

有色量测噪声下带广义未知扰动的递推上限滤波

秦月梅^{1†}, 周倩倩¹, 杨衍波², 梁彦², 潘泉²

(1. 西安邮电大学 自动化学院, 陕西 西安 710121; 2. 西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710129)

摘要: 针对博弈对抗环境下利用快速采样雷达进行非合作目标跟踪带来的有色噪声和未知干扰共存问题, 本文提出有色量测噪声下带广义未知扰动的随机动态系统递推上限滤波. 这里, 有色量测噪声用于描述由于快速采样或持续干扰带来的噪声相关性, 广义未知扰动用于建模博弈对抗对雷达观测带来的异常影响(先验信息缺失). 针对所考虑系统, 通过参数优化实现状态估计误差协方差上限(而不是理论值)的在线递推, 提出有色噪声下上限滤波(CU-BF), 给出状态估计误差协方差最小上限的近似实现, 讨论了所提CUBF的存在性条件. 在具有时变未知扰动和有色量测噪声的目标跟踪仿真中验证了所提方法的有效性.

关键词: 上限滤波; 有色噪声; 广义未知扰动; 状态估计; 随机动态系统

引用格式: 秦月梅, 周倩倩, 杨衍波, 等. 有色量测噪声下带广义未知扰动的递推上限滤波. 控制理论与应用, 2023, 40(8): 1457 – 1465

DOI: 10.7641/CTA.2022.11211

Recursive upper bound filtering with generalized unknown disturbances in the presence of colored measurement noises

QIN Yue-mei^{1†}, ZHOU Qian-qian¹, YANG Yan-bo², LIANG Yan², PAN Quan²

(1. School of Automation, Xi'an University of Posts & Telecommunications, Xi'an Shaanxi 710121, China;

2. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710129, China)

Abstract: For dealing with co-existence of colored noise and unknown interference when tracking the non-cooperative target with the high-speed sampling radar in gaming confrontation, a recursive upper bound filter for stochastic dynamic systems with generalized unknown disturbances in the presence of colored measurement noises is proposed. Here, the colored noise is utilized to depict the correlation at adjacent epochs caused by high-speed sampling or persistent perturbation, while the generalized unknown disturbance is adopted to model these abnormal effects without prior knowledge caused by gaming. By calculating the upper bound of the state estimate error covariance instead of the theoretical one via parameter optimization recursively, the upper bound filter with colored noises, abbreviated as CUBF, is proposed, and the corresponding achievable minimum upper bound filter with colored measurement noises is further put forward. Meanwhile, the existence condition of the proposed CUBF is also discussed. A target tracking example with time-varying unknown disturbances and colored measurement noises is simulated to validate the proposed method.

Key words: upper bound filtering; colored noise; generalized unknown disturbance; state estimation; stochastic systems

Citation: QIN Yuemei, ZHOU Qianqian, YANG Yanbo, et al. Recursive upper bound filtering with generalized unknown disturbances in the presence of colored measurement noises. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(8): 1457 – 1465

1 引言

离散时间动态系统状态估计问题广泛存在于自动控制^[1]、导航制导^[2]、目标跟踪^[3–5]等军、民用领域^[6]. 针对仅受高斯白噪声扰动的线性系统, 卡尔曼滤波给出了最小线性均方误差下的最优估计. 然而在诸如非合作目标跟踪的典型应用场景^[7–8], 高斯白噪声的假

设很难成立. 例如, 由于持续干扰或快速采样等, 导致量测值受有色噪声^[9–10]的影响. 又如, 博弈对抗环境下, 量测的先验标称模型与实际模型往往失配, 使获得的量测数据表征为先验标称模型上施加了缺少先验信息的未知扰动.

一般地, 针对有色噪声处理方法有自适应滤波

收稿日期: 2021–12–11; 录用日期: 2022–08–19.

[†]通信作者. E-mail: qinyuemei@xupt.edu.cn; Tel.: +86 15991695953.

本文责任编辑: 张化光.

国家自然科学基金项目(617033424, 61903299), 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2019JQ–215, 2020JQ–842)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (617033424, 61903299) and the Natural Science Basic Research Program of Shaanxi (2019JQ–215, 2020JQ–842).

法^[11]、状态增广法^[12-13]和量测差分法^[14]。常见的自适应滤波算法^[11]，利用历史残差序列来估计有色噪声的协方差矩阵实现对有色噪声的拟合和修正，但是增大了滤波算法内存和计算量。状态增广法^[13]将有色噪声扩维生成新的状态方程，一方面增加了计算负担；另一方面，重构的系统系数矩阵在滤波过程中可能带来数值不稳定。量测差分法通过相邻历元的观测值线性组合构造出只含有高斯白噪声和一步延迟状态的伪量测模型，有效避免上述两种算法带来的数值问题和病态计算。针对含有色量测噪声的线性系统，文献^[14]对量测差分后的伪量测模型进行3种等效性研究分析，提出了一种更易实现、更易推广到非线性系统的差分法。

实际工业过程中，受目标伪装、欺骗，以及复杂地球磁场干扰影响，量测值获取过程中受有色噪声和未知扰动共存影响。上述算法不具备抵制观测异常和动力学扰动异常影响^[15-16]。实际非合作目标跟踪过程中，复杂外部环境和系统偏差不仅需要考虑有色噪声，还需要进一步考虑广义未知扰动(generalized unknown disturbance, GUD)的存在。这类扰动无任何先验信息故无法利用噪声进行有效建模。针对特性未知GUD的自适应滤波器^[17-19]将系统辨识与滤波有机地结合为一体，对未知参数进行辨识和修正。近年来，针对含GUD的线性系统，文献^[4-5, 19]通过构造上限滤波器，自适应地最小化状态预测误差、新息协方差和估计误差协方差矩阵上界，有效抑制滤波误差的峰值。

现有针对有色噪声和广义未知扰动下的滤波算法研究，不是将复杂干扰建模为协方差未知的零均值随机噪声就是假设GUD有确定的系统模型。例如，文献^[13]将未知扰动建模为协方差未知的不确定噪声，通过确定噪声协方差的扰动域计算未知参数，提出了一种混合不确定系统鲁棒Kalman滤波器。实际上，广义未知扰动具有间断性且无任何先验信息，实际干扰状态模型难以建立。目前，文献^[5]所提的最小上限滤波器针对具有统计约束扰动的离散时间线性随机系统，具有较好的滤波效果，可有效解决广义未知扰动，但无法适用于有色量测噪声下带广义未知扰动的随机动态系统。针对该受干扰系统，一方面有色噪声的存在导致相邻时刻间量测相关，不满足扩展上限滤波要求噪声独立的基础，不再适用于已有的上限滤波框架；另一方面，广义未知扰动的存在导致理论的估计误差协方差很难在线计算，无法利用有色量测噪声下类卡尔曼滤波框架获得高精度在线估计。

基于上述讨论，本文基于上限滤波框架提出一种有色噪声下最小上限递推滤波框架。首先，在有色噪声白化框架下，借助多拍优化参数构造新息协方差上限以表征重构的量测方程中多拍广义未知扰动的影响，以在线计算估计误差协方差的上限代替估计误差

