第 40 卷第 1 期
2023 年 1 月
控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications
Vol. 40 No. 1
Jan. 2023

基于有限时间对偶神经网络的冗余机械臂重复运动规划

孔 颖†, 吴佳佳, 雷景生, 胡汤珑
(浙江科技学院 信息与电子工程学院, 浙江 杭州 310000)

摘要: 在考虑关节物理极限的情况下, 将冗余机械臂的逆运动学解析问题抽象为带约束的重复运动规划(RMP)方案. 针对速度层的带约束RMP方案, 本文提出了一种新型的递归神经网络, 即有限时间对偶神经网络(FTDNN), 用以求解该类带约束RMP方案. 相比于传统的递归神经网络, 该FTDNN模型具有有限时间收敛特性, 不仅能够改进收敛的速度, 并且能够获得较高的收敛精度. 通过李雅普诺夫稳定性定理验证了FTDNN模型的渐近稳定性, 并进一步计算出FTDNN模型求解带约束RMP方案最优解的时间上界. 基于冗余机械臂PA10的计算仿真结果验证了FTDNN模型求解带约束RMP方案的有效性和可行性. 最后在Dobot Magician实物机械臂上的实验结果表明本文提出的有限时间对偶神经网络方法可以有效实现机械臂各关节角的重复运动.

关键词: 对偶神经网络; 有限时间; 冗余机械臂; 关节物理限制; 重复运动规划
引用格式: 孔颖, 吴佳佳, 雷景生, 等. 基于有限时间对偶神经网络的冗余机械臂重复运动规划. 控制理论与应用, 2023, 40(1): 139 – 148
DOI: 10.7641/CTA.2022.11214

Finite-time dual neural network for solving repetitive motion planning of redundant manipulator

KONG Ying†, WU Jia-jia, LEI Jing-sheng, HU Tang-long
(Department of Information and Electronic Engineering,
Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou Zhejiang 310000, China)

Abstract: Resolution of the inverse-kinematics redundancy problem for redundant manipulators can be transformed into a repetitive motion planning (RMP) problem by incorporating joint-angle limits and joint-velocity limits. In this paper, a new recurrent neural network, finite-time dual neural network (FTDNN), is proposed for solving this type of constrained RMP problem in velocity layer. Compared with the traditional recurrent neural networks, the FTDNN model has finite-time convergence characteristics, which not only improves the convergent speed but also achieves higher convergent accuracy. Furthermore, asymptotic stability of the FTDNN model is verified by the Lyapunov's stability theorem, and the time upper bound for the optimal solution of the FTDNN model with constrained RMP problem is presented. Computational simulation results based on the redundant manipulator PA10 demonstrate the validity and feasibility of the FTDNN model for solving the constrained RMP problem. Finally, experimental results on the Dobot Magician manipulator show that the proposed FTDNN model can effectively realize the repetitive kinematics of each joint angle.

Key words: dual neural network; finite-time; redundant manipulator; joints limitation; repetitive motion planning
Citation: KONG Ying, WU Jiajia, LEI Jingsheng, et al. Finite-time dual neural network for solving repetitive motion planning of redundant manipulator. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(1): 139 – 148

1 引言

机械臂是由多个转动关节角组成的一个末端能动的机械装置, 其末端任务包括搬运、焊接、油漆和组装等, 目前已广泛应用于工业制造、医学治疗、娱乐服务、消防、军事和太空探索等领域[1–5]. 冗余机械臂是指所拥有的自由度(degrees-of-freedom, DOF)多于完成给定末端任务所需的DOF的机械臂. 冗余度解析问题(又称为逆运动学解析)是机械臂运动规划和控制中

收稿日期: 2021−12−13; 录用日期: 2022−04−14.
†通信作者. E-mail: kongying-888@163.com; Tel.: +86 13858049801.
本文责任编委: 孙长银.
国家自然科学基金项目(61803338, 61972357), 浙江省重点研发计划(2019C03135), 浙江省自然科学基金项目(LZY22E050002)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61803338, 61972357), the Key Research & Development Project of Zhejiang Province (2019C03135) and the Zhejiang Provincial Natural Science Foundation Project (LZY22E050002).

一个基本问题, 具体指当给定冗余机械臂的末端执行器的期望轨迹, 如何实时生成其对应的关节轨迹. 由于冗余机械臂存在多个关节角自由度, 其逆运动学解析的解可能会存在多个甚至无穷解. 因此, 有效求得冗余度解析问题的解已经受到了学者的广泛关注.

近年来, 递归神经网络(recurrent neural network, RNN)被广泛应用于时变问题的求解[6–8]. Hopfield在文献[6]中提出了一种经典的网络模型(Hopfield neural network, HNN)用以求解优化计算和代数运算的问题. 文献[7]中给出了一种基于递归神经网络的飞行器最优轨迹跟踪方法, 采用最优技术使得跟踪误差一致有界. 文献[8]中提出了一种神经网络参数更新律估计方法, 考虑了未知时变参数和外部干扰, 解决了水下机器人多角度跟踪的稳定性问题.

