第 40 卷第 8 期
2023 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 40 No. 8
Aug. 2023

具有扩散项和Lévy噪声的随机年龄结构种群系统的指数稳定性

韩 婷[1], 李国平[1†], 马维军[2]

(1. 宁夏大学 新华学院, 宁夏 银川 750021; 2. 宁夏大学 信息工程学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 稳定性是种群生物学和控制论研究的重要内容之一. 现实世界中, 外界随机因素对种群稳定性的影响较大. 本文讨论了具有扩散项和Lévy噪声的随机年龄结构种群系统的指数稳定性, 通过运用随机分析理论、Burkholder-Davis-Gundy不等式、Chebyshev不等式等工具对系统随机能量等式中的系数函数进行估计, 得到了新的指数稳定性和几乎必然指数稳定性的充分条件. 最后, 本文给出例子并对其进行数值模拟, 验证了理论的有效性.

关键词: 随机种群系统; 扩散; 噪声; 能量等式; 稳定性

引用格式: 韩婷, 李国平, 马维军. 具有扩散项和Lévy噪声的随机年龄结构种群系统的指数稳定性. 控制理论与应用, 2023, 40(8): 1449 – 1456

DOI: 10.7641/CTA.2022.11189

Exponential stability of stochastic age-structured population system with diffusion and Lévy noise

HAN Ting[1], LI Guo-ping[1†], MA Wei-jun[2]

(1. Xinhua College of Ningxia University, Yinchuan Ningxia 750021, China;
2. School of Information Engineering, Ningxia University, Yinchuan Ningxia 750021, China)

Abstract: Stability is one of the most important topics in population biology and control. In the real world, external random factors have a great influence on the stability of population. In this paper, we focus on the exponential stability for a stochastic age-structured population system with diffusion and Lévy noise. With the help of the stochastic analysis theory , the Burkholder-Davis-Gundy inequality, and the Chebyshev inequality et al., the coefficients functions in the stochastic energy equality of the system are estimated. Some novel sufficient conditions on exponential stability and almost sure exponential stability are established. Finally, an example and its numerical simulation are given to illustrate the effectiveness of the theoretical results.

Key words: stochastic population system; diffusion; noise; energy equality; stability

Citation: HAN Ting, LI Guoping, MA Weijun. Exponential stability of stochastic age-structured population system with diffusion and Lévy noise. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(8): 1449 – 1456

1 引言

生物种群模型主要用于研究种群的密度和数量的发展规律, 是当今社会科学和自然科学研究中的重要课题. 对种群模型的研究, 有助于理解种群系统的动态特性, 为短期和长期预测种群数量, 发现种群控制规律和制定生物保护政策提供严格的数学基础和新的计算方法. 研究过程中不仅要考虑随时间的变化规律, 还需考虑种群的年龄、外界环境、空间分布等因素的影响. 因此建立合适的种群系统具有重要的理论价值和现实意义. 事实上, 学者根据不同生物群体, 已建立许多种群数学模型, 包括确定性种群系统和随机种群系统.

常用的确定性模型有Malthus模型和Logistc模型[1]. 由于不同年龄的种群的生物学特征有着明显差异, 文献[2]在上述模型基础上给出了具有年龄结构的种群模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial a}+\dfrac{\partial N}{\partial t}=-\mu(t,a)N,\\ N(t,0)=\displaystyle\int_0^\infty \beta(t,a)N(t,a)\mathrm{d}a,\\ N(0,a)=N_0(a),\\ N(t)=\displaystyle\int_0^\infty N(t,a)\mathrm{d}a,\end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2021−12−06; 录用日期: 2022−06−21.

†通信作者: E-mail: lgp_125@163.com.

本文责任编委: 邓飞其.

宁夏自然科学基金项目(2022AAC03642, 2023AAC03017), 国家自然科学基金项目(62063028), 宁夏高等学校科学研究项目(NGY2022114)资助.
Supported by the Natural Science Foundation of Ningxia (2022AAC03642, 2023AAC03017), the National Natural Science Foundation of China (62063028) and the Scientific Research Project of Ningxia Higher Education Institutions (NGY2022114).

其中: a表示年龄, t表示时间, $\beta(t,a)$表示种群在年龄a时的生育率, $\mu(t,a)$表示种群在年龄a时的死亡率, $N(t,a)$表示时刻t年龄为a的种群密度. 种群在生长的过程中会出现迁徙现象. 文献[3–4]建立了具有扩散项的年龄结构的种群模型以刻画该现象.

现实世界中, 种群还受外界随机因素的影响. 一方面种群会经常受环境噪声的干扰. 由Brown运动驱动的具有扩散的随机年龄结构种群系统已受到广泛关注. 一个经典的具有扩散项的年龄结构随机种群系统可以表示为

$$\begin{cases} \mathrm{d}_t N = [-\dfrac{\partial N}{\partial a} - \mu(t,a,x)N + k(t,a)\Delta N + \\ \qquad f(t,N)]\mathrm{d}t + g(t,N)\mathrm{d}B(t), \\ \qquad\qquad (a,x) \in J,\ t>0, \\ N(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x)N(t,a,x)\mathrm{d}a, \\ \qquad\qquad x \in X,\ t>0, \\ N(0,a,x) = N_0(a,x),\ (a,x)\in J, \\ N(t,a,x) = 0, \\ \quad (a,x) \in (0,A)\times\partial X,\ t>0. \end{cases} \tag{2}$$

其中: $A>0, x\in X\subset\mathbb{R}^n(1\leqslant n\leqslant 3), J=(0,A)\times X$, $\mathrm{d}_t N = \dfrac{\partial N}{\partial t}\mathrm{d}t$, $N(t,a,x)$, $\beta(t,a,x)$, $\mu(t,a,x)$分别表示时刻t年龄为a的种群在空间x的密度、生育率和死亡率, Δ表示关于空间变量x的Laplace算子, $k(t,a)>0$是扩散系数, $f(t,N)$表示外部环境对种群系统的影响, $g(t,N)$表示Brown噪声的密度. 许多学者从不同角度讨论了该系统的性质[5–9]. 其中文献[5]研究了具有年龄结构的随机种群系统解的存在性、唯一性与指数稳定性. 文献[7]考虑了具有年龄结构随机种群系统的半隐式Euler法的数值解的均方收敛性.