协方差，提出具有递推结构的有色噪声下上限滤波(upper-bound filter with colored noises, CUBF)；其次，将估计误差协方差上限最小化转化为在线标量参数优化，通过求解线性矩阵不等式获得最优滤波参数以得到有色噪声下最小上限滤波(minimum CUBF, CMUBF)。

符号 $=$ 表示定义， $(\cdot)$ 表示与相邻公式相同的内容。 I 和 O 分别为合适维数的单位阵和零矩阵。对于任意两个(半)正定阵 A 和 B ，若 $A-B$ 为正定阵或半正定阵，则可记为 $A > B$ 或 $A \geq B$ 。 $\mathbb{R}^n$ 代表 n 维实向量所构成的空间。

2 问题描述

考虑如下离散时间随机线性系统动态方程：

$$\begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + w_k, \\ z_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + A_{k+1} \delta_{k+1} + v_{k+1}, \end{cases} \quad (1)$$

其中： $x_k \in \mathbb{R}^n$ 和 $z_k \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统状态向量和量测向量； F_k 为系统传递矩阵； H_k 为观测矩阵； A_{k+1} 为扰动系数矩阵，且各矩阵具有合适的维数； $w_k \in \mathbb{R}^n$ 为高斯白噪声，其协方差矩阵 $Q_k \geq 0$ ； $v_k \in \mathbb{R}^m$ 为服从下式(2)的有色噪声，即

$$v_k = M_{k-1} v_{k-1} + e_{k-1}, \quad (2)$$

其中： M_k 为噪声系数矩阵； e_k 为高斯白噪声，且其协方差矩阵 $R_k > 0$ 。 w_k 和 e_k 互不相关。初始状态 x_0 为均值 $\bar{x}_0$ ，协方差 P_0 的高斯随机向量与 w_k ， v_k ， e_k 均不相关。

参考文献^[3]，GUD统计模型如下所示：

$$\begin{cases} E\{\delta_k w_{j-1}^T\} = O_{s \times p}, \\ E\{\delta_k v_{j-1}^T\} = O_{s \times m} (\forall j \geq k), \end{cases} \quad (3)$$

式中 δ_k 代表一类具有一般意义的广义未知扰动GUD，其形式为 $f_{1,k}$ ， $f_{2,k}$ 和 q_k 的任意加权线性组合，其中： $f_{1,k}$ 为具有动态特性的未知扰动，即以 $\bar{W}^{k-1} = [w_0^T \cdots w_{k-1}^T]^T$ ， $\bar{V}^k = [v_1^T \cdots v_k^T]^T$ 和 $\bar{\Delta}^{k-1} = [\delta_1^T \cdots \delta_{k-1}^T]^T$ 为自变量的线性时变函数； $f_{2,k}$ 为任意的确定性时变函数； q_k 为与 $\bar{W}^{k-1}$ ， $\bar{V}^k$ 和 $\bar{\Delta}^{k-1}$ 不相关的随机扰动。

本文拟在有色噪声白化框架下，以在线计算估计误差协方差的上限代替理论估计误差协方差，利用线性矩阵不等式求解最优滤波参数，实现有色噪声下最小上限滤波的递推。拟设计的CMUBF具有如下优点：

1) 以估计误差协方差上限代替理论估计误差协方差来刻画未知扰动对滤波的影响，相比于未知扰动在线辨识更容易实现，放宽了滤波器设计条件；

2) 估计误差协方差上限的构造不需要依赖过多参数，相应滤波器的递推实现具有更强的可设计性和灵活性；

3) 用于求解最优滤波参数的线性矩阵不等式依赖当前量测, 既保证滤波充分挖掘有效量测信息, 又使得滤波器设计对建模误差有一定鲁棒性。

3 有色量测噪声下递推上限滤波

在有色噪声白化框架下, 以在线计算状态估计误差协方差的上限代替理论估计误差协方差。通过构造多拍滤波参数并在线优化, 实现有色量测噪声下递推上限滤波。

3.1 有色噪声下递推上限滤波框架设计

利用量测差分将有色噪声白化以构建新量测方程, 即

$$\begin{aligned} z_{k+1}^* &= z_{k+1} - M_k z_k = \\ &H_{k+1} x_{k+1} - M_k H_k x_k + A_{k+1} \delta_{k+1} - \\ &M_k A_k \delta_k + e_k. \end{aligned} \quad (4)$$

记 $Z_k^* = \{z_1^*, \dots, z_k^*\}$ 和 $Z_k = \{z_1, \dots, z_k\}$, Z_k^* 和 Z_k 包含相同的有效量测信息。因此, 后续滤波方法的设计基于序列 Z_k^* 展开。由于 z_{k+1}^* 中既含有 $k+1$ 时刻状态 x_{k+1} 和扰动 δ_{k+1} , 又含有 k 时刻状态 x_k 和扰动 δ_k 。在递推滤波设计中需考虑相邻时刻的相关性。

记 $\hat{x}_{k|t}$ 为 x_k 在 Z_t^* 下的状态估计。类比卡尔曼滤波架构, 状态预测、量测预测、滤波残差以及状态估计如下式(5)–(8):

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k}, \quad (5)$$

$$\hat{z}_{k+1|k}^* = H_k \hat{x}_{k+1|k} - M_k H_k \hat{x}_{k|k}, \quad (6)$$

$$r_{k+1} = z_{k+1}^* - \hat{z}_{k+1|k}^*, \quad (7)$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} r_{k+1}. \quad (8)$$

在残差 r_{k+1} 中由于 GUD 的存在, 导致新息协方差 $S_{k+1} = E[r_{k+1} r_{k+1}^T]$ 无法准确计算, 进而无法有效获得有色量测噪声下卡尔曼滤波增益 $K_{k+1} = (P_{k+1|k} H_{k+1}^T - F_k P_{k|k} H_k^T M_{k+1}^T) S_{k+1}^{-1}$ 。

记状态估计误差 $\tilde{x}_{k|t} = x_k - \hat{x}_{k|t}$, 将式(4)(6)代入式(7), 有

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= (H_{k+1} F_k - M_k H_k) \tilde{x}_{k|k} + A_{k+1} \delta_{k+1} - \\ &M_k A_k \delta_k + H_{k+1} w_k + e_k, \end{aligned} \quad (9)$$

其中残差 r_{k+1} 中含无先验信息的 δ_{k+1} 和 δ_k , 因此无法通过在线计算其协方差来对新息协方差进行在线补偿。文献[4–5, 19]仅针对量测模型中含有单一时刻扰动的递推上限滤波问题, 并未涉及量测模型中含有多拍广义未知扰动的情况。针对此情况, 本文引入双滤波参数以构造状态估计误差协方差上限, 实现有色量测噪声下上限滤波设计。考虑到双滤波参数求解的复杂性, 拟将双滤波参数求解近似为单一参数凸优化, 以简化滤波实现过程。