为更好的求解时变问题, Zhang等人[9–11]提出了一种特殊的递归神经网络(Zhang neural network, ZNN), 通过定义误差函数, 建立相应的ZNN模型. 文献[11]给出了ZNN求解时变线性方程问题的具体步骤, 通过利用导数信息, 建立最小化范数函数, 使得动态误差全局收敛于方程的理论解. 基于ZNN的设计思想, 文献[12]提出了一类新型神经网络(novel neural networks, NNNs), 该类神经网络在ZNN的基础上增加了一项扩展项用以求解伪逆矩阵, 从理论上验证了在设定相同参数的情形下, NNNs相比于ZNN和GNN有着更快的全局指数收敛速度, 通过3个数值仿真进一步验证了NNNs在收敛性能上的优越性, 并应用于三连杆平面冗余机械臂中. Chen等人[13]提出了一种基于ZNN的多目标最小优化方案用于修复冗余度机械臂运动过程中的关节角漂移问题, 有效阻止关节角突加度运动过程中的异位现象. 文献[14]中针对冗余度机械臂重复运动过程中内部噪声干扰问题, 通过一种变化后的ZNN方法, 将运动过程中的干扰因素融入在神经网络模型求解的参数中, 并在六自由度平面机械臂平台上验证了该模型的有效性. 文献[15]中Xiao等人提出一种鲁棒非线性归零神经网络(robust nonlinear zeroing neural networks, RNZNN), 建立了相应的RNZNN模型, 通过添加两个新的非线性激活函数来求解不同噪声下的李雅普诺夫方程. 然而, 虽然能够实现有限时间收敛, 但并未考虑冗余机械臂运动中关节角位置的重复性问题.

正确的初始关节角位置是冗余机械臂完成重复任务的前提条件. 当冗余机械臂的末端执行器跟踪闭合路径时, 各关节角的最终位置偏移初始期望位置时, 则会导致机械臂无法完成重复任务. 因此, 引入一种最小化性能指标, 将冗余机械臂的重复运动规划问题转化为一类带等式约束的时变二次规划(quadratic programming, QP)问题[16–23]. 文献[16]通过拉格朗日乘数法, 将该类带等式约束的时变QP问题转化为时变等式问题, 通过ZNN模型进行求解, 该方法成功应用于冗余机械臂的运动规划中, 实现了重复任务.

值得注意的是, 在实际应用中, 几乎所有机械臂都有其自身的关节物理限制, 即关节角度限制和关节运动速度限制. 然而, 上述提出的冗余机械臂重复运动规划解决方案并未考虑其关节物理限制, 这可能会导致冗余机械臂在运动过程造成关节损伤. 因此, 将带有关节物理限制的冗余机械臂重复运动规划问题转化为带约束的时变QP问题, 具有一定的实际应用价值.

针对带约束的时变QP问题, 通常将其转化为一个对偶问题来进行求解[17–23]. 文献[17]利用拉格朗日乘子法提出了一种Lagrange神经网络模型, 但该神经网络模型的计算复杂度高. 文献[18]提出了一种原对偶神经网络(primal dual neural network, PDNN)用以同时求解原QP问题和其对偶问题, 然而, 该动力学方程含有高阶的非线性项, 且计算复杂, 为了减轻高维复杂向量带来的巨大计算量, 文献[19–20]提出了一种基于LVI的原对偶神经网络(LVI-based primal dual neural network, LVI-PDNN) 用以求解QP问题; 文献[21]在LVI-PDNN的基础上提出了一种简化的LVI-PDNN (simplified LVI-PDNN, SLVI-PDNN); 文献[22]提出了一种对偶神经网络(standard dual neural network, S-DNN). 虽然, 上述神经网络模型都考虑到了冗余机械臂的关节物理极限, 能够实现重复运动, 但是依旧无法在有限的时间内收敛到最优解. 因此通过对偶神经网络来解决带约束的时变QP问题还不是最优的方法.

为了克服现有的对偶神经网络无法在有限的时间内实现冗余机械臂轨迹规划问题, 本文提出了一种有限时间对偶神经网络(finite-time dual nerual network, FTDNN)模型用以解决带关节物理限制的冗余机械臂重复运动规划问题. 结合有限时间和对偶神经网络两种特性, 到达FTDNN模型的最优状态. 此外, 为了说明FTDNN对比鲁棒非线性归零神经网络和对偶神经网络存在优越性, 表1对上述RNZNN, SDNN, LVI-PDNN, SLVI-PDNN和FTDNN 5种模型的主要特征进行了比较总结. 由表中对比结果可知, 在相同条件下, FTDNN的性能较好. 本文根据李雅普诺夫稳定性定理, 构造对应的李雅普诺夫函数, 证明了FTDNN模型的渐近稳定性, 并进一步计算出FTDNN模型收敛至问题最优解的收敛时间上界, 证明了模型的有限时间收敛性. 最后, 通过计算机仿真, 将本文提出的FTDNN模型用以控制PA10机械臂的轨迹跟踪任务, 验证模型的有效性和适用性. 同时, 将FTDNN模型的仿真结果与现有的RNZNN, SDNN, LVI-PDNN和SLVI-PDNN模型进行对比, 进一步验证了FTDNN模型的优越性.

表 1 FTDNN 模型与 RNZNN, SDNN, LVI-PDNN 和SLVI-PDNN模型比较

Table 1 Comparison table between FTDNN model and RNZNN, SDNN, LVI-PDNN and SLVI-PDNN models

神经网络	是否考虑关节限制	收敛时间
FTDNN	考虑	有限
RNZNN	不考虑	有限
SDNN	考虑	无限
LVI-PDNN	考虑	无限
SLVI-PDNN	考虑	无限

2 问题描述

基于冗余机械臂的正运动学问题, 末端执行器位置和方向向量$\boldsymbol{r}(t) \in \mathbb{R}^n$与关节角向量$\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^m$之间的关系可以描述为

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \boldsymbol{r}(t), \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{g}(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$是一个非线性连续函数映射.

对式(1)进行微分, 可以得到关节速度向量$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \in \mathbb{R}^m$与末端执行器速度向量$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \in \mathbb{R}^n$之间的关系, 具体为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}(t))\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t), \tag{2}$$

其中: $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^{n\times m}$为雅可比矩阵且$m > n$, 具体形式为$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \dfrac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}(t))}{\partial \boldsymbol{\theta}}$; $\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \in \mathbb{R}^m$是$\boldsymbol{\theta}(t)$关于时间的导数; $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \in \mathbb{R}^n$为$\boldsymbol{r}(t)$关于时间的导数.