另一方面, 种群可能会受到地震、飓风、传染病爆发、有毒污染物泄露等一些突发性大的随机扰动, 如COVID-19对人类造成的影响. 为描述此类现象在系统(2)中引入Lévy噪声更加符合实际情形. 因此本文研究如下具有扩散项和Lévy噪声的随机年龄结构种群系统:

$$\begin{cases} \mathrm{d}_t N = [-\dfrac{\partial N}{\partial a} - \mu(t,a,x)N + k(t,a)\Delta N + \\ \qquad f(t,N)]\mathrm{d}t + g(t,N)\mathrm{d}B(t) + \\ \qquad \int_U h(t,N,u)\tilde{P}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u), \\ \qquad\qquad (a,x) \in J,\ t>0, \\ N(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x)N(t,a,x)\mathrm{d}a, \\ \qquad\qquad x \in X,\ t>0, \\ N(0,a,x) = N_0(a,x),\ (a,x)\in J, \\ N(t,a,x) = 0, \\ \quad (a,x) \in (0,A)\times\partial X,\ t>0. \end{cases} \tag{3}$$

其中: $h(t,N,u)$表示Lévy噪声的强度, $\tilde{P}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u) = P(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u) - \nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}t$是与$B(t)$独立的Poisson补偿过程, $P(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)$表示在可测集$U$上具有有限特征测度$\nu$的Poisson计数测度. 关于由Lévy过程驱动的随机微分方程理论相对成熟[10–18]. 然而, 将Lévy过程引入到随机年龄结构种群系统中的研究较少. 文献[10]讨论了由Lévy过程驱动的随机种群系统的解的存在性及渐近性质.

事实上, 自然环境中各种随机因素对种群系统稳定性的影响较大, 而系统的稳定性为种群系统的最优控制、数值解的收敛性等研究奠定了基础, 对生物资源的可持续发展和利用也起着决定性作用. 因此对系统(3)稳定性的研究尤为重要. 目前, 稳定性理论的内容得到了不断扩大和完善. 文献[19]给出了混合随机微分方程稳定性的充分条件. 文献[20]讨论了具有大脉冲时滞的线性脉冲系统的稳定性. 但关于随机年龄结构种群系统的稳定性的研究较少, 且研究方法主要采用Lyapunov方法[7,9,21–22]和Coercivity条件[5,14]等.

基于以上讨论, 本文主要研究具有扩散项和Lévy噪声的随机年龄结构种群系统的指数稳定性. 本文的创新如下:

1) 构建了具有扩散项和Lévy噪声的随机年龄结构种群系统. 该系统对种群可能会受到如地震、飓风、传染病爆发、有毒污染物泄露等一些突发性的随机现象的描述更具现实意义;

2) 通过能量等式的方法, 给出了新的解的指数稳定性和几乎必然指数稳定性的充分条件.

2 预备知识

令$V=\{\varphi|\varphi\in L^2(J),\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial a}\in L^2(J)\}$, 其中: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}$是广义偏导数, V是Sobolev空间. $H=L^2(J)$, 显然有

$$V \hookrightarrow H \equiv H^* \hookrightarrow V^*,$$

其中V^*是V的对偶空间. 用$\|\cdot\|$, $|\cdot|$和$\|\cdot\|_*$分别表示空间V, H和V^*上的范数, 用$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示对偶空间$V$和$V^*$的内积, $(\cdot,\cdot)$表示空间H上的内积, l是正常数使得对任意$x\in V$都有$|x|^2\leqslant l\|x\|^2$.

令$(\Omega,\mathcal{F},P)$是具有滤波$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ (满足通常的条件: 单调递增且右连续; $\mathcal{F}_0$包括所有P–零测集)的完备概率空间. $B(t)$是定义在该空间上的Wiener过程, 在可分的Hilbert空间K中取值且具有增量协方差算子Q. $G\in\mathcal{L}(K,H)$是从K到H的所有有界线性算子构成的空间, $\|G\|_2$表示其Hilbert-Schmidt范数, 即$\|G\|_2^2=\mathrm{tr}(GQG^*)$.

令$C:=C([0,T];H)$是所有从$[0,T]$到H的连续函数构成的空间, 其范数为$\|\psi\|_C=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant T}|\psi(s)|$,

$L_V^2=L^2([0,T];V)$, $L_H^2=L^2([0,T];H)$. $I^2([0,T];V)$是定义在$[0,T]$上满足$E\int_0^{\mathrm{T}}|P(t)|^2\mathrm{d}t<\infty$的所有$V$值可测函数的全体.