定义 1 基于式(5)–(8), 定义如下满足式(10)–

(13)的有色噪声下上限滤波器, 即CUBF:

$$\begin{aligned} \{\hat{x}_{k+1|k+1}, P_{k+1|k}^*, S_{k+1}^*, P_{k+1|k+1}^*\} =: \\ \text{CUBF}\{z_{k+1}^*, \hat{x}_{k|k}, P_{k|k}^*\}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中: 正定矩阵 $P_{k+1|k}^*, S_{k+1}^*, P_{k+1|k+1}^*$ 满足式(11)–(13)。

$$P_{k+1|k}^* \geq P_{k+1|k} = E[\tilde{x}_{k+1|k} \tilde{x}_{k+1|k}^T], \quad (11)$$

$$S_{k+1}^* \geq S_{k+1} = E[r_{k+1} r_{k+1}^T], \quad (12)$$

$$P_{k+1|k+1}^* \geq P_{k+1|k+1} = E[\tilde{x}_{k+1|k+1} \tilde{x}_{k+1|k+1}^T], \quad (13)$$

滤波增益 K_{k+1} 与 $S_{k+1}^*, P_{k+1|k+1}^*, P_{k+1|k}^*$ 有关。

记 $\tilde{R}_k =: H_{k+1} Q_k H_{k+1}^T + R_k$, $\Delta_k =: H_{k+1} F_k - M_k H_k$ 。由于 e_k 与 w_k 相互独立且与 $\hat{x}_{k+1|k}$ 和 $\hat{x}_{k|k}$ 无关, 由式(9)可得新息协方差

$$\begin{aligned} S_{k+1} = E(\Delta_{k+1} \tilde{x}_{k|k} + A_{k+1} \delta_{k+1} - M_k A_k \delta_k)(\cdot)^T + \\ \tilde{R}_k, \end{aligned} \quad (14)$$

进一步得

$$\begin{aligned} S_{k+1} \geq E(\Delta_{k+1} \tilde{x}_{k|k})(\cdot)^T + \tilde{R}_k = \\ \Delta_{k+1} P_{k|k} \Delta_{k+1}^T + \tilde{R}_k. \end{aligned} \quad (15)$$

根据上述分析, 可得CUBF滤波框架如下所示:

$$P_{k+1|k}^* = F_k P_{k|k}^* F_k^T + Q_k, \quad (16)$$

$$P_{k+1|k+1}^* = P_{k+1|k}^* - K_{k+1} S_{k+1}^* K_{k+1}^T, \quad (17)$$

$$S_{k+1}^* = \Theta_{k+1} + \epsilon_{k+1} \Phi_{k+1} + \epsilon_k M_k \Phi_k M_k^T + \tilde{R}_k, \quad (18)$$

其中: $\Theta_{k+1} =: \Delta_k P_{k|k}^* \Delta_k^T$, $\Phi_{k+1} =: A_{k+1} D_{k+1} A_{k+1}^T$, $\Phi_k =: A_k D_k A_k^T$ 。待优化参数 $\epsilon_{k+1} \geq 0$ 和 $\epsilon_k \geq 0$ 用于实现新息协方差上限的构造, D_k 为给定的正定矩阵。

基于上述CUBF滤波框架可知, 若存在滤波参数 $\epsilon_k, \epsilon_{k+1}$ 使得 $P_{k+1|k}^*, S_{k+1}^*$ 和 $P_{k+1|k+1}^*$ 取相应的上确界, 则可以得到有色噪声下最小上限滤波, 即CMUBF。下述第3.2节在所提CUBF存在性条件的基础上, 给出有色噪声下递推最小上限滤波近似实现。

3.2 有色噪声下递推最小上限滤波器实现

理论上, 通过引入双滤波参数构造误差协方差上限, 进行参数求解时应同时优化滤波参数 ϵ_k 和 ϵ_{k+1} 。然而, 这个求解过程较为复杂且需要更多的先验信息。故可将 k 时刻求解获得的“最优”滤波参数 ϵ_k^{opt} 作为已知参数直接代入 $k+1$ 时刻的参数优化求解中, 以简化滤波实现过程。如下定理1讨论了有色噪声下递推最小上限滤波的存在性条件。

定理 1 若满足

$$P_{0|0}^* \geq P_{0|0}, \quad (19)$$

$$S_{k+1}^* \geq S_{k+1}, \forall k, \quad (20)$$

则有如式(16)–(18)所示的CUBF成立. 进一步地, 若存在满足矩阵不等式 $S_{k+1} \leq S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}}$ 的 ϵ_{k+1} 和 K_{k+1} , 有满足式(21)–(22)的最优参数 $\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}$ 及增益 K_{k+1}^{opt} 存在, 则可得最小上限滤波器(CMUBF).

$$P_{k+1|k+1}|_{K_{k+1}} \leq P_{k+1|k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}, K_{k+1}^{\text{opt}}} \leq P_{k+1|k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}, K_{k+1}}, \quad (21)$$

$$S_{k+1} \leq S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}} \leq S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}}, \quad (22)$$

其中: 滤波参数

$$\epsilon_{k+1}^{\text{opt}} = \min \{ \epsilon_{k+1} | \epsilon_{k+1} \in A_{k+1} \}, \quad (23)$$

$$A_{k+1} = \{ \epsilon_{k+1} | \epsilon_{k+1} \geq 0, S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}} \geq S_{k+1} \}, \quad (24)$$

且滤波增益

$$K_{k+1}^{\text{opt}} = (P_{k+1|k}^* H_{k+1}^T - F_k P_{k|k}^* H_k^T M_{k+1}^T) S_{k+1}^{*-1}. \quad (25)$$

定理1的证明过程见附录.

定理1需同时满足式(19)–(20)所示的初值问题及参数优化问题. 这里, 初始估计误差协方差往往可以设置较大数值作为误差协方差上限. 对参数优化而言, 通过求解线性矩阵不等式(24)求得满足 $S_{k+1} \leq S_{k+1}^*$ 的滤波参数 ϵ_{k+1} , 进一步地, 结合式(23)–(24)解出使得线性矩阵不等式(21)–(22)成立的最优参数 $\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}$ 及增益 K_{k+1}^{opt} , 得到CMUBF的递推实现.

将式(18)代入式(24), 结合式(23), 滤波参数 ϵ_{k+1} 的求解可简化为下述线性矩阵不等式(26), 即

$$\begin{cases} \epsilon_{k+1} \geq 0, \\ \Theta_{k+1} + \epsilon_{k+1} \Phi_{k+1} + \epsilon_k M_k \Phi_k M_k^T + \tilde{R}_k \geq S_{k+1}, \end{cases} \quad (26)$$

这里, 令无偏估计 $\hat{S}_{k+1} =: r_{k+1} r_{k+1}^T$ 近似代替未知的理论新息协方差矩阵 S_{k+1} . 针对式(26)所示的线性矩阵不等式 (linear matrix inequality, LMI), 直接利用MATLAB软件的LMI工具箱中的mincx函数求得近似的最优滤波参数 $\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}$, 即满足 $\epsilon_{k+1}^{\text{opt}} = \min \epsilon_{k+1}$.