为方便后续描述, 本文将$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}(t))$简化为$\boldsymbol{J}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$简化为$\dot{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta}(t)$简化为$\boldsymbol{\theta}$, $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ 简化为$\dot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{r}(t)$简化为$\boldsymbol{r}$.

为实现重复运动目标, 本文通过最小化关节当前位置与初始位置之间的位移量来消除关节角偏差. 所得到的速度层优化性能指标描述如下:

$$\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{a} = \beta(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}(0)), \tag{3}$$

其中: $\boldsymbol{\theta}(0) \in \mathbb{R}^m$是关节角变量的初始值, $\beta > 0$是用来调节关节位移幅值的设计参数.

由于在式(3)中, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$为决定变量, 则$\boldsymbol{a}$相对于$\dot{\boldsymbol{\theta}}$是个常量. 因此, 所需优化的性能指标可进一步转化为

$$\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\boldsymbol{\theta}}(t).$$

在实际应用中, 还需要考虑冗余机械臂自身的关节物理极限, 即

$$\boldsymbol{\theta}^- \leqslant \boldsymbol{\theta} \leqslant \boldsymbol{\theta}^+, \tag{4}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^- \leqslant \dot{\boldsymbol{\theta}} \leqslant \dot{\boldsymbol{\theta}}^+, \tag{5}$$

其中$\boldsymbol{\theta}^{\pm}$和$\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\pm}$分别为关节角向量$\boldsymbol{\theta}(t)$和关节速度向量$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$ 的上下界. 由于式(2)(5)都是基于速度层所建立的, 所以需要将式(4)转化速度层上的约束, 即

$$\epsilon\left(\boldsymbol{\theta}^- - \boldsymbol{\theta}\right) \leqslant \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \leqslant \epsilon\left(\boldsymbol{\theta}^+ - \boldsymbol{\theta}\right), \tag{6}$$

其中$\epsilon > 0$是用来调节关节速度的可行域.

将式(5)–(6)相结合, 针对$\dot{\boldsymbol{\theta}}$的不等式约束可进一步转化为

$$\boldsymbol{\eta}^- \leqslant \dot{\boldsymbol{\theta}} \leqslant \boldsymbol{\eta}^+, \tag{7}$$

其中$\boldsymbol{\eta}^-$和$\boldsymbol{\eta}^+$的第i个元素分别表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_i^- = \max\{\dot{\theta}_i^-,\ \epsilon\left(\theta_i^- - \theta_i\right)\}, \\ \boldsymbol{\eta}_i^+ = \min\{\dot{\theta}_i^+,\ \epsilon\left(\theta_i^+ - \theta_i\right)\}. \end{cases} \tag{8}$$

基于上述分析, 带有关节物理限制的冗余机械臂重复运动规划问题可描述为如下带约束的时变QP问题:

$$\begin{aligned} &\min\ \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \\ &\text{s.t. } \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{r}}, \\ &\quad\ \boldsymbol{\eta}^- \leqslant \dot{\boldsymbol{\theta}} \leqslant \boldsymbol{\eta}^+. \end{aligned} \tag{9}$$

3 模型描述

令式(9)中的$\boldsymbol{x} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{c} = \dot{\boldsymbol{r}}$, 带约束重复运动规划(repetitive motion planning, RMP)方案可定义如下:

$$\min\ \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \tag{10}$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{J}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\eta}^- \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{\eta}^+, \tag{12}$$

其中$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{I}$为m维单位矩阵. 需要注意的是, 本文中假设$\boldsymbol{J}$是行满秩矩阵, 即$\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}) = n$.

根据Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件可知, 带约束RMP方案(10)–(12)的最优解也应当满足下述情况:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}, \tag{14}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^+, & \boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{\eta}^- \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{\eta}^+, & \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^-, & \boldsymbol{\mu} < \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{15}$$

其中: $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$和$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$分别为等式约束(11)和不等式约束(12)的对偶变量.

通过定义一个投影函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = [f_1(y_1)\ \ f_2(y_2)\ \ \cdots\ \ f_i(y_i)]^{\mathrm{T}},\ \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

其中

$$f_i(y_i) = \begin{cases} \eta_i^+\ ,\ y_i > \eta_i^+, \\ y_i\ \ ,\ \eta_i^- \leqslant y_i \leqslant \eta_i^+, \\ \eta_i^-\ ,\ y_i < \eta_i^-, \end{cases} \tag{16}$$

$f_i(y_i)$代表每个元素的处理函数. 式(15)进一步简化为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}). \tag{17}$$

结合式(13)–(14)可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}=&-(\boldsymbol{M}^{-1}-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1})\boldsymbol{\mu}-\\&\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{a}),\\\boldsymbol{\gamma}=&-(\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\mu}-\\&(\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{a}).\end{aligned}\tag{18}$$

将$\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^m$和$\boldsymbol{K}\in\mathbb{R}^{m\times m}$分别定义为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{d}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{a})-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{a},\\&\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}^{-1}-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}.\end{aligned}$$

则式(18)中的$\boldsymbol{x}$可简化为

$$\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d}.\tag{19}$$

将式(19)代入到式(17)中, 可得

$$-\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d}).\tag{20}$$

基于式(19)–(20)的分析, 带约束RMP方案(10)–(12)可以转化为如下的对偶问题进行求解:

$$\begin{cases}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d}),\\\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d}.\end{cases}\tag{21}$$

因此, 本文提出一种有限时间对偶神经网络(finite-time dual neural network, FTDNN)模型用以求解带约束的RMP方案(10)–(12), 即

$$\begin{cases}\text{状态方程: }\dot{\boldsymbol{\mu}}=-\alpha\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\\\qquad\qquad\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d}),\\\text{输出方程: }\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d},\end{cases}\tag{22}$$

其中: $\alpha\in\mathbb{R}$且$\alpha>0$, $\boldsymbol{\Phi}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$为激活函数, 具体定义为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z})=[\phi_1(z_1)\ \ \phi_2(z_2)\ \ \cdots\ \ \phi_i(z_i)]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^m,$$

$\phi_i(z_i)$代表每个元素的处理函数, 与$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z})$具有相同属性

$$\phi_i(z_i)=|z_i|^p\operatorname{sgn}(z_i),\tag{23}$$

其中: $p\in\mathbb{R}$且$0<p<1$, $\operatorname{sgn}(\cdot)$为符号函数.