由文献[22], 系统(3)的能量等式定义如下:

定义 1　设$N(t)$是定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上$\mathcal{F}_t$适应的随机过程, 若满足以下条件, 则$N(t)$称为系统(3)的能量解:

1) $N(t)\in I^2([0,T];V)\cap L^2(\Omega;C([0,T];H))$, $T>0$;

2) 对任意的$t\in[0,T]$, 下列方程在空间V^*上几乎必然成立:

$$\begin{cases} N(t)=N_0-\displaystyle\int_0^t\frac{\partial N(s)}{\partial a}\mathrm{d}s-\int_0^t\mu(s,a,x)N(s)\mathrm{d}s+ \\ \qquad\displaystyle\int_0^t k(s,a)\Delta N(s)\mathrm{d}s+\int_0^t f(s,N(s))\mathrm{d}s+ \\ \qquad\displaystyle\int_0^t g(s,N(s))\mathrm{d}B(s)+ \\ \qquad\displaystyle\int_0^t\int_U h(s,N(s),u)\tilde{P}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u), \\ \qquad\qquad (a,x)\in J,\ t>0, \\ N(t,0,x)=\displaystyle\int_0^A\beta(t,a,x)N(t,a,x)\mathrm{d}a, \\ \qquad\qquad x\in X,\ t>0, \\ N(0,a,x)=N_0(a,x),\ (a,x)\in J, \\ N(t,a,x)=0, \\ \quad (a,x)\in(0,A)\times\partial X,\ t>0, \end{cases}$$

记$N_0:=N(0,a,x)$, $N(t):=N(t,a,x)$;

3) 对任意的$t\in[0,T]$, 下列能量等式成立:

$$\begin{aligned}|N(t)|^2=&|N_0|^2+2\int_0^t\langle N(s),-\frac{\partial N(s)}{\partial a}- \\ &\mu(s,a,x)N(s)+k(s,a)\Delta N(s)\rangle\mathrm{d}s+ \\ &2\int_0^t(N(s),f(s,N(s)))\mathrm{d}s+ \\ &2\int_0^t(N(s),g(s,N(s)))\mathrm{d}B(s)+ \\ &\int_0^t\|g(s,N(s))\|_2^2\mathrm{d}s+ \\ &\int_0^t\int_U|h(s,N(s),u)|^2\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s+ \\ &\int_0^t\int_U|h(s,N(s),u)|^2\tilde{P}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)+ \\ &2\int_0^t\int_U(N(s),h(s,N(s),u))\tilde{P}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u).\end{aligned}$$

定义 2　如果系统(3)的能量解$N(t)$满足下列不等式:

$$E|N(t)|^2\leqslant C\mathrm{e}^{-\alpha t},\ t\geqslant 0,$$

其中: $\alpha>0$, $C=C(N_0)>0$, 则系统(3)的能量解$N(t)$当$t\to\infty$时均方指数收敛于零. 进一步, 如果任意一能量解当$t\to\infty$时均方指数收敛于零, 并且零是系统(3)的解, 则该零解在均方意义下指数稳定.

定义 3　如果存在正常数$C=\delta(\epsilon)>0,\alpha>0$和$\Omega_0\subset\Omega$, $\mathbb{N}(\Omega_0)=0$, 并且对于每个$\omega\in\Omega-\Omega_0$, 都存在正的随机数$T(\omega)$使得

$$|N(t)|^2\leqslant C\mathrm{e}^{-\alpha t},\ t\geqslant T(\omega),$$

则称系统(3)的能量解$N(t)$当$t\to\infty$时几乎必然指数收敛于零. 进一步, 如果任意一能量解当$t\to\infty$时几乎必然指数收敛于零, 并且零是系统(3)的解, 则该零解几乎必然指数稳定.

引理 1[23–24]　令$\theta=1$或2. 假设$h_1:\mathbb{R}_+\times U\to H(\mathbb{R}_+=[0,\infty))$是可测函数且满足

$$\int_0^t\int_U E|h_1(s,u)|^\theta\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s<\infty,$$

则Burkholder不等式成立, 即

$$\begin{aligned}&E(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\int_0^s\int_U h_1(s,u)\tilde{P}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)|^\theta)\leqslant \\ &cE\int_0^t\int_U|h_1(s,u)|^\theta\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s,\ c>0.\end{aligned}$$

为了研究系统(3)的稳定性, 假设以下条件成立:

假设 1　$f(t,0)=0$, $g(t,0)=0$, $h(t,0)=0$.

假设 2　存在常数$k_1,k_2,k_3>0$使得对任意N_1, $N_2\in C$, 下列不等式成立:

$$\begin{aligned}&|f(t,N_1)-f(t,N_2)|\leqslant k_1\|N_2-N_1\|_C, \\ &\|g(t,N_1)-g(t,N_2)\|_2\leqslant k_2\|N_2-N_1\|_C, \\ &\|h(t,N_1)-h(t,N_2)\|_2\leqslant k_3\|N_2-N_1\|_C.\end{aligned}$$

假设 3　$\mu(t,a,x)$, $\beta(t,a,x)$在$\mathbb{R}_+\times\bar{J}$连续, $k(t,a)$在$\mathbb{R}_+\times(0,A)$连续, 且

$$\begin{aligned}&0\leqslant\mu_0\leqslant\mu(t,a,x)<\infty, \\ &0\leqslant\beta(t,a,x)\leqslant\bar{\beta}<\infty, \\ &0\leqslant k_0\leqslant k(t,a)<\infty.\end{aligned}$$

假设 4　$(N,f(t,N))\leqslant(\mu_1+k_1(t))|N|^2+l_1(t)$, 其中: $\mu_1\geqslant 0$是常数, $k_1(t)$, $l_1(t)$是可积函数, 且存在实数$\rho>0, M_{k_1}, M_{l_1}\geqslant 1$使得

$$k_1(t)\leqslant M_{k_1}\mathrm{e}^{-\rho t},\ l_1(t)\leqslant M_{l_1}\mathrm{e}^{-\rho t},\ t\geqslant 0.$$