注1 为简化上述双参数优化下的线性矩阵不等式(26)的求解, 在 $k+1$ 时刻, 将 k 时刻已求解获得的滤波参数 ϵ_k^{opt} 作为已知值代入式(26), 将上述双参数优化的线性矩阵不等式求解简化为单参数优化下的线性矩阵不等式求解, 以保证其求解的稳定性以及所设计的CMUBF的递推计算实时性.

注2 考虑到诸如非合作目标跟踪等对实时性要求较高的实际应用场景, 为进一步保证所设计的CMUBF递推求解的实时性, 可通过如下特征值求解近似上述线性矩阵不等式(26)的参数优化, 即

$$\epsilon_{k+1} = \max(0, \frac{\sigma_{\max}(S_{k+1}^0)}{\sigma_{\min}(A_{k+1} D_{k+1} A_{k+1}^T)}), \quad (27)$$

式中: $S_{k+1}^0 =: S_{k+1} - \Theta_{k+1} - \epsilon_k^{\text{opt}} M_k \Phi_k M_k^T - \tilde{R}_k$, $\sigma_{\max}$ 和 $\sigma_{\min}$ 分别为相应的最大和最小特征值.

注3 当 $M_{k-1} = O_2$ 时, 所提CMUBF可退化为广义未知扰动下递推上限滤波方法^[5]; 当 $\epsilon_{k+1} = 0$ 时, 所提CMUBF可退化为有色量测噪声下离散时间动态系统滤波方法^[14]. 当 $M_{k-1} = O_2$, $\epsilon_{k+1} = 0$ 时, 所提CMUBF可退化为传统卡尔曼滤波方法. 事实上, 所提CMUBF可同时处理有色量测噪声和广义未知扰动, 其递推框架具有更加一般的意义.

为方便理解, 表1和图1分别给出了所提CMUBF的算法步骤和递推实现框图.

表1 CMUBF算法步骤

Table 1 The computational procedure of the CMUBF

- 1 初始化. 设置 $\hat{x}_{0|0}$, P_0^* .
- 2 有色噪声白化. 由式(4)得 z_{k+1}^* .
- 3 预测. 由式(5)–(6)得 $\hat{x}_{k+1|k}$, $\hat{z}_{k+1|k}^*$.
- 4 滤波残差. 由式(7)得 r_{k+1} .
- 5 凸优化.
 - a) 参数求解: 由式(26)得 $\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}$;
 - b) 由式(18)得 S_{k+1}^* ;
 - c) 由式(25)得 K_{k+1} .
- 6 状态估计. 由式(8)和式(17)得 $\hat{x}_{k+1|k+1}$, $P_{k+1|k+1}^*$.
- 7 $k \leftarrow k+1$. 返回2.

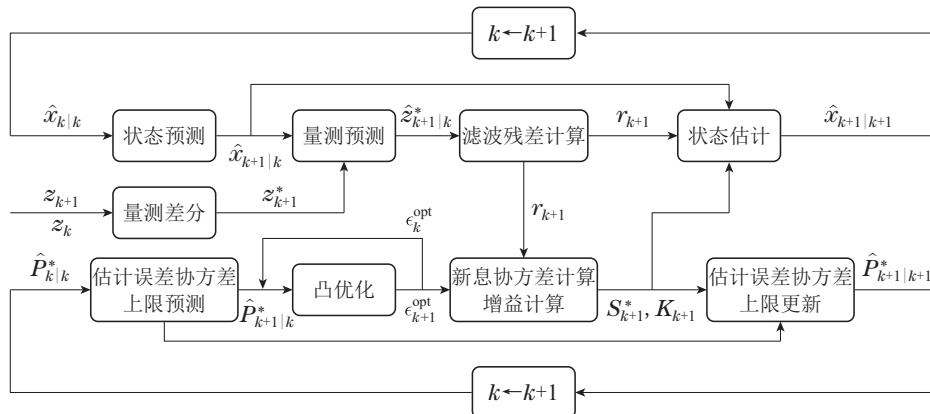


图1 CMUBF递推结构框图

Fig. 1 The recursive block diagram of CMUBF

4 仿真分析

考虑博弈对抗环境下伴随有色量测噪声的非合作目标快速跟踪, 目标在 α - $\xi\eta$ 平面进行匀速直线运动, 其初始位置为 $(100000 \ 150000)^T$ m、初始速度为 $(200 \ 150)^T$ m/s. 目标动力学模型如式(1)所示,

$$x_k = (\xi_k \ \dot{\xi}_k \ \eta_k \ \dot{\eta}_k)^T, F_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes I_2, \text{“} \otimes \text{”为矩}$$

阵Kronecker积运算. $Q_k = I_4$. 采样步长 $T = 1$ s, 采样时刻 $k \leq 200$ s.

该目标被位于坐标原点的高频采样雷达所探测, 并获得受有色噪声和未知扰动污染的量测信息. 相应量测模型如式(1)所示, 且有色量测噪声建模为式(2). $H_k = [1 \ 0] \otimes I_2$, $A_{k+1} = I_2$, $R_k = 100^2 \times I_2$, $M_k = m \times I_2$, 其中“ m ”为可变的噪声系数矩阵参数, 令 $m = 0.7$.

当 $k < 50$ s时, GUD表现为周期为25 s的梯形波, 相应起始值为350 m、峰值为700 m; 当 $50 \text{ s} \leq k < 150$ s时, 表现为形如 $600 \sin(2\pi k/50)$ m的正弦波; 当 $150 \text{ s} \leq k \leq 200$ s时, GUD表现为周期为25 s的梯形波, 相应起始值为-350 m、峰值为-700 m.

将所提CMUBF与卡尔曼滤波(简记为KF)、有色量测噪声下卡尔曼滤波(简记为CbKF)^[14]、广义未知扰动下最小上限滤波(简记为MUBF)^[15]进行对比. 所有对比算法初始状态估计、初始误差协方差以及未知扰动干扰保持一致, 即 $\bar{x}_0 = (100200 \ 215, 150250 \ 170)^T$, $P_0 = 10^4 \times \text{diag}\{5, 0.1, 5, 0.1\}$, 且未知扰动干扰如下图2所示.