4 理论分析

本节针对所提出的FTDNN模型(22)的稳定性和有限时间收敛性进行分析,并计算出FTDNN模型收敛至带约束RMP方案(10)–(12)的时间上界, 从而验证了FTDNN模型(22)的有效性和可行性.

在分析稳定性与有限时间收敛性之前, 先给出以下引理:

引理 1[24] 设$\boldsymbol{M}\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $\boldsymbol{J}\in\mathbb{R}^{n\times m}$, 其中$n<m$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{J})=n$, 则

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}^{-1}-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}\succeq 0.$$

引理 2[25] 设$\boldsymbol{H}$为矩阵$\boldsymbol{W}$的$n-1$阶子矩阵, $\boldsymbol{W}$为n阶Hermitian矩阵. 当$\boldsymbol{W}$的n个特征值, 即δ_n, 满足$\delta_n\leqslant\delta_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\delta_2\leqslant\delta_1$, $\boldsymbol{H}$的$n-1$个特征值, 即ζ_n, 满足$\zeta_n\leqslant\zeta_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\zeta_3\leqslant\zeta_2$时, 则$\delta_n\leqslant\zeta_n\leqslant\delta_{n-1}\leqslant\zeta_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\delta_2\leqslant\zeta_2\leqslant\delta_1$.

引理 3[26] 首先, 假设ϵ_1和ϵ_b分别是矩阵$\boldsymbol{K}$的最小特征值和最大特征值, 其中$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$. 其次, 假设$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})+\boldsymbol{K}$; $\boldsymbol{I}$为m阶单位矩阵; $D\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\}$, $0<\lambda_i<1$, 则$\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\succeq\epsilon_1\boldsymbol{I}$且$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{z}\geqslant\epsilon_1\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$, $\forall z\in\mathbb{R}^m$. 进一步, 当$\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}=0$时, 可得$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{z}=0$.

4.1 稳定性

定理 1 设ϵ_1和ϵ_b分别是矩阵$\boldsymbol{K}$的最小特征值和最大特征值. 给定矩阵$\boldsymbol{J}$, 向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$以及$\boldsymbol{\eta}^{\pm}$, 当$\alpha>0$, $0<p<1$时, 本文所提出的FTDNN模型(22)在平衡点$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$是渐近稳定的.

证 首先, 定义一个李雅普诺夫函数

$$V(\boldsymbol{\mu},t)=\frac{\|\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d})\|_{p+1}^{p+1}}{p+1},\tag{24}$$

其中$\|\cdot\|_{p+1}$为$(p+1)$–范数, 具体形式为

$$\|\boldsymbol{z}\|_{p+1}=(\sum_{i=1}^{m}|z_i|^{p+1})^{\frac{1}{p+1}},\ \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^m.$$

其次, 根据上述定义, $V(\boldsymbol{\mu},t)$的时间导数$\dot V$可表示为

$$\begin{aligned}\dot V=&\ \dot{\boldsymbol{\mu}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})+\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\times\\&\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d})=\\&-\frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\\&\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}(I-\boldsymbol{K})+\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\times\\&\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d}),\end{aligned}\tag{25}$$

其中$\dot{\boldsymbol{\mu}}$是$\boldsymbol{\mu}$关于时间的导数;

$$\boldsymbol{S}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\}$$

是投影函数$\boldsymbol{f}(\cdot)$的导数, 其中

$$\lambda_i=\begin{cases}0,\ ((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})_i<\eta_i^-\text{ 或}\\\quad\ ((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})_i>\eta_i^+,\\1,\ \eta_i^-\leqslant((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})_i\leqslant\eta_i^+.\end{cases}$$

根据引理3可知, $(\boldsymbol{S}(I-\boldsymbol{K})+\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}(I-\boldsymbol{K})+\boldsymbol{K}\succeq\epsilon_1\boldsymbol{I}$, 则

$$\begin{aligned}\dot V\leqslant&-\frac{\epsilon_1}{2\alpha}\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d})\|^2=\\&-\frac{\epsilon_1}{2\alpha}\|\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d}\|_{2p}^{2p},\end{aligned}$$

其中$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_{2p}$分别为2–范数和2p–范数. 根据前文定义的$0<p<1$, 可得$0<2p<p+1$, 进一步, 可得$\|\cdot\|_{p+1}\leqslant\|\cdot\|_{2p}$, 则上述不等式可转化为

$$\dot V\leqslant-\frac{\epsilon_1}{2\alpha}\|\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d}\|_{p+1}^{2p}=$$

$$-\frac{\epsilon_1}{2\alpha}(p+1)^{\frac{2p}{p+1}}V^{\frac{2p}{p+1}}. \tag{26}$$

由于$\boldsymbol{K}$是半正定矩阵, 根据引理1可知, $\boldsymbol{K}$的最小特征值$\epsilon_1 \geqslant 0$, 则$\dot{V} \leqslant 0$.

结合李雅普诺夫稳定性定理, 可得FTDNN模型(22)在平衡点$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$是稳定的.

下面分$\boldsymbol{K}$是满秩矩阵和$\boldsymbol{K}$不是满秩矩阵两种情况来讨论.

1) 考虑$\boldsymbol{K}$是满秩矩阵的情况.