假设 5　$\|g(t,N)\|_2^2\leqslant(\mu_2+k_2(t))|N|^2+l_2(t)$, 其中: $\mu_2\geqslant 0$是常数, $k_2(t)$, $l_2(t)$是非负可积函数, 且存在实数$\rho>0$, M_{k_2}, $M_{l_2}\geqslant 1$使得

$$k_2(t)\leqslant M_{k_2}\mathrm{e}^{-\rho t},\ l_2(t)\leqslant M_{l_2}\mathrm{e}^{-\rho t},\ t\geqslant 0.$$

假设 6

$$\begin{aligned}&\int_U|h(t,N,u)|^2\nu(\mathrm{d}u)\leqslant \\ &\int_U u^2\nu(\mathrm{d}u)[(\mu_3+k_3(t))|N|^2+l_3(t)],\end{aligned}$$

其中: $\int_U u^2\nu(\mathrm{d}u)<\infty$, $\mu_3\geqslant 0$是常数, $k_3(t)$, $l_3(t)$是

非负可积函数, 且存在常数$\rho>0, M_{k_3}, M_{l_3}\geqslant 1$使得

$$k_3(t)\leqslant M_{k_3}\mathrm{e}^{-\rho t},\ l_3(t)\leqslant M_{l_3}\mathrm{e}^{-\rho t},\ t\geqslant 0.$$

注 1 由假设1–3并应用文献[5]的方法, 易证系统(3)存在唯一解. 本文在系统(3)存在唯一解的基础上进一步讨论系统的稳定性.

3 能量解的指数稳定性

本节主要讨论系统(3)能量解的均方指数稳定性和几乎必然指数稳定性. 下面, 首先给出均方指数稳定性的结果.

定理 1 若假设3–6成立, 且

$$2\frac{k_0}{l}+2\mu>A\bar{\beta}^2+2\mu_1+\mu_2+\mu_3\int_U u^2\nu(\mathrm{d}u), \tag{4}$$

则对于系统(3)的任意能量解$N(t)$, 都存在$\alpha\in(0,\rho)$和$C=C(N_0)>0$使得

$$E|N(t)|^2\leqslant C\mathrm{e}^{-\alpha t},\ t\geqslant 0, \tag{5}$$

即系统(3)的能量解$N(t)$在均方意义下指数稳定.

证 取$\alpha\in(0,\rho)$使得

$$2\frac{k_0}{l}+2\mu_0> \alpha+A\bar{\beta}^2+2\mu_1+\mu_2+\mu_3\int_U u^2\nu(\mathrm{d}u). \tag{6}$$

将能量等式用于$\mathrm{e}^{\alpha t}|N(t)|^2$可得

$$\begin{aligned}&E\mathrm{e}^{\alpha t}|N(t)|^2=\\&E|N_0|^2+\int_0^t\alpha\mathrm{e}^{\alpha s}E|N(s)|^2\mathrm{d}s-\\&2E\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\langle N(s),\frac{\partial N(s)}{\partial a}\rangle\mathrm{d}s-\\&2E\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\langle N(s),\mu(s,a,x)N(s)\rangle\mathrm{d}s+\\&2E\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\langle N(s),k(s,a)\varDelta N(s)\rangle\mathrm{d}s+\\&2E\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}(N(s),f(s,N(s)))\mathrm{d}s+\\&E\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|g(s,N(s))\|_2^2\mathrm{d}s+\\&E\int_0^t\int_U\mathrm{e}^{\alpha s}|h(s,N(s),u)|^2\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

根据文献[14]的引理1有

$$\begin{aligned}&-\langle N(s),\frac{\partial N(s)}{\partial a}\rangle=\\&-\int_J\frac{\partial N(s)}{\partial a}N(s)\mathrm{d}a\mathrm{d}x=\\&-\int_X\int_0^A N(s)\mathrm{d}a(N(s))\mathrm{d}x=\\&\frac{1}{2}\int_X(\int_0^A\beta(s,a,x)N(s)\mathrm{d}a)^2\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1}{2}\int_X(\int_0^A\beta^2(s,a,x)\mathrm{d}a\int_0^A N^2(s)\mathrm{d}a)\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1}{2}A\bar{\beta}^2|N(s)|^2,\end{aligned} \tag{7}$$

由假设3和式(7)可得

$$\begin{aligned}&E\mathrm{e}^{\alpha t}|N(t)|^2\leqslant\\&E|N_0|^2+(\alpha+A\bar{\beta}^2-\\&2\frac{k_0}{l}-2\mu_0)\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}E|N(s)|^2\mathrm{d}s+\\&2E\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}(N(s),f(s,N(s)))\mathrm{d}s+\\&E\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|g(s,N(s))\|_2^2\mathrm{d}s+\\&E\int_0^t\int_U\mathrm{e}^{\alpha s}|h(s,N(s),u)|^2\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由假设4–6和式(6)可得

$$\begin{aligned}&E\mathrm{e}^{\alpha t}|N(t)|^2\leqslant\\&E|N_0|^2+\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}(\gamma_1(s)+\gamma_2(s)E|N(s)|^2)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中:

$$\gamma_1(s)=2l_1(s)+l_2(s)+\int_U u^2\nu(\mathrm{d}u)l_3(s),$$
$$\gamma_2(s)=2k_1(s)+k_2(s)+\int_U u^2\nu(\mathrm{d}u)k_3(s).$$

下面分3种情形进行讨论:

情形 1 当$\gamma_1(s)\leqslant 0, \gamma_2(s)\leqslant 0$或$\gamma_1(s)>0, \gamma_2(s)<0$时, 则式(5)成立.

