1}W_{\mathcal{C}}W_{\mathcal{O}}T. \tag{17}$$

由于 $W_{\rm C}W_{\rm O}$ 为正定矩阵,其所有的特征值均大于零,故存在转换矩阵T,使得

$$\bar{W}_{\rm C} = \bar{W}_{\rm O} = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix},$$
 (18)

式中,  $\Sigma$ 为对角矩阵, 且对角线上的值 $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ...  $\sigma_n$ 均为正值, 其为系统的Hankel奇异值. 满足式(18) 的最小实现即为平衡实现, 该实现所有模态的能控性和能观性均相同. 相比于能控标准型实现和能观标准型实现, 平衡实现参数对系统的输入输出不敏感, 具有更好的稳定性<sup>[16]</sup>.

接下来推导变换矩阵T的获取过程. 对于正定矩阵 $W_{\rm C}$ 与 $W_{\rm O}$ ,可以对其做Cholesky分解为

$$\begin{cases} W_{\rm C} = L_{\rm C} L_{\rm C}^{\rm T}, \\ W_{\rm O} = L_{\rm O} L_{\rm O}^{\rm T}. \end{cases}$$
 (19)

之后对 $L_{\mathrm{O}}^{\mathrm{T}}L_{\mathrm{C}}$ 做奇异值分解可得

$$L_{\rm O}^{\rm T} L_{\rm C} = U \Sigma V^{\rm T}, \tag{20}$$

由于 $L_{\mathrm{O}}^{T}$ 与 $L_{\mathrm{C}}$ 均为正定矩阵, 故 $\Sigma$ 为正定的对角矩阵, 则根据

$$T = L_{\rm C} V \varSigma^{-\frac{1}{2}} \tag{21}$$

可计算得到转换矩阵T.

在通常情况下, n阶模型中存在大量噪声分量, 其对应的Hankel奇异值较小. 此时n阶平衡实现( $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ )的Hankel奇异值满足

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \gg \sigma_{q+1} \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n > 0.$$
 (22)

则可以将 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ 分解为

$$\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u, \\
y = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix},
\end{cases} (23)$$

式中:  $\bar{x}_1$ 包含了q个Hankel奇异值较大的状态变量, 而  $\bar{x}_2$ 中的状态变量Hankel奇异值较小,可以直接消去. 故n阶平衡实现( $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ )可以降阶为q阶平衡实现

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{B}_1 u, \\ y = \bar{C}_1\bar{x}_1. \end{cases}$$
 (24)

以上即为高阶系统的平衡截断过程.通过求取系统的平衡实现,可以准确判断系统的实际阶次,保留奇异值较大的主导模态,消除奇异值较小的噪声分量,从而得到拟合效果较好的低阶模型.

## 4 仿真

为了验证本文所提出辨识方法的优越性,本节利用MATLAB/Simulink对双惯量系统的闭环辨识过程进行仿真,并与文献[9]方法进行比较. 文献[9]使用递推最小二乘(recursive least squares, RLS)算法直接拟合双惯量系统的3阶参数模型,其运算量相对较小,但对测量噪声较为敏感. 本节主要比较本文方法(LS+BT辨识法)与文献[9]方法(RLS辨识法)在采样噪声影响下的辨识效果.

表1为仿真中双惯量伺服系统的主要参数,代入式(4)可以得到系统谐振峰与反谐振峰的频率与阻尼系数. 为保证辨识过程伺服系统稳定,转速环PI控制器的带宽需要设计得较小. 此处设置转速环带宽  $\omega_n=50~{\rm Hz}$ ,电流环带宽 $\omega_i=2000~{\rm Hz}$ . 由于仿真模型不存在非线性摩擦,此处直接将PRBS信号作为转速给定. PRBS信号长度设置为M=4095. 时钟周期设置为 $\Delta T=T_c=125~{\rm \mu s}$ ,其可满足较宽的可辨识谐振频率范围. 幅值设置为 $A=30~({\rm r\cdot min^{-1}})$ ,对应0.01倍电机额定转速.