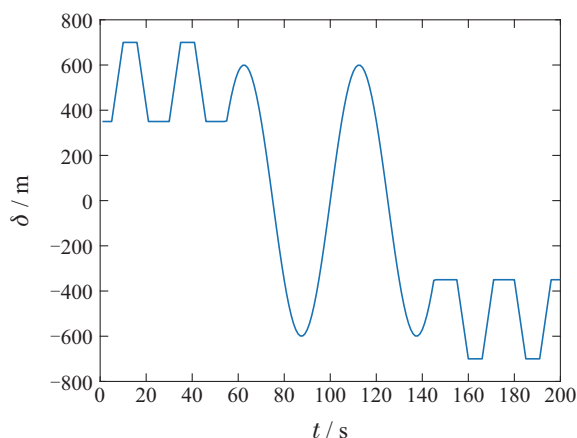
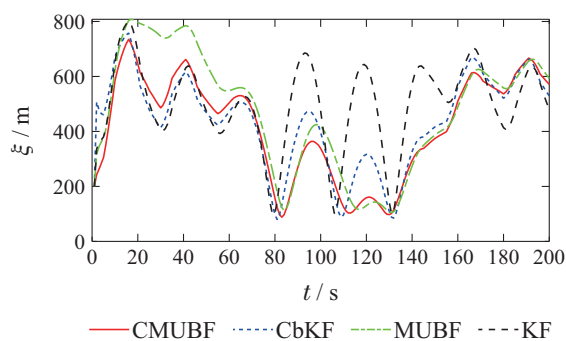


图2 广义未知扰动示意图

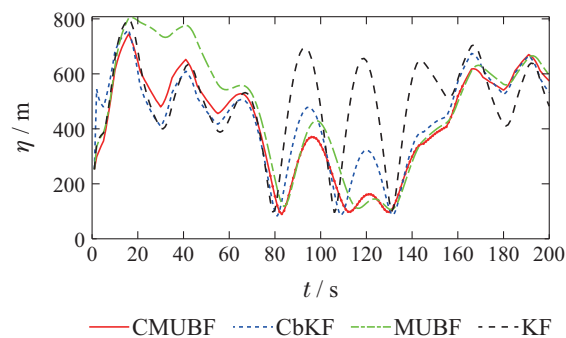
Fig. 2 The schematic diagram of GUD

图3给出了1000次蒙特卡洛(Monte Carlo)仿真下各方法在 ξ 方向和 η 方向的位置和速度估计的均方根误差(root mean square errors, RMSEs)对比. 明显地, 从图3可以看出, 由于既没有考虑有色噪声, 又没有考虑GUD, KF算法的RMSEs最大; CbKF和MUBF要么仅考虑有色噪声, 要么仅考虑GUD, 因

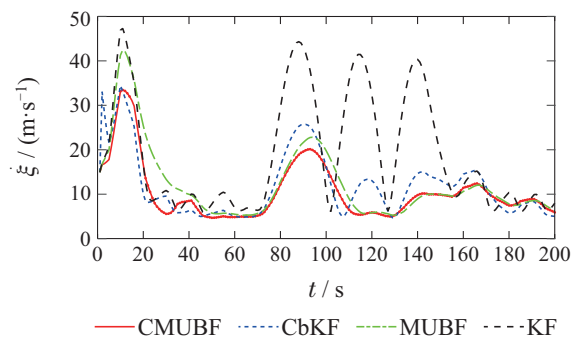
此两者RMSEs居中; 所提CMUBF同时考虑了有色噪声和GUD, 相应的RMSEs在绝大多数时刻明显低于KF, CbKF和MUBF等对比算法的RMSEs. 这种现象说明所提CMUBF在这种情况下取得最好的滤波精度, 验证了所提CMUBF的有效性.



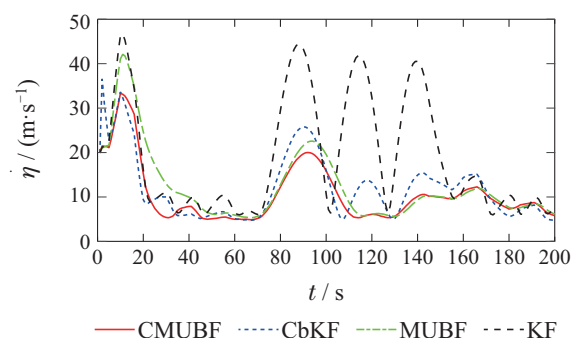
(a) ξ 方向位移均方根误差对比图



(b) η 方向位移均方根误差对比图



(c) ξ 方向速度均方根误差对比图



(d) η 方向速度均方根误差对比图

图3 各对比算法均方根误差

Fig. 3 RMSEs of compared algorithms

同时,基于1000次Monte Carlo实现,图4给出了对比方法在不同 m 值(有色噪声的相关性强度不同)下 ξ 方向和 η 方向的位置和速度RMSEs对比.在所考虑的有色噪声系数矩阵参数 m 取值范围内,由于分别考虑了有色噪声或广义未知扰动,CbKF和MUBF的RMSEs均值皆小于KF的RMSEs均值.进一步地,当 m 较小时,MUBF的RMSEs均值小于CbKF的RMSEs均值,表明此时广义未知扰动对滤波性能的影响占主导地位;当 m 较大时,MUBF的RMSEs均值大于CbKF的RMSEs均值,表明此时有色噪声对滤波性能的影响占主导地位.特别地,由于同时考虑了广义未知扰动和有色噪声,所提CMUBF的RMSEs均值在所考虑的 m 取值范围内皆小于所有对比算法的RMSEs均值,且其RMSEs均值随 m 值的增大而基本保持不动.这表明所提CMUBF相比于所对比算法可以有效解决有色量测噪声下带广义未知扰动的随机动态系统滤波问题,且对 m 的取值具有一定的鲁棒性.