情形 2 当$\gamma_1(s)<0, \gamma_2(s)>0$时, 由Gronwall不等式则式(5)成立.

情形 3 当$\gamma_1(s)>0, \gamma_2(s)>0$时, 利用Gronwall引理可得

$$\begin{aligned}&E\mathrm{e}^{\alpha t}|N(t)|^2\leqslant\\&E|N_0|^2\mathrm{e}^{\int_0^t 2\gamma_2(s)\mathrm{d}s}+\mathrm{e}^{\int_0^t 2\gamma_2(s)\mathrm{d}s}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\gamma_1(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

综上可得, 存在正实数$C=C(N_0)>0$使得

$$E|N(t)|^2\leqslant C\mathrm{e}^{-\alpha t},\ t\geqslant 0.$$

证毕.

注 2 定理1给出了随机年龄结构种群系统(3)均方指数稳定性的充分条件. 该结果表明, 系统的稳定性与种群系统的生育率$\beta(t,a,x)$, 死亡率$\mu(t,a,x)$、扩散系数$k(t,a)$、外界环境的影响$f(t,N)$、Brown噪声的密度$g(t,N)$以及Lévy噪声的强度$h(t,N,u)$有关. 即当上述参数满足假设3–6时随机年龄结构种群系统在均方意义下指数稳定.

定理 2 假设定理1的条件成立, 则存在$T(\omega)>0$使得对所有$t>T(\omega)$, 下式依概率1成立:

$$|N(t)|^2\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}},$$

即系统(3)的能量解$N(t)$几乎必然指数稳定.

证　令$m \geqslant 1$是任意给定的自然数, 令

$$k(t)=2k_1(t)+32\mu_2+33k_2(t)+k_3(t)\int_U u^2\nu(\mathrm{d}u)+(c_1+c_2)(\mu_3+k_3(t))\int_U u^2\nu(\mathrm{d}u),$$

$$l(t)=2l_1(t)+33l_2(t)+(1+c_1+c_2)l_3(t)\int_U u^2\nu(\mathrm{d}u).$$

由于$N(t)$是系统(3)的能量解, 因此对于任意$t\in[m,m+1]$都有

$$|N(t)|^2=|N(m)|^2+2\int_m^t\langle N(s),-\frac{\partial N(s)}{\partial a}-\mu(s,a,x)N(s)+k(s,a)\varDelta N(s)\rangle\mathrm{d}s+2\int_m^t\big(N(s),f(s,N(s))\big)\mathrm{d}s+2\int_m^t\big(N(s),g(s,N(s))\big)\mathrm{d}B(s)+\int_m^t\|g(s,N(s))\|_2^2\mathrm{d}s+\int_m^t\int_U|h(s,N(s),u)|^2\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s+\int_m^t\int_U|h(s,N(s),u)|^2\tilde{P}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)+2\int_m^t\int_U\big(N(s),h(s,N(s),u)\big)\tilde{P}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),$$

则

$$E(\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|N(t)|^2)\leqslant E|N(m)|^2+2E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}\int_m^t(N(s),g(s,N(s)))\mathrm{d}B(s)]+2E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}\int_m^t(N(s),f(s,N(s)))\mathrm{d}s]+E\int_m^{m+1}\|g(s,N(s))\|_2^2\mathrm{d}s+2E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}\int_m^t\langle N(s),-\frac{\partial N(s)}{\partial a}-\mu(s,a,x)N(s)+k(s,a)\varDelta N(s)\rangle\mathrm{d}s]+E\int_m^{m+1}\int_U|h(s,N(s),u)|^2\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s+E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}\int_m^t\int_U|h(s,N(s),u)|^2\tilde{P}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)]+2E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}\int_m^t\int_U(N(s),h(s,N(s),u))\times\tilde{P}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)].$$

根据引理1、假设3和式(7)以及文献[6]可知存在常数$c_1>0$使得

$$E(\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|N(t)|^2)\leqslant E|N(m)|^2+(A\bar{\beta}^2-2\frac{k_0}{l}-2\mu_0)\int_m^{m+1}E|N(s)|^2\mathrm{d}s+2E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}\int_m^t(N(s),\ f(s,N(s)))\mathrm{d}s]+E\int_m^{m+1}\|g(s,N(s))\|_2^2\mathrm{d}s+2E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}\int_m^t(N(s),\ g(s,N(s)))\mathrm{d}B(s)]+(1+c_1)E\int_m^{m+1}\int_U|h(s,N(s),u)|^2\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s+2E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|\int_m^t\int_U(N(s),h(s,N(s),u))\tilde{P}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)|].$$

根据Burkholder-Davis-Gundy不等式, 可得

$$2E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}\int_m^t(N(s),g(s,N(s)))\mathrm{d}B(s)]\leqslant\frac{1}{2}E(\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|N(t)|^2)+32E\int_m^{m+1}\|g(s,N(s))\|_2^2\mathrm{d}s.$$

由引理1可知存在常数$c_2>0$使得

$$2E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|\int_m^t\int_U(N(s),h(s,N(s),u))\tilde{P}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)|]\leqslant\frac{1}{4}E(\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|N(t)|^2)+c_2E\int_m^{m+1}\int_U|h(s,N(s),u)|^2\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s.$$