当$\boldsymbol{K}$是满秩矩阵时, 最小特征值$\epsilon > 0$, 则

$$\dot{V} \leqslant -\frac{\epsilon_1}{2\alpha}(p+1)^{\frac{2r}{p+1}}V^{\frac{2p}{p+1}} < 0.$$

因此, 根据李雅普诺夫定理, FTDNN模型在平衡状态$\boldsymbol{\mu}^*$是渐近稳定的.

2) 考虑$\boldsymbol{K}$不是满秩矩阵的情况.

设$\dot{V}(\bar{\boldsymbol{\mu}})=0$, 即

$$\begin{aligned}0=\,&(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\bar{\boldsymbol{\mu}}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{\mu}}-\boldsymbol{d}))^{\mathrm{T}}\\&(\boldsymbol{S}(I-\boldsymbol{K})+\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\bar{\boldsymbol{\mu}}+\boldsymbol{d})+\\&\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{\mu}}-\boldsymbol{d}).\end{aligned}$$

那么, 根据引理3, 可得

$$\boldsymbol{K\Phi}(\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\bar{\boldsymbol{\mu}}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{\mu}}-\boldsymbol{d})=0. \tag{27}$$

在平衡点$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$时, $\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}^*+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}^*-\boldsymbol{d}=0$, 那么, 根据LaSalle's不变集定理[27], 式(27)所构成的最大不变集为$\Omega := \{\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*\}$. 因此, FTDNN模型(22)在平衡点$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$是渐近稳定的.

证毕.

定理 2　当FTDNN模型(22)的平衡点为$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$时, 输出方程$\boldsymbol{x}^*=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}^*+\boldsymbol{d}$就是带约束RMP方案(10)–(12)的最优解.

证　当FTDNN模型(22)的平衡点为$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$时, $\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}^*+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}^*-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$, 这说明$\mu^*$为式(20)的解. 因此, 可以进一步得到式(17)–(18)的解, 即$\boldsymbol{x}^*$和$\boldsymbol{\gamma}^*$. 由于上述所得结果, 可得到方案(13)–(15)的解, 那么, $\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{\gamma}^*$也是带约束RMP方案(10)–(12)的最优解.

证毕.

4.2　有限时间收敛性

定理 3　设FTDNN模型(22)的平衡点为$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$, 在满足定理1的条件下, 当$\boldsymbol{K}$为满秩矩阵时, FTDNN模型(22)能够在有限时间内收敛至$\boldsymbol{\mu}^*$, 且收敛时间上界限为$\dfrac{2\alpha\left\|\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d}\right\|_{p+1}^{1-p}}{\epsilon_1(1-p)}$.

证　首先, 当$\boldsymbol{K}$为满秩矩阵时, $\boldsymbol{K}$的最小特征值$\epsilon_1 > 0$.

其次, 设$\dot{Q}=-\dfrac{\epsilon_1}{2\alpha}(p+1)^{\frac{2p}{p+1}}V^{\frac{2p}{p+1}}$, 其中$Q_0$为初始时刻$t_0$的值, 具体定义如下所示:

$$\begin{aligned}&Q_0=V_0=V(t_0)=\\&\qquad\frac{\left\|\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu_0}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu_0}-\boldsymbol{d})\right\|_{p+1}^{p+1}}{p+1},\end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{\mu}_0=\boldsymbol{\mu}(t_0)$.

对$\dot{Q}$求积分, 可得

$$Q(t)=\begin{cases}(V_0^{\frac{1-p}{p+1}}-\varDelta(t-t_0))^{\frac{r+1}{1-p}}, & t_0 \leqslant t < t_1,\\ 0, & t \geqslant t_1,\end{cases}$$

其中: $\varDelta \in \mathbb{R}$, $\varDelta=\dfrac{\epsilon_1}{2\alpha}(1-p)(p+1)^{\frac{p-1}{p+1}}$; $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_1 \geqslant 0$, $t_1=t_0+\dfrac{V_0^{\frac{1-p}{p+1}}}{\varDelta}$. 根据式(26)可知, 当$t \geqslant t_0$时, $V(t) \leqslant Q(t)$. 因此, 可以得到

$$\begin{cases}V(t) \leqslant (V_0^{\frac{1-p}{p+1}}-\varDelta(t-t_0))^{\frac{p+1}{1-p}}, & t_0 \leqslant t < t_1,\\ V(t)=0, & t \geqslant t_1.\end{cases} \tag{28}$$

由$V(t)$的定义式可知, 当$t \geqslant t_1$时, $\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d})=\boldsymbol{0}$, 而在平衡点$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$处, $\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}^*+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}^*-\boldsymbol{d})=\boldsymbol{0}$.

最终, 可以得到以下结论: FTDNN模型(22)收敛至平衡点$\boldsymbol{\mu}^*$的时间t_{s}满足

$$t_{\mathrm{s}} \leqslant \frac{2\alpha\left\|\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d}\right\|_{p+1}^{1-p}}{\epsilon_1(1-p)}.$$

证毕.

5　计算机仿真及对比

为验证本文所提出的FTDNN模型(22)求解带约束RMP方案(10)–(12)的有效性, 本节以PA10机械臂为例, 进行计算机仿真, 并与传统的神经网络模型进行比较, 进一步验证了所提出的FTDNN模型(22)的优越性. 需要注意的是, PA10机械臂是包含7个自由度的冗余机械臂(即4个旋转轴和3个枢轴), 相应的DH参数以及各关节物理约束[20](即关节角度限制$\theta_i^{\pm}$和关节速度限制$\dot{\theta}_i^{\pm}$)如表2所示.

5.1　圆形轨迹仿真结果

在本次仿真中, 将利用FTDNN模型(22)控制PA10机械臂的末端执行器跟踪1个圆形轨迹, 该圆形轨迹半径为0.10 m, 整个运行周期为$T=10$ s. 此外, 关节变量的初始状态为$\theta(0)=[0; \pi/4; \pi/4; 2\pi/3; 0; -\pi/4; 0]$, 设计参数$\alpha=10$, $\beta=5$, $p=0.7$, $\epsilon=20$. 下面分两种情况进行仿真研究.