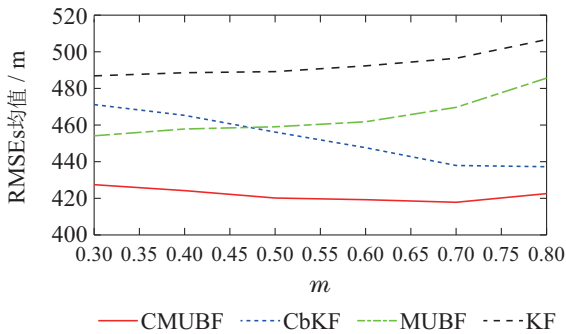
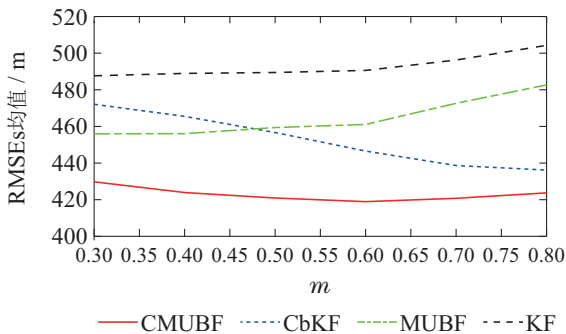
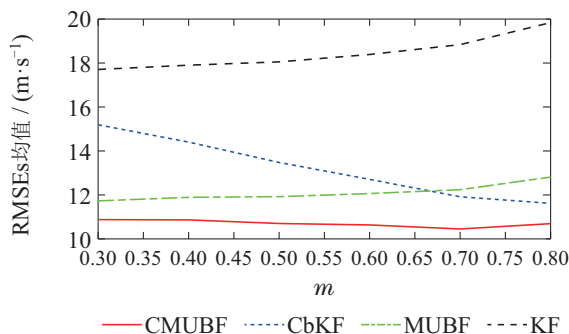
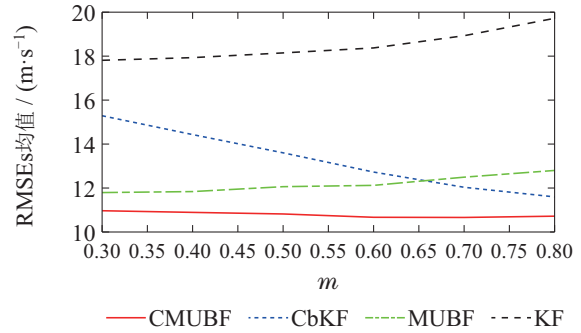
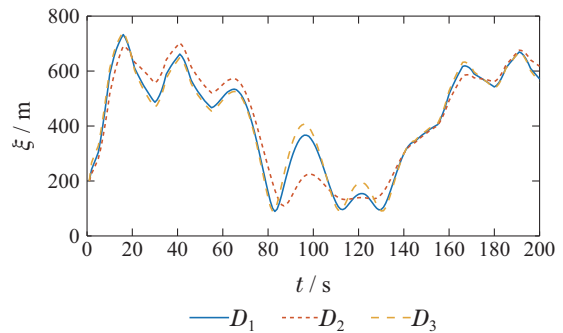
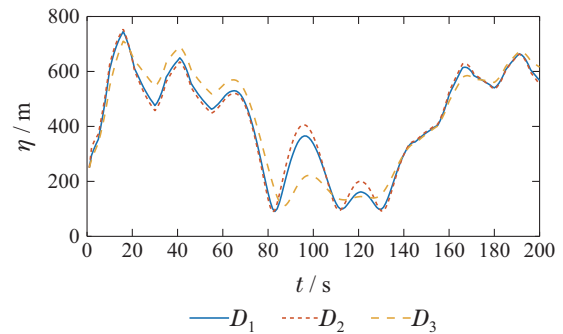
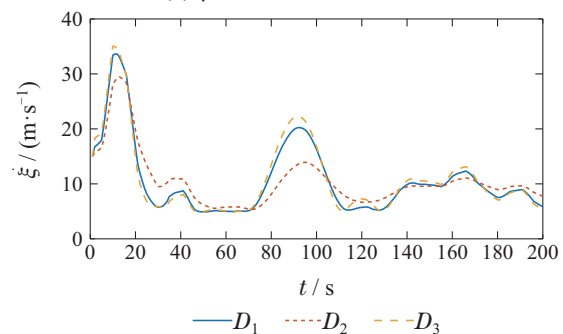
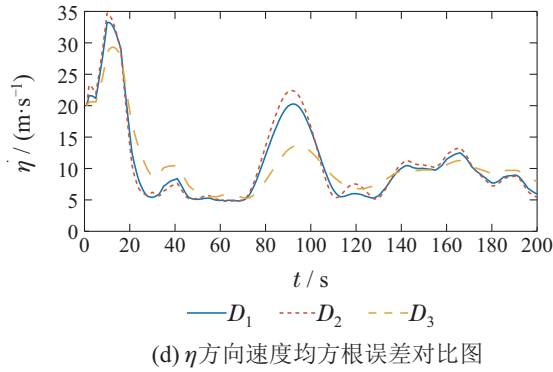
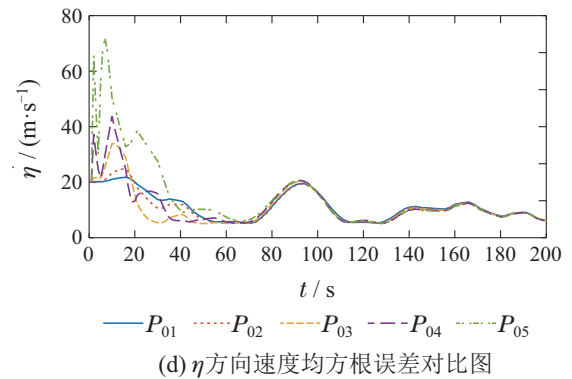
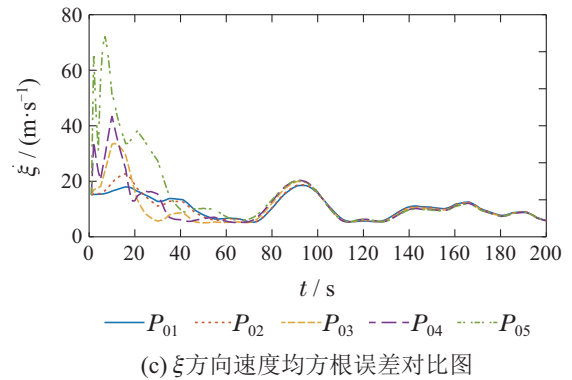
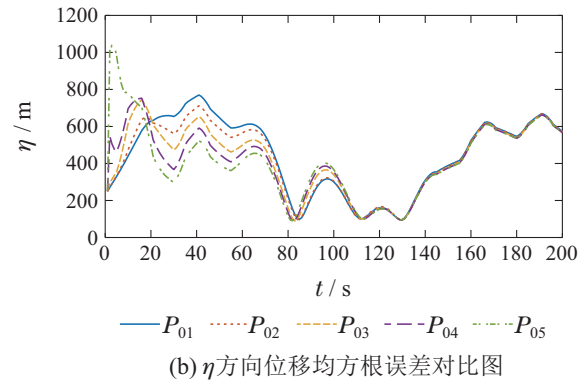
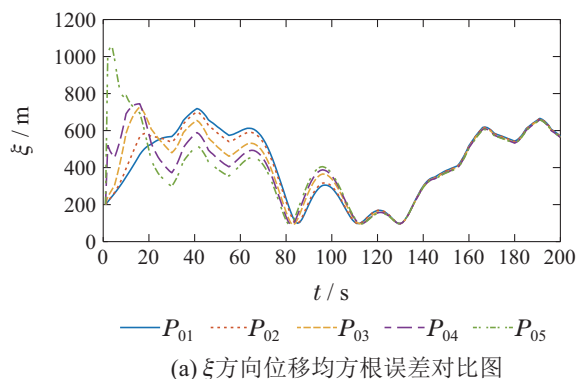
(a) ξ 方向位移RMSEs均值对比图(b) η 方向位移RMSEs均值对比图(c) ξ 方向速度RMSEs均值对比图(d) η 方向速度RMSEs均值对比图图4 不同 m 值下各对比算法均方根误差均值Fig. 4 Average RMSEs of compared algorithms under different values of m

图5给出了所提CMUBF在不同正定矩阵 D (即: D_1, D_2 和 D_3)下基于1000次Monte Carlo实现的目标位置估计和速度估计的RMSEs曲线.这里, $D_1 = \text{diag}\{1, 1\}$, $D_2 = \text{diag}\{100, 10\}$, $D_3 = \text{diag}\{10, 100\}$.不同正定矩阵下所提CMUBF的RMSEs曲线基本一致,表明该算法对于正定矩阵 D 的取值不敏感.