表 1 双惯量伺服系统参数

Table 1 Parameter of two-mass servo system

参数	手册值
电机额定功率 $P_{\mathrm{M}}(\mathbf{W})$	750
电机额定转速 $n_{\rm M}({ m r\cdot min}^{-1})$	3000
电机额定转矩 $T_{ m M}$ (N·m)	2.39
电机转动惯量 $J_{ m M}$ (kg· $ m m^2$ )	$1.59e^{-4}$
负载转动惯量 $J_{\mathrm{L}}$ (kg· $\mathrm{m}^2$ )	$2.00e^{-4}$
连杆刚性系数 $K_{\rm S}({ m N\cdot m}^{-1})$	150
连杆阻尼系数 $b_{\rm S}  ({ m N} \cdot { m s} \cdot { m m}^{-1})$	0.03
转速控制周期 $T_{\rm c}$ ( $\mu s$ )	125

为了比较两种辨识方法对采样噪声的抑制能力, 在电机转速信号 $\tilde{\omega}_{\rm M}$ 上叠加白噪声d,并通过调整d与 $\tilde{\omega}_{\rm M}$ 的信号功率比k,模拟实际系统在测量噪声较小, 与测量噪声较大时的辨识情况.

## 1) 测量噪声较小时系统辨识效果

设置 $k=10^{-7}$ . 首先使用最小二乘法拟合电机转矩 $\tilde{T}_{\rm M}$ 与转速 $\tilde{\omega}_{\rm M}$ 的50阶模型, 之后求取其平衡实现, 并得到其Hankel奇异值分布见表2.

由表2可知,系统前3个奇异值较大,而之后的奇异值较小,其主要为噪声分量影响,此时可确定系统实际阶次为3阶.图6展示了在噪声较小情况下,标称模型、RLS辨识模型、LS+BT辨识模型的bode图.

#### 表 2 辨识模型Hankel奇异值-测量噪声较小

Table 2 The Hankel singular value of identification model with small noise

奇异值序号	奇异值幅值
1	9896
2	5.063
3	4.961
4	$1.718 \times 10^{-3}$
5	$8.966 \times 10^{-5}$
6	$8.326 \times 10^{-5}$
:	:
•	•

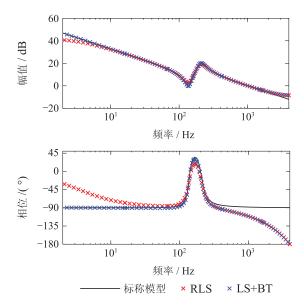


图 6 系统辨识结果-测量噪声较小

Fig. 6 Identification result of system with small noise

#### 2) 测量噪声较大时系统辨识效果

设置 $k = 10^{-1}$ , 重复步骤1)中的辨识过程. 此时50阶模型的Hankel奇异值分布见表3.

由表3可知,当噪声增大时,其对应的Hankel奇异值比重相应增大,此时仍可以确定系统的实际阶次为3阶.图7展示了在噪声较大情况下,标称模型、RLS辨识模型、LS+BT辨识模型的bode图.

## 3) 辨识结果分析

使用零极点匹配法,将离散模型z域的共轭零极点变换至s域<sup>[8]</sup>,可以得到所辨识双惯量系统谐振峰与反谐振峰的频率与阻尼系数.表4、表5分别展示了RLS辨识法、LS+BT辨识法在不同噪声条件下的参数辨识结果.由仿真结果可知:在测量噪声d较小时,RLS辨识法与LS+BT辨识法均能有较好的辨识效果,其中LS+BT辨识法对系统阻尼系数的辨识精度更高.但在测量噪声d较大时,RLS辨识法已无法拟合系统的谐振峰与反谐振峰,而LS+BT辨识方法仍能够保持较高的辨识精度.