情况1　不考虑PA10机械臂的各关节物理限制. 将$\theta_i^{\pm}$与$\dot{\theta}_i^{\pm}$(其中$i=1,2,\cdots$)设置为1个无穷大的数. 对应的仿真结果如图1–3所示.

表 2 PA10机械臂的DH参数以及各关节物理极限

Table 2 DH parameters of PA10 manipulator and physical limits of each joint

关节i	a_i/m	α_i/rad	d_i/m	θ_i/rad	θ_i^+/rad	θ_i^-/rad	$\dot{\theta}_i^+$/(rad · s^{-1})	$\dot{\theta}_i^-$/(rad · s^{-1})
1	0	$-\pi/2$	0.317	θ_1	π	$-\pi$	0.15	−0.15
2	0	$\pi/2$	0	θ_2	1.7637	−1.7637	0.15	−0.15
3	0	$-\pi/2$	0.45	θ_3	π	$-\pi$	0.2	−0.2
4	0	$\pi/2$	0	θ_4	2.5831	−2.5831	0.2	−0.2
5	0	$-\pi/2$	0.48	θ_5	$3\pi/2$	$-3\pi/2$	0.25	−0.2
6	0	$\pi/2$	0	θ_6	π	$-\pi$	0.2	−0.2
7	0	0	0.07	θ_7	2π	-2π	0.25	−0.25

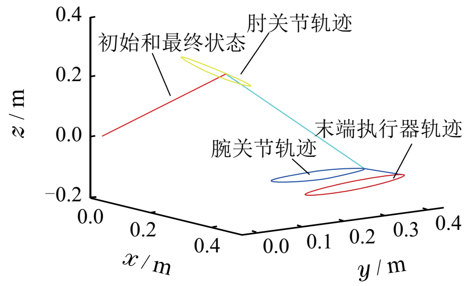

图 1 不考虑各关节物理限制情况下PA10机械臂的运动轨迹

Fig. 1 The trajectory of PA10 manipulator without joint-physical limits considered

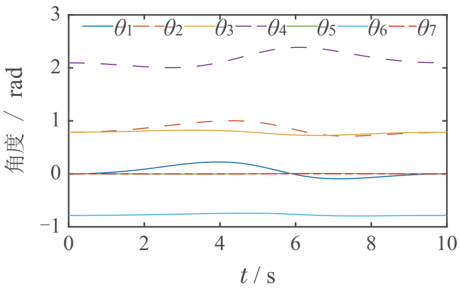

图 2 不考虑各关节物理限制情况下PA10机械臂的末端执行器跟踪圆形轨迹的关节角度

Fig. 2 The joint angles of the PA10 manipulator's end-effector track the circular trajectory without joint-physical limits considered

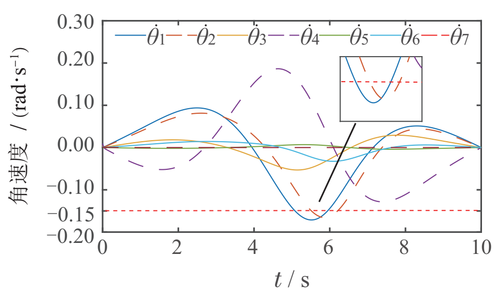

图 3 不考虑各关节物理限制情况下PA10机械臂的末端执行器跟踪圆形轨迹的关节角速度

Fig. 3 The joint angular velocity of the PA10 manipulator's end-effector track the circular trajectory without joint-physical limits considered

图1给出了PA10机械臂的各关节跟踪圆形轨迹时的运动轨迹图, 可以看出, 当PA10机械臂完成圆形轨迹跟踪后, 各关节的初始状态与最终状态重合. 图2给出了PA10机械臂在运动过程中各个关节角的状态轨迹, 可以看出, PA10机械臂的关节角在最终时刻都回到了初始状态, 即$\theta_i(0)=\theta_i(10)$(其中$i=1,2,\cdots,7$). 图1和图2的结果都表明, 在不考虑机械臂各关节物理限制的情况下, 通过FTDNN模型(22)能够解决PA10机械臂的关节角偏差问题, 实现重复运动. 此外, 从图2中可以看出, 在运动过程中, 各关节变量θ_i都在关节角度限制内. 然而, 图3给出了PA10机械臂在运动过程中各关节角速度的状态轨迹, 可以看出, 关节角速度$\dot{\theta}_1$和$\dot{\theta}_2$超出了其限定范围, 即[0.15, −0.15] rad/s, 显然, 这在实际应用中是不适用的, 可能会造成机械臂的关节损伤. 为了进行对比, 下面给出第2种情况的仿真结果.

情况2 考虑PA10机械臂的各关节物理限制的情况下进行仿真. $\theta_i^{\pm}$与$\dot{\theta}_i^{\pm}$的值如表2所示. 对应的仿真结果如图4–7所示.

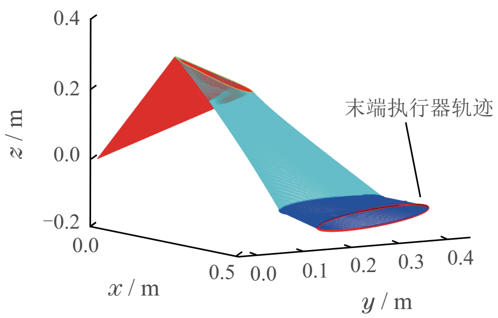

图 4 考虑各关节物理限制情况下PA10 机械臂的运动轨迹

Fig. 4 The trajectory of PA10 manipulator with joint-physical limits considered

图4给出了PA10机械臂跟踪圆形轨迹时的各个关节运动状态和末端执行器轨迹, 可以看出, 末端执行器的实际轨迹与期望圆形轨迹重合. 此外, 表3还给出了初始关节变量与最终关节变量的误差(即$\theta_i(10)-\theta_i(0)$), 可以看出, 各关节误差精度约10^{-4}. 图5给出了PA10机械臂末端执行器的跟踪误差$\hat{e}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})$, 其中$\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$和$\hat{e}_z$分别为$\hat{e}$的X轴, Y轴和Z轴分量, 可以看

出, 最大的跟踪误差不超过2×10^{-4} m.