(a) ξ 方向位移均方根误差对比图(b) η 方向位移均方根误差对比图(c) ξ 方向速度均方根误差对比图

图5 不同 D 值下CMUBF算法均方根误差Fig. 5 RMSEs of CMUBF with different values of D

最后, 图6给出了所提CMUBF在不同初始估计误差协方差矩阵 P_0 (即: $P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}$ 和 P_{05}) 下基于1000次 Monte Carlo 仿真实现的目标位置估计和速度估计的RMSEs曲线. $P_{01} = 10^3 \times \text{diag}\{1, 0.02, 1, 0.02\}$, $P_{02} = 10^3 \times \text{diag}\{5, 0.1, 5, 0.1\}$, $P_{03} = 10^4 \times \text{diag}\{5, 0.1, 5, 0.1\}$, $P_{04} = 10^5 \times \text{diag}\{5, 0.1, 5, 0.1\}$, $P_{05} = 10^5 \times \text{diag}\{25, 0.5, 25, 0.5\}$. 当系统运行时间较短时, 不同初始估计误差协方差 P_0 下所提CMUBF的RMSEs波动较大(即 P_0 较大时, 速度估计的RMSEs较大; P_0 较小时, 位置估计的RMSEs较大), 这是因为此时初始估计误差协方差矩阵对当前滤波影响较大; 当系统运行时间足够长时, 不同初始估计误差协方差 P_0 下所提CMUBF的RMSEs曲线基本一致, 此时, 初始估计误差协方差阵对当前滤波的影响几乎可以忽略. 该现象表明, 在系统短时运行时, 所提滤波方法的有效执行依赖初始估计误差协方差矩阵的设定, 此时, 为获得高精度估计结果, 应取较为准确的初始估计误差协方差矩阵(比理论值适当偏大以满足式(19), 即 $P_{0|0}^* \geq P_{0|0}$); 当系统长时间运行时, 所提滤波方法的估计精度不依赖于初始估计误差协方差矩阵. 因此, 从滤波精度角度而言, 为获得较高精度的估计结果, 在条件允许的前提下, 建议初始估计误差协方差矩阵的取值略大于理论初始估计误差协方差矩阵.

图6 不同 P_0 值下CMUBF算法均方根误差Fig. 6 RMSEs of CMUBF with different values of P_0

5 结论

针对有色量测噪声下带广义未知扰动的随机动态系统, 本文提出了有色噪声下递推最小上限滤波. 利用量测差分对有色噪声白化处理, 构造了包含相邻两个时刻系统状态和未知扰动的量测方程. 在此基础上, 定义了递推上限滤波框架, 以在线递推估计误差协方差的上限取代理论估计误差协方差的递推, 以弥补未知扰动的影响. 进一步地, 将估计误差协方差上限的计算转化为标量参数的凸优化处理, 以获得估计误差协方差最小上限的有效近似, 从而实现有色噪声下最小上限滤波递推. 后续研究应进一步考虑多拍量测噪声相关性, 并利用多参数优化以获取更加准确的估计误差协方差的最小上限. 同时, 考虑实际系统在诸多场合建模为连续时间随机系统, 可类比离散时间卡尔曼滤波和连续时间卡尔曼滤波之间的联系, 在重点关注连续时间未知扰动

建模的基础上, 进一步研究将所提有色噪声下最小上限滤波推广到相应连续系统。

参考文献:

- [1] NIKOUKHAH R, CAMPBELL S L, DELEBECQUE F. Kalman filtering for general discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(10): 1829 – 1839.
- [2] KULIKOV G Y, KULIKOVA M V. The accurate continuous-discrete extended Kalman filter for radar tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(4): 948 – 958.
- [3] LIANG Y, ZHOU D, ZHANG L, et al. Adaptive filtering for stochastic systems with generalized disturbance inputs. *IEEE Signal Processing Letters*, 2008, 15: 645 – 648.
- [4] YANG Y, QIN Y, LIANG Y, et al. Adaptive filter for linear systems with generalized unknown disturbance in measurements. *Proceedings of the 16th International Conference on Information Fusion*. Istanbul, Turkey: IEEE, 2013: 1336 – 1341.
- [5] QIN Y, LIANG Y, YANG Y, et al. Adaptive filter of non-linear systems with generalised unknown disturbances. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2014, 8(4): 307 – 317.
- [6] YANG Yanbo, PAN Quan, LIANG Yan, et al. Distributed estimation for nonlinear systems with correlated multiplicative noises and randomly delayed measurements. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(11): 1431 – 1441.
(杨衍波, 潘泉, 梁彦, 等. 量测随机延迟下带相关乘性噪声的非线性系统分布式估计. 控制理论与应用, 2016, 33(11): 1431 – 1441.)
- [7] YANG Y, QIN Y, YANG Y, et al. Finite-time distributed block-decomposed information filter for nonlinear systems with colored measurement noise. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31(8): 3115 – 3136.
- [8] SHMALIY Y S, ZHAO S, AHN C K, et al. Optimal and unbiased filtering with colored process noise using state differencing. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(4): 548 – 551.
- [9] YANG Y, LIANG Y, PAN Q, et al. Adaptive Gaussian mixture filter for Markovian jump nonlinear systems with colored measurement noises. *ISA Transactions*, 2018, 80: 111 – 126.
- [10] WANG X, LIANG Y, PAN Q, et al. Nonlinear Gaussian smoothers with colored measurement noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(3): 870 – 876.
- [11] XIONG S, ZHOU Z, ZHONG L, et al. Adaptive filtering of color noise using the Kalman filter algorithm. *Proceedings of the 17th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*. Baltimore, MD, USA: IEEE, 2000: 1009 – 1012.
- [12] YANG Y, QIN Y, PAN Q, et al. Distributed information filter for linear systems with colored measurement noise. *The 22nd International Conference on Information Fusion*. Ottawa, Canada: IEEE, 2019: 1 – 7.
- [13] YANG C S, DENG Z L. Robust guaranteed cost steady-state Kalman predictors for systems with multiplicative noises, colored measurements noises and uncertain noise variances. *The 29th Chinese Control and Decision Conference*. Chongqing, China: IEEE, 2017: 413 – 420.
- [14] CHANG G. On Kalman filter for linear system with colored measurement noise. *Journal of Geodesy*, 2014, 88(12): 1163 – 1170.
- [15] BRYSON A E, JOHANSEN D E. Linear filtering for time-varying systems using measurements containing colored noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1965, 10(1): 4 – 10.
- [16] LI W, LEUNG H, ZHOU Y. Space-time registration of radar and ES-M using unscented Kalman filter. *IEEE Transactionson on Aerospace and Electronic Systems*, 2004, 40(3): 824 – 836.
- [17] QIN Y, LIANG Y, YANG Y, et al. Adaptive upper-bound linear mean square error filter of Markovian jump linear systems with generalized unknown disturbances. *The 18th International Conference on Information Fusion*. Washington, DC, USA: IEEE, 2015: 1833 – 1839.
- [18] LI W, WEI P, XIAO X. An adaptive nonlinear filter of discrete-time system with uncertain covariance using unscented Kalman filter. *IEEE International Symposium on Communications and Information Technology*. Beijing, China: IEEE, 2005: 1436 – 1439.
- [19] QIN Y, LIANG Y, YANG Y, et al. Minimum upper-bound filter of Markovian jump linear systems with generalized unknown disturbances. *Automatica*, 2016, 73: 56 – 63.

附录 定理1的证明

1) CUBF存在性证明.