表 3 辨识模型Hankel奇异值-测量噪声较大

Table 3 The Hankel singular value of identification model with big noise

奇异值序号	奇异值幅值
1	427.8
2	4.857
3	4.771
4	0.0933
5	0.0865
6	0.0832
:	:
•	•

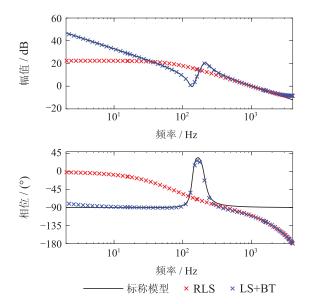


图 7 系统辨识结果-测量噪声较大

Fig. 7 Identification result of system with big noise

表 4 小噪声条件下系统辨识结果
Table 4 Identification result in small noise conditions

会业	标称值	RLS		LS+BT	
参数		辨识值	误差	辨识值	误差
$f_{\rm ares}$	137.31	137.29	0.020%	137.38	0.045%
$\xi_{\rm ares}$	0.0866	0.1221	40.97%	0.0869	0.354%
$f_{\rm res}$	205.35	203.04	1.125%	202.87	1.207%
$\xi_{\rm res}$	0.1301	0.1452	11.55%	0.1292	0.719%

表 5 大噪声条件下系统辨识结果

Table 5 Identification result in big noise conditions

参数	标称值	RLS		LS+BT	
		辨识值	误差	辨识值	误差
$f_{\rm ares}$	137.31	_	_	138.17	0.626%
$\xi_{\rm ares}$	0.0866	_	_	0.0837	3.317%
$f_{\rm res}$	205.35	_	_	202.00	1.631%
$\xi_{\mathrm{res}}$	0.1301	_	_	0.1347	3.521%

## 5 实验

为了进一步验证所提出的辨识算法, 搭建双惯量伺服实验平台进行实验. 其中, 伺服驱动器使用DSP与FPGA组成双核结构, 并通过EtherCAT接口与PC进行通信. 图8为所搭建的双惯量系统, 其由驱动电机, 弹性轴联杆, 拖动电机所组成. 实验平台的机械参数、控制器参数、PRBS信号参数均与仿真一致.



图 8 双惯量系统实验平台

Fig. 8 The experiment platform of the two-mass system

#### 1) 闭环辨识输入输出信号获取

为消除库伦摩擦力影响, 先让电机稳定运行于0.2 倍额定转速, 再叠加PRBS激励信号, 采集系统转速反馈 $\omega_{\rm M}$ 以及q轴电流给定 $i_{\rm oref}$ .

## 2) 最小二乘法拟合高阶参数模型

步骤 1)中所得到的转速反馈 $\omega_{\rm M}$ 及q轴电流给定  $i_{\rm qref}$ , 按照第3.1节的处理步骤,可得到辨识所需信号  $\tilde{\omega}_{\rm M}$ 与 $\tilde{T}_{\rm M}$ , 之后使用最小二乘法拟合其高阶参数模型. 为确定合适的拟合阶次n, 设置拟合阶次n从n=4 出发,逐步增大至n=100,并根据式(10)计算对应的拟合残差平方和J. 图9绘制了拟合阶次n与拟合残差平方和J的对应关系. 由图9可知: J随着n的增大而减小,而当n>60后,J几乎不发生变化. 综合考虑拟合精度与存储计算负担,最终确定拟合阶次n=50.

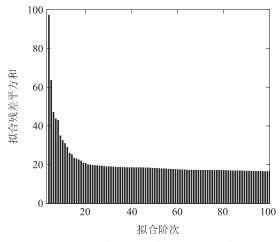


图 9 拟合阶次与残差平方和的关系

Fig. 9 The relationship between the order and the residual sum of squares

图10为原系统与50阶模型的频域响应. 其中, 原系统的频域响应使用功率谱法<sup>[12]</sup>得到. 由图10可知, 所得50阶模型在频域有较好的拟合效果.