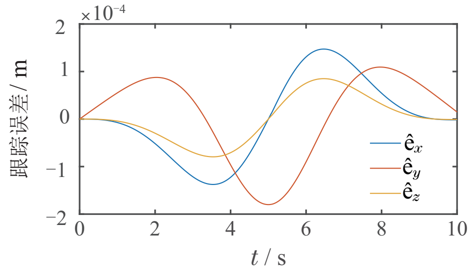

图 5　考虑各关节物理限制情况下PA10 机械臂的末端执行器跟踪误差

Fig. 5　The end-effector tracking error of PA10 manipulator with joint-physical limits considered

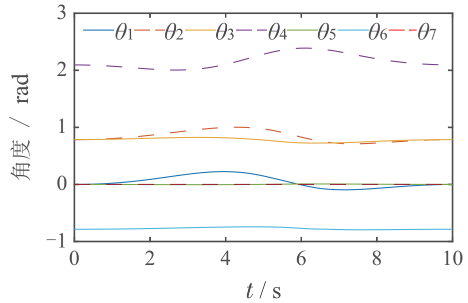

图 6　考虑各关节物理限制情况下PA10 机械臂的末端执行器跟踪误差

Fig. 6　The joint angles of the PA10 manipulator's end-effector track the circular trajectory with joint-physical limits considered

表 3　考虑关节物理极限情况下关节角位置误差

Table 3　Joint-angular position errors with joint-physical limits considered

关节i	$\theta_i(0)$	$\theta_i(10)$	$\theta_i(10)-\theta_i(0)$
1	0	−2.1011e−5	−2.1011e−5
2	0.7854	0.7854	−1.8907e−5
3	0.7854	0.7854	7.4476e−6
4	2.0944	2.0944	−2.0753e−5
5	0	−7.3372e−7	−7.3712e−7
6	−0.7854	−0.7854	3.1916e−6
7	0	−9.7979e−8	−9.7979e−8

结合图4–5和表3的结果可知, 在考虑机械臂的各关节物理限制的情况下, FTDNN模型(22)能够控制PA10机械臂在极小的跟踪误差下实现重复运动.

图6–7分别展示了在考虑各关节物理限制情况下PA10机械臂运动过程中关节角度和关节角速度的状态轨迹, 可以看出, 由于考虑了各关节的物理限制, 所有关节角度θ_i与关节速度$\dot{\theta}_i$都保持在表2所给的限制范围内, 并且当冗余机械臂的关节速度接近于限制范围的临界值时(即$\dot{\theta}_1$和$\dot{\theta}_2$), 该关节速度就会停止加速, 从而保持在限制范围内. 该仿真结果表明: 一方面, 对比于情况1, 在实际应用中, 考虑机械臂在运动过程中的各关节的物理极限是非常必要的, 这样可以避免机械臂的物理损伤; 另一方面, 在考虑关节物理极限的情况下, FTDNN模型(22)能够有效控制PA10机械臂的末端执行器跟踪一个圆形轨迹, 并使冗余机械臂的所有关节都保持在其物理限制内.

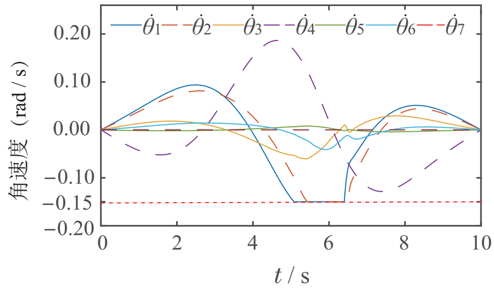

图 7　考虑各关节物理限制情况下PA10 机械臂的末端执行器跟踪圆形轨迹的关节角度

Fig. 7　The joint angular velocity of the PA10 manipulator's end-effector track the circular trajectory with joint-physical limits considered

综上所述, 本小节通过使PA10机械臂的末端执行器在三维空间中跟踪圆形轨迹, 验证了本文所提出的FTDNN模型(22)的有效性和实用性.

5.2　模型对比

在本小节中, 针对带约束RMP方案(10)–(12)的求解, 将本文所提出的FTDNN模型(22)与Xiao等人提出的鲁棒非线性归零神经网络(RNZNN)和其他原对偶神经网络进行对比. 从而验证了FTDNN模型(22)的优越性.

首先, 根据式(19), 定义FTDNN模型(22)求解带约束RMP方案(10)–(12)的剩余误差为$J_{\mathrm{E}}=\|\boldsymbol{f}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{d}\|_2$, 其中$\|\cdot\|_2$为2–范数, 其结果如图8所示. 从中可以看出在0.06704 s时, FTDNN模型的剩余误差已收敛至6.44×10^{-6} m. 该结果验证了FTDNN模型(22)求解带约束RMP方案(10)–(12)的有限时间收敛性.