因此,

$$E(\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|N(t)|^2)\leqslant 4E|N(m)|^2+4(A\bar{\beta}^2-2\frac{k_0}{l}-2\mu_0)\int_m^{m+1}E|N(s)|^2\mathrm{d}s+8E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}\int_m^t(N(s),f(s,N(s)))\mathrm{d}s]+132E\int_m^{m+1}\|g(s,N(s))\|_2^2\mathrm{d}s+4(1+c_1+c_2)E\int_m^{m+1}\int_U|h(s,N(s),u)|^2\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s.\tag{8}$$

由假设4–6易得

$$E[\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}\int_m^t(N(s),\ f(s,N(s)))\mathrm{d}s]\leqslant\int_m^{m+1}[(\mu_1+k_1(s))E|N(s)|^2+l_1(s)]\mathrm{d}s,\tag{9}$$

$$E\int_m^{m+1}\|g(s,N(s))\|_2^2\mathrm{d}s\leqslant\int_m^{m+1}[(\mu_2+k_2(s))E|N(s)|^2+l_2(s)]\mathrm{d}s,\tag{10}$$

$$E\int_m^{m+1}\int_U |h(s,N(s),u)|^2\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s \leqslant \int_m^{m+1}\int_U u^2\nu(\mathrm{d}u)[(\mu_3+k_3(s))\times E|N(s)|^2+l_3(s)]\mathrm{d}s. \tag{11}$$

将式(9)–(11)代入式(8)并结合式(4)有

$$E(\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|N(t)|^2)\leqslant 4E|N(m)|^2+4\int_m^{m+1}(k(s)E|N(s)|^2+l(s))\mathrm{d}s\leqslant 4M\mathrm{e}^{-\alpha m}+4\int_m^{m+1}M\mathrm{e}^{-\alpha s}(k(s)+l(s)\mathrm{e}^{\alpha s})\mathrm{d}s. \tag{12}$$

显然, 由假设3–6可知$k(t)$和$l(t)$是有界函数, 故存在常数$C_1>0$使得

$$k(t)+l(t)\mathrm{e}^{\alpha(m+1)}\leqslant C_1, \tag{13}$$

结合式(12)–(13)可得

$$E(\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|N(t)|^2)\leqslant 4M\mathrm{e}^{-\alpha m}(1+\frac{C_1}{\alpha}),$$

由Chebyshev不等式, 对于任意固定的正实数ϵ_m都有

$$P(\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|N(t)|^2>\epsilon_m^2)\leqslant \frac{E(\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|N(t)|^2)}{\epsilon_m^2}\leqslant\frac{4M\mathrm{e}^{-\alpha m}(1+\frac{C_1}{\alpha})}{\epsilon_m^2},$$

由于ϵ_m是任意的, 可选$\epsilon_m^2=\mathrm{e}^{-\frac{\alpha m}{2}}$使得

$$P(\sup_{m\leqslant t\leqslant m+1}|N(t)|^2>\epsilon_m^2)\leqslant 4M\mathrm{e}^{-\frac{\alpha m}{2}}(1+\frac{C_1}{\alpha}),$$

最后, 根据Borel-Cantelli引理, 存在$T(\omega)>0$对所有$t>T(\omega)$几乎必然有

$$|N(t)|^2\leqslant \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{2}}.$$

证毕.

注 3 定理2应用引理1、Burkholder-Davis-Gundy不等式、Chebyshev不等式并在定理1的条件下, 从理论上给出了随机年龄结构种群系统(3)的能量解的几乎必然指数稳定的充分条件.

注 4 事实上, 对于一般的随机非线性系统很难构造合适的Lyapunov函数来讨论系统的稳定性, 尤其是随机非线性偏微分方程. 此外, 文献[5,14]中的Coercivity条件较强. 因此, 如何选择合适的方法来研究随机年龄结构种群系统(3)的稳定性尤为重要. 定理1和定理2应用了随机能量等式的方法, 即对系统(3)的能量等式的系数函数进行估计, 得到系统能量解的稳定性的条件. 该方法用于讨论随机非线性系统的稳定性较为有效.

4 例子

下面给出例子说明上述结论的有效性.

假设$B(t)$, $t\geqslant 0$是实的标准Brown运动, $\tilde{P}(\cdot,\cdot)$是$[1,\infty)$上的具有有限特征测度ν的Poisson计数测度, 使得$\int_1^\infty u^2\nu(\mathrm{d}u)<\infty$. 令$b_1,b_2,b_3,k$是正常数, $p_1,p_2,p_3:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$是连续函数, p_1^2, p_2^2, p_3^2为递减的有界可积函数.

考虑如下具有扩散项和Lévy噪声的随机年龄结构种群系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}_tN=[-\dfrac{\partial N}{\partial a}-\dfrac{x}{(A-a)^2}N+a^2\Delta N+\\ \quad((b_1+p_1(t))N+\mathrm{e}^{-kt}\bar{m})]\mathrm{d}t+\\ \quad(b_2+p_2(t))N\mathrm{d}B(t)+\\ \quad\int_1^\infty(b_3+p_3(t))Nu\tilde{P}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\\ \quad(a,x)\in(0,A)\times(0,1),\ t>0,\\ N(t,0,x)=\int_0^A\dfrac{x}{(A-a)^2}N(t,a,x)\mathrm{d}a,\\ \quad x\in(0,1),\ t>0,\\ N(0,a,x)=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{A-a}},\\ \quad(a,x)\in(0,A)\times(0,1),\\ N(t,a,x)=0,\\ \quad(a,x)\in(0,A)\times(0,1),\ t>0.\end{cases} \tag{14}$$

在系统(3)中取$H=L^2([0,A]\times[0,1])$, $V=Q([0,A]\times[0,1])$(满足上述边界条件的Sobolev空间), $K=R$, $k(t,a)=a^2$, $\mu(t,a,x)=\beta(t,a,x)=x/(A-a)^2$, $f(t,N)=(b_1+p_1(t)N+\mathrm{e}^{-kt}\bar{m}$, $g(t,N)=(b_2+p_2(t))N$, $h(t,N,u)=(b_3+p_3(t)Nu$, $N_0=x\mathrm{e}^{-1/(A-a)}$.