设 $P_{k|k}^* \geq P_{k|k}$, 即 $P_{k|k}^* - P_{k|k}$ 为半正定矩阵. 基于式(16)可得 $P_{k+1|k}^* - P_{k+1|k} = F_k(P_{k|k}^* - P_{k|k})F_k^T$, 故

$$P_{k|k}^* - P_{k|k} = F_k^{-1}(P_{k+1|k}^* - P_{k+1|k})F_k^{-T}, \quad (A.1)$$

由于 F_k 为行满秩矩阵, $P_{k+1|k}^* \geq P_{k+1|k}$, 可得式(11)成立.

同时由式(14)–(15)(18), 可得 $S_{k+1}^* \geq S_{k+1}$, 式(12)成立. 记 $\Gamma_{k+1} = (I - K_{k+1}H_{k+1})$, 结合式(11)(16)–(17), 有

$$\begin{aligned} P_{k+1|k+1}^* &= \Gamma_{k+1}P_{k+1|k}^*\Gamma_{k+1}^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T \geq \\ &\Gamma_{k+1}P_{k+1|k}\Gamma_{k+1}^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T = \\ &P_{k+1|k+1}, \end{aligned} \quad (A.2)$$

因此, 式(13)成立.

2) CMUBF存在性证明.

当集合 $\{\epsilon_{k+1}|S_{k+1}^* \geq S_{k+1}\}$ 非空时, 有CUBF存在. 对于任意满足该集合的滤波参数 $\epsilon_{k+1,1} \in \Lambda_{k+1}$, 存在 $\epsilon_{k+1,1} \leq \epsilon_{k+1,2}$, $S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1,1}} \leq S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1,2}}$ 成立, 则必有 $\epsilon_{k+1,2} \in \Lambda_{k+1}$, 故 $\epsilon_{k+1}^{\text{opt}} = \min\{\epsilon_{k+1}|\epsilon_{k+1} \in \Lambda_{k+1}\}$. 这里, $\Lambda_{k+1} = \{\epsilon_{k+1}|\epsilon_{k+1} \geq 0, S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}} \geq S_{k+1}\}$, 由证明1)中的CUBF存在性分析, 得到 Λ_{k+1} 是非空集合.

明显地, 对于任意 $\epsilon_{k+1} \in \Lambda_{k+1}$ 都有 $\epsilon_{k+1} \geq \epsilon_{k+1}^{\text{opt}}$, 考虑到 k 时刻的滤波参数 ϵ_k^{opt} 已知, 结合式(18), 有

$$\begin{aligned} \Delta S_{k+1}^* &= S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}} - S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}} = \\ &(\Theta_{k+1} + \epsilon_{k+1}\Phi_{k+1} + \epsilon_k M_k \Phi_k M_k^T + \tilde{R}_k) - \\ &(\Theta_{k+1} + \epsilon_{k+1}^{\text{opt}}\Phi_{k+1} + \epsilon_k M_k \Phi_k M_k^T + \tilde{R}_k) = \\ &(\epsilon_{k+1} - \epsilon_{k+1}^{\text{opt}})\Phi_{k+1}. \end{aligned} \quad (A.3)$$

由式(A.3)得 ΔS_{k+1}^* 为(半)正定矩阵, $S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}} \geq S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}}$ 成立, 式(22)成立.

记 $\Psi_{k+1} = (P_{k+1|k}^* H_{k+1}^T - F_k P_{k|k}^* H_k^T M_k^T)$, 估计误差协方差上限为 $P_{k+1|k+1}^* = P_{k+1|k}^* - \Psi_{k+1} S_{k+1}^{*-1} \Psi_{k+1}^T$.

$$\begin{aligned} \Delta P_{k+1|k+1}^* &= \\ &P_{k+1|k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}, K_{k+1}} - P_{k+1|k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}, K_{k+1}} = \\ &P_{k+1|k}^*|_{\epsilon_{k+1}} - P_{k+1|k}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}} - [\Psi_{k+1} S_{k+1}^{*-1} \Psi_{k+1}^T]|_{\epsilon_{k+1}} + \\ &[\Psi_{k+1} S_{k+1}^{*-1} \Psi_{k+1}^T]|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}}, \end{aligned} \quad (A.4)$$

$P_{k+1|k}^* = F_k P_{k|k}^* F_k^T + Q_k$ 与 $k+1$ 时刻滤波参数 ϵ_{k+1} 无关. 根据式(A.3) $S_{k+1}^{*-1}|_{\epsilon_{k+1}} \leq S_{k+1}^{*-1}|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}}$, 得 $\Delta P_{k+1|k+1}^*$ 为正(半)定矩阵. 故, $P_{k+1|k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}, K_{k+1}} \geq P_{k+1|k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}, K_{k+1}}$ 成立.

由式(18)可知, $S_{k+1}^* \geq \tilde{R}_k$, S_{k+1}^* 为正定矩阵. 记 $S_{k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}} = T_{k+1}T_{k+1}^T$, 其中 T_{k+1} 为满秩矩阵. 令

$$\begin{aligned} P_{k+1|k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}, K_{k+1}} &= \\ P_{k+1|k}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}} - B_{k+1}B_{k+1}^T + (K_{k+1}T_{k+1} - B_{k+1})(\cdot)^T, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

且 $B_{k+1} = (P_{k+1|k}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}} H_{k+1}^T - F_k P_{k|k}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}} H_k^T M_k^T) T_{k+1}^{-T}$. 进一步地, $(K_{k+1}T_{k+1} - B_{k+1})(K_{k+1}T_{k+1} - B_{k+1})^T$ 为正(半)定矩阵, 当且仅当

$$\begin{aligned} K_{k+1}^{\text{opt}} &= B_{k+1}T_{k+1}^{-1} = \\ (P_{k+1|k}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}} H_{k+1}^T - F_k P_{k|k}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}} H_k^T M_k^T) S_{k+1}^{*-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

有

$$\begin{aligned} P_{k+1|k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}, K_{k+1}} &\geq \\ P_{k+1|k}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}} - B_{k+1}B_{k+1}^T &= P_{k+1|k+1}^*|_{\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}, K_{k+1}^{\text{opt}}}, \end{aligned}$$

式(21)成立.

基于上述推导, 存在满足式(21)–(22)的 $\epsilon_{k+1}^{\text{opt}}$ 和 K_{k+1}^{opt} .

CMUBF存在性证毕.

作者简介:

秦月梅 讲师, 目前研究方向为复杂系统估计理论、信息融合,

E-mail: qinyuemei@xupt.edu.cn;

周倩倩 硕士研究生, 目前研究方向为目标跟踪、最优估计, E-

mail: xuptzqq@163.com;

杨衍波 副教授, 目前研究方向为目标跟踪与博弈、复杂系统估

计理论, E-mail: yangyanbo@nwpu.edu.cn;

梁彦 教授, 目前研究方向为多源信息融合、估计与控制, E-

mail: liangyan@nwpu.edu.cn;

潘泉 教授, 目前研究方向为目标跟踪与识别、复杂系统建模,

E-mail: quanpan@nwpu.edu.cn.