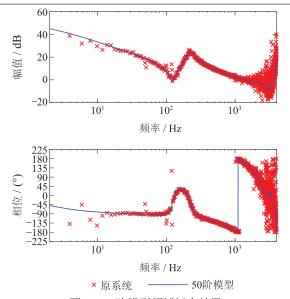


图 10 50阶模型频域拟合效果

Fig. 10 Frequency domain fitting effect of 50-order model

## 3) 基于平衡截断的模型降阶

根据第3.3节内容, 求取50阶模型的平衡实现, 进而得到其Hankel奇异值分布见表6. 由表6可知, 系统前3个Hankel奇异值相对较大, 故可确定系统的实际阶次为3阶. 图11为平衡截断降阶前后模型的bode图, 图中的3阶模型有效保留了50阶模型的谐振与反谐振模态, 降阶效果较好.

表 6 实验平台辨识模型Hankel奇异值 Table 6 The Hankel singular value of identification model of experiment platform

奇异值序号		奇异值幅值	
	1	3181	
	2	195.4	
	3	179.8	
	4	30.12	
	5	9.381	
	6	5.678	
	:	:	
	•	•	

图12展示了RLS辨识法与LS+BT辨识法在实验平台上的辨识效果.由于测量噪声较大,RLS辨识法所得到的3阶模型无法拟合系统的谐振峰与反谐振峰,谐振参数无法获得.而LS+BT辨识法所得到的3阶模型在中低频段拟合效果较好,说明该方法能够有效提取双惯量系统的谐振模态,抑制采样噪声的影响.最终辨识结果见表7,可以看到:LS+BT辨识得到的双惯量系统谐振参数具有较高的准确性.

#### 6 结论

针对伺服系统弹性负载的辨识问题,本文提出了一种基于最小二乘拟合与平衡截断的辨识方法. 在伺服系统转速闭环条件下,通过叠加PRBS激励获取系

统在较宽频率范围内的输出响应. 在此基础上, 使用最小二乘拟合系统高阶模型, 并通过平衡截断完成模型降阶. 通过对仿真与实验结果的分析, 最终可以得到如下结论:

- 1) 与传统最小二乘直接拟合低阶模型的方法相比,本文通过提升最小二乘法拟合模型阶次,能够尽可能保留系统中的有用分量,对测量噪声的敏感性较小.
- 2) 通过求取平衡实现,本文所提出方法可以准确判断系统的阶次,从而完成对系统主导谐振模态的精准提取.因此,该方法适用于系统实际阶次未知的场合,可以推广到多惯量系统的辨识中.

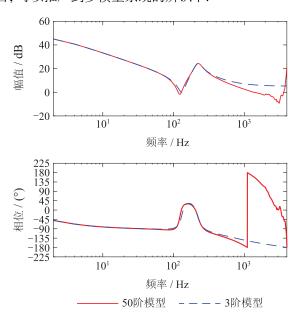


图 11 降阶模型频域拟合效果

Fig. 11 Frequency domain fitting effect of reduced order model

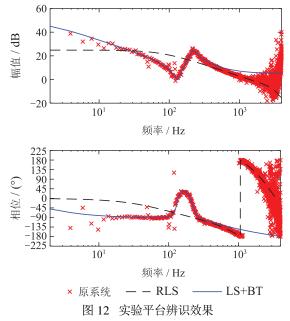


Fig. 12 Identification effect of experimental platform

表 7 LS+BT法实验结果

Table 7 The experimental results of LS+BT

参数	标称值	辨识值	误差
$f_{\rm ares}$	137.31	130.85	4.705%
$\xi_{\rm ares}$	0.0866	0.0904	4.388%
$f_{\rm res}$	205.35	216.51	5.435%
$\xi_{\rm res}$	0.1301	0.1236	4.996%