对于任意$\bar{m}\in H$, $|\bar{m}|<\infty$有

$$(N,f(t,N))\leqslant 2(b_1^2+p_1^2(t)|N|^2+\mathrm{e}^{-2kt}|\bar{m}|^2,$$
$$\|g(t,N)\|_2^2=\|(b_2+p_2(t))N\|_2^2\leqslant 4(b_2^2+p_2^2(t))|N|^2,$$
$$\int_1^\infty|h(t,N,u)|^2\nu(\mathrm{d}u)=\int_1^\infty|(b_3+p_3(t))Nu|^2\nu(\mathrm{d}u)\leqslant 2(b_3^2+p_3^2(t))\int_1^\infty u^2\nu(\mathrm{d}u)|N|^2.$$

令$\mu_1=2\bar{b}_1^2$ $(\bar{b}_1^2=b_1^2+\dfrac{1}{4})$, $k_1(t)=2p_1^2(t)$, $l_1(t)=\mathrm{e}^{-2kt}|m|^2$, $\mu_2=4b_2^2$, $k_2(t)=4p_2^2(t)$, $l_2(t)=0$, $\mu_3=2b_3^2$, $k_3(t)=2p_3^2(t)$, $l_3(t)=0$.

显然, 假设3–6以及式(4)满足. 因此, 由定理1–2可得, 系统(14)的能量解指数稳定且几乎必然指数稳定.

对于一般的随机微分方程很难求出其解析解, 下面运用Euler方法对上述例子的能量解进行数值模拟.

在系统(14)中选取满足条件的系数函数$k(t,a)=a^2$, $\mu(t,a,x)=\beta(t,a,x)=1/2(1-a)^2$, $f(t,N)=1/2\,tN+\mathrm{e}^{-a^2t}$, $g(t,N)=\big(1+1/2\,t\big)N$, $h(t,N,u)=\sin N$, $N_0=\mathrm{e}^{-1/(A-a)}$. 分别采用半隐式Euler法和隐式Euler法对能量解进行数值模拟, 结果如图1–2所示. 从图中可看出, 受Lévy噪声的影响, 种群密度的局部

变化差异明显. 随着种群年龄增长及时间变化, 种群密度逐渐趋于平稳.

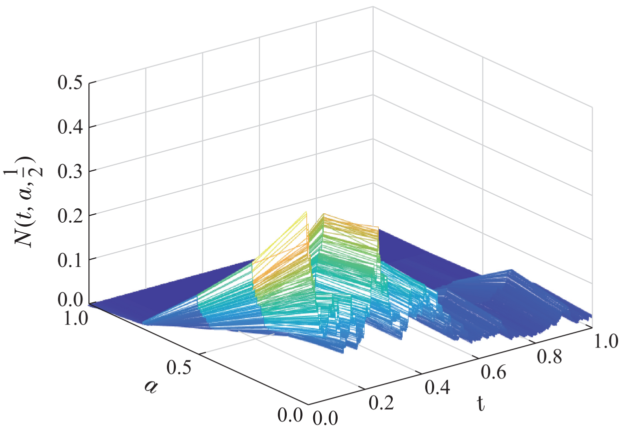

图 1　半隐式Euler数值模拟结果

Fig. 1　Semi-implicit Euler numerical simulation results

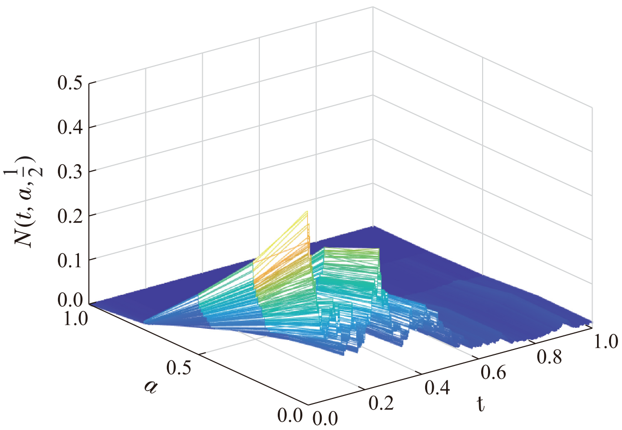

图 2　隐式Euler数值模拟结果

Fig. 1　Implicit Euler numerical simulation results

5　结论

为了研究随机环境对生物种群的影响, 本文讨论了具有扩散项和Lévy噪声的年龄结构随机种群系统. 运用Burkholder-Davis-Gundy不等式、Chebyshev不等式等分析工具对系统的能量等式中的系数函数进行估计, 给出了新的解的指数稳定性和几乎必然指数稳定性的充分条件, 并结合具体例子及其数值模拟加以验证. 该方法不仅有效解决了研究非线性系统的稳定性及控制问题中构造合适的Lyapunov函数时的困难, 同时又避免使用较强的Coercivity条件, 对于研究随机非线性系统的稳定性较为有效. 此外, 本文的方法亦可用于讨论随机时滞年龄结构种群系统的稳定性和数值解的稳定性, 为随机微分方程的稳定性问题的研究提供了理论依据, 对生物资源的可持续发展和利用具有指导意义.