## 参考文献:

- [1] YANG Ming, HU Hao, XU Dianguo. Cause and suppression of mechanical resonance in PMSM servo system. *Electric Machines and Control*, 2012, 16(1): 79 84. (杨明, 胡浩, 徐殿国. 永磁交流伺服系统机械谐振成因及其抑制. 电机与控制学报, 2012, 16(1): 79 84.)
- [2] CHEN Y Y, YANG M, LONG J, et al. Analysis of oscillation frequency deviation in elastic coupling digital drive system and robust notch filter strategy. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 66(1): 90 101.
- [3] DING Youshuang, XIAO Xi. Mathematical modeling of flexible load in servo system. *Proceedings of the CSEE*, 2016, 36(3): 818 – 827. (丁有爽, 肖曦. 伺服系统柔性负载建模方法研究. 中国电机工程学 报, 2016, 36(3): 818 – 827.)
- [4] NEVARANTA N, DERAMMELAERE S, PARKKINEN J, et al. Online identification of a mechanical system in frequency domain using sliding DFT. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(9): 5712 – 5723.
- [5] OSTRING M, GUNNARSSON S, NORRLOF M. Closed loop identification of an industrial robot containing flxibilitie. *Control Engineering Practice*, 2003, 11(3): 291 300.
- [6] VILLWOCK S, BAUMULLER A, PACAS M, et al. Influence of the power density spectrum of the excitation signal on the identification of drives. *Proceedings of the 34th Annual Conference of IEEE Indus*trial Electronics. Orlando, FL, USA: IEEE, 2008: 1252 – 1257.
- [7] WANG Can, YANG Ming, LUAN Tianrui, et al. A review of external mechanical parameter identification of two-mass elastic servo systems. *Proceedings of the CSEE*, 2016, 36(3): 804 817. (王璨, 杨明, 栾添瑞, 等. 双惯量弹性伺服系统外部机械参数辨识综 述. 中国电机工程学报, 2016, 36(3): 804 817.)
- [8] SAARAKKALA S E, HINKKANEN M. Identification of two-mass mechanical systems using torque excitation: Design and experimental evaluation. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2015, 51(5): 4180 – 4189.
- [9] NEVARANTA N, PARKKINEN J, LINDH T, et al. Online estimation of linear tooth belt drive system parameters. *IEEE Transactions* on *Industrial Electronics*, 2015, 62(11): 7214 – 7223.
- [10] LU Jieying, SU Weizhou. A fast algorithm of system identification for antenna servo systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(8): 1329 – 1335. (卢洁莹, 苏为洲. 天线伺服系统的快速辨识算法. 控制理论与应用, 2019, 36(8): 1329 – 1335.)
- [11] WEN Cheng, QIU Xiaohong, WANG Yuan. Application of Hankel matrix identification method in antenna servo system. *Measurement Control & Technology*, 2015, 34(6): 118 121. (闻成, 邱小红, 王元. Hankel矩阵辨识法在天线伺服系统中的应用. 测控技术, 2015, 34(6): 118 121.)
- [12] CHEN T, SONG B, TANG X, et al. Resonance suppression of twomass drive systems considering compensation of anti-resonance character. Proceedings of the 12th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications. Auckland, New Zealand: IEEE, 2016: 1 – 6.

- [13] VILLWOCK S, PACAS M. Application of the Welch-method for the identification of two- and three-mass-systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2008, 55(1): 457 – 466.
- [14] MOMTONEN J, NEVARANTA N, LINDH T, et al. Experimental identification and parameter estimation of the mechanical driveline of a hybrid bus. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 65(7): 5921 – 5930.
- [15] LI Yanjun, ZHANG Ke. System Identification Theory and Application. Beijing: National Defence Industry Press, 2003. (李言俊, 张科. 系统辨识理论及应用. 北京: 国防工业出版社, 2003.)
- [16] ZHOU K, DOYLE J C. Essentials of Robust Control. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1998.

作者简介:

**郑立楷** 博士研究生, 研究方向为电力电子及运动控制, E-mail: 201910102743@mail.scut.edu.cn;

**吴玉香** 教授, 博士生导师, 研究方向为非线性系统的自适应神经 网络控制、机器人控制及故障诊断, E-mail: xyuwu@scut.edu.cn;

**王孝洪** 教授,博士生导师,研究方向为电力电子与电力传动系统 及其控制技术, E-mail: xhwang@scut.edu.cn;

**黄淇松** 硕士研究生, 研究方向为电力电子及运动控制, E-mail: qisong.h@163.com.