参考文献:

[1] WANG Gaoxiong, ZHOU Zhiming, ZHU Siming, et al. *Ordinary Differential Equation*. Beijing: Higher Education Press, 2020: 4 – 5.
(王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程. 北京: 高等教育出版社. 2020: 4 – 5.)

[2] ANITA S. *Analysis and Control of Age-Dependent Population Dynamics*. Dordrecht: Springer, 2010: 22.

[3] FU Jun, LI Jianquan, CHEN Renzhao. Generalized solution and harvest control of age-dependent population spatial diffusion systems. *Control Theory & Applications*, 2005, 4(22): 588 – 596.
(付军, 李健全, 陈任昭. 年龄相关的种群空间扩散系统的广义解与收获控制. 控制理论与应用, 2005, 4(22): 588 – 596.)

[4] WONG Y, MEI M, LI G R. Nonlinear stability of traveling wave fronts in an age-structured reaction-diffusion population model. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2008, 5(1): 123 – 134.

[5] ZANG Q M, LIU W A, NIE Z K. Existence, uniqueness and exponential stability for stochastic age-dependent population. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 154(1): 183 – 201.

[6] ZANG Q M. Exponential stability of numerical solutions to a stochastic age-structured population system with diffusion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 220(1): 22 – 33.

[7] PANG W K, LI R H. Convergence of the semi-implicit Euler method for stochastic age-dependent population equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 195(2): 466 – 474.

[8] WANG Z, LI X. Stability of non-densely defined semilinear stochastic evolution equations with application to the stochastic age-structured model. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2015, 27(2): 261 – 281.

[9] KOROBEINIKOV A, SHAIKHET L. Global asymptotic properties of a stochastic model of population growth. *Applied Mathematics Letters*, 2021, 121: 107429.

[10] MA W J, DING B C, ZHANG Q M. The existence and asymptotic behaviour of energy solutions to stochastic age-dependent population equations driven by Lévy processes. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 256: 656 – 665.

[11] ZHU Q X. Stability analysis of stochastic delay differential equations with Lévy noise. *Systems & Control Letters*, 2018, 118: 62-68.

[12] DO K D. Inverse optimal control of stochastic systems driven by Lévy processes. *Automatica*, 2019, 107: 539 – 550.

[13] PEI W Y, XI Y J, HU Y Z, et al. Active disturbance rejection control approach to output-feedback stabilization of nonlinear system with Lévy noise. *Systems & Control Letters*, 2021, 150: 104898.

[14] MA W J, LUO X H, ZHU Q X. Practical exponential stability of stochastic age-dependent capital system with Lévy noise. *Systems & Control Letters*, 2020, 144: 104759.

[15] YANG J, LIU X Z, LIU X W. Stability of stochastic functional differential systems with semi-Markovian switching and Lévy noise by functional Itô formula and its applications. *Journal of Franklin Institute*, 2020, 357(7): 4458 – 4485.

[16] LI M L, DENG F Q, ZENG X F, et al. Mean-square stability of stochastic system with Markov jump and Lévy noise via adaptive control. *Journal of Franklin Institute*, 2021, 358(2): 1291 – 1307.

[17] DAUS E S, PTASHNYK M, RAITHEL C. Derivation of a fractional cross-diffusion system as the limit of a stochastic many-particle system driven by Lévy processes. *Journal of Differential Equation*, 2022, 309: 386 – 426.

[18] LIU X M. The α-dependence of the invariant measure of stochastic real Ginzburg-Landau equation driven by α-stable Lévy processes. *Journal of Differential Equation*, 2022, 314: 418 – 445.

[19] DENG F Q, LUO Q, MAO X R. Stochastic stabilization of hybrid differential equations. *Automatica*, 2012, 48(9): 2321 – 2328.

[20] LUO S X, DENG F Q, CHEN W H. Stability and stabilization of linear impulsive systems with large impulse-delays: A stabilizing delay perspective. *Automatica*, 2021, 127: 109533.

[21] WU Bin, WANG Changlong, XU Jinfa, et al. Stability criteria of time-varying delay systems with nonlinear perturbations. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(5): 692 – 700.)
(武斌, 王长龙, 徐锦法, 等. 带有非线性扰动的时变时滞系统的稳定性准则. 控制理论与应用, 2017, 34(5): 692 – 700.)

[22] HOU Z T, BAO J H, YUAN C G. Exponential stability of energy solutions to stochastic partial differential equations with variable delays and jumps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, 366(1): 44 – 54.

[23] CAO G L, HE K, ZHANG X Y. Successive approximations of infinite dimensional SDES with jump. *Stochastics Dynamics*, 2005, 5(4): 609 – 619.

[24] HAUSENBLAS E. SPDEs driven by Poisson random measure with non Lipschitz coefficients: Existence results. *Probability Theory and Related Fields*, 2007, 137(1/2): 161 – 200.

作者简介:

韩 婷 讲师, 硕士, 研究方向为随机系统的稳定性与控制、多智能体系统的分布式协调与控制, E-mail: ndhanting@163.com;

李国平 讲师, 硕士, 研究方向为随机系统的稳定性与控制、神经动力学与优化, E-mail: lgp_125@163.com;

马维军 副教授, 博士, 研究方向为随机系统的稳定性与控制、网络化系统的分析与控制、群体行为与群体智能, E-mail: weijunma_2008@sina.com.