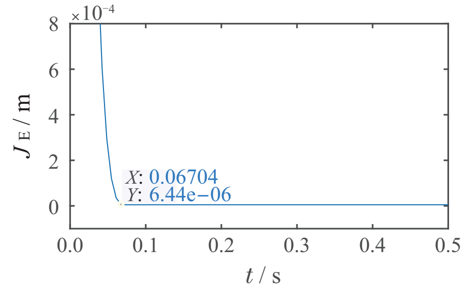

图 8　FTDNN模型(22)求解带约束RMP方案(10)–(12)的收敛误差J_{E}

Fig. 8　Convergence error J_{E} of FTDNN model (22) form solving RMP scheme (10)–(12) with constraints

Xiao等人[18]最新提出的RNZNN模型在求解Lyapunov方程时能够实现在预定时间内将误差收敛到零. 本文将其中的RNZNN模型运用求解RMP方案中, 得到的仿真结果如图9–10所示. 图9是RNZNN模型求解带约束RMP方案(10)–(12)的收敛误差. 从图9中可以看出在0.009921 s时, RNZNN模型的剩余误差已经收敛到零. 从而验证了RNZNN模型求解带约束RMP方案(10)–(12)是有限时间收敛的. 图10给出的是RNZNN模型控制PA10机械臂运动过程中各个关节角速度的状态轨迹, 可以看出, PA10机械臂的关节角速度$\dot{\theta}_1$和$\dot{\theta}_2$已经超出了其限定范围, 即[−0.15, 0.15] rad/s. 因为RNZNN模型中用到的神经网络不是对偶神经网络, 在求解RMP方案的过程中无法考虑角度约束, 因此机械臂运动时关节速度会超出其限定范围. 对比FTDNN模型和RNZNN模型, 虽然都能够在有限时间内求解RMP方案, 但是FTDNN模型考虑到了机械臂运动时关节的物理极限, 更加适用于实际应用.

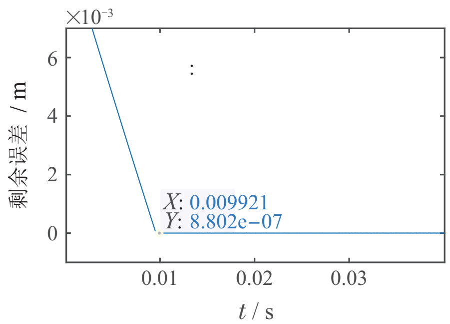

图 9 RNZNN模型求解带约束RMP方案的收敛误差

Fig. 9 Convergence error of RNZNN model form solving RMP scheme with constraints

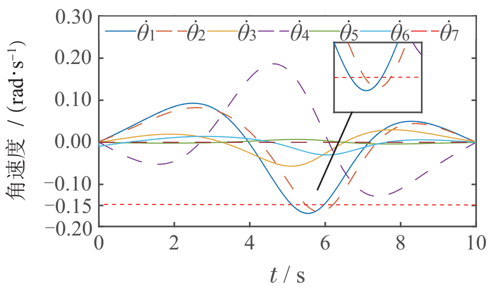

图 10 RNZNN模型中PA10机械臂的末端执行器跟踪圆形轨迹的关节速度状态图

Fig. 10 The joint angular velocity of the PA10 manipulator's end-effector track the circular trajectory with RNZNN model

其次, 将FTDNN模型(22)与对偶神经网络(standard dual neural network, SDNN), LVI-PDNN, SLVI-PDNN进行对比, 针对收敛时间与神经元数量两个问题对比结果如表4所示.

从表4可知, 针对带约束RMP方案(10)–(12)的求解, SDNN, LVI-PDNN和SLVI-PDNN的神经元数目等价于该方案中的等式(11)和不等式(12)中变量的维数之和, 即$n+m$; FTDNN模型(22)求解该问题时, 所需的神经元数目仅等于不等式(12)中变量的维数, 即m. 这表明FTDNN模型(22)的计算复杂度要低于上述3种神经网络; 此外, SDNN, LVI-PDNN和SLVI-PDNN求解带约束RMP方案(10)–(12)最优解的时间是无穷的[20–22], 而根据前文分析可知, FTDNN模型(22)收敛于带约束RMP方案(10)–(12)且求得最优解的时间是有限的. 因此, 从模型收敛时间和计算复杂度两方面说明, FTDNN模型(22)相比于SDNN, LVI-PDNN和SLVI-PDNN有更优越的性能.

表 4 不同神经网络求解带约束RMP方案(10)–(12)的仿真结果对比

Table 4 Comparisons of FTDNN model with other neural network models by solving RMP scheme (10)–(12) with constraints

神经网络	收敛时间	神经元数目
FTDNN	有限	m
SDNN[22]	无限	$n+m$
LVI-PDNN[19]	无限	$n+m$
SLVI-PDNN[21]	无限	$n+m$

图11分别给出了FTDNN模型, SDNN, LVI-PDNN和SLVI-PDNN在考虑关节物理限制情况下控制PA10机械臂的末端执行器跟踪圆形轨迹的回拢误差, 可以看出, 本文所提出的FTDNN模型(22)能够在极小的回拢误差下有效控制带有关节物理限制的PA10机械臂跟踪圆形轨迹, 并且其回拢误差精度远低于SDNN, LVI-PDNN和SLVI-PDNN, 再次验证了FTDNN模型(22)的优越性.

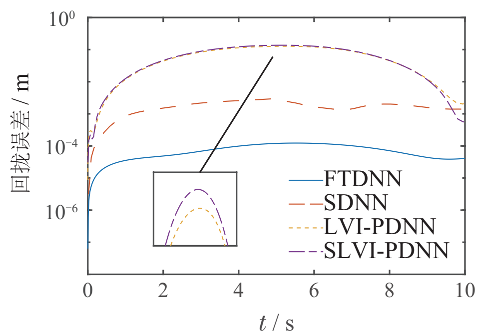

图 11 考虑关节物理限制情况下PA10末端执行器的回拢误差

Fig. 11 Pull-back position errors of the end-effector of PA10 redundant manipulator with joint-physical limits considered

最后, 为了进一步证明FTDNN模型(22)在实物机械臂中的应用效果, 图12展示了实物机械臂跟踪圆形轨迹的实验结果. 这组快照显示了Dobot Magician机

器人执行器跟踪圆形轨迹任务的过程. 最终机械臂的各关节角回拢到初始期望位置, 从而验证FTDNN模型(22)在实物机械臂运动中的可行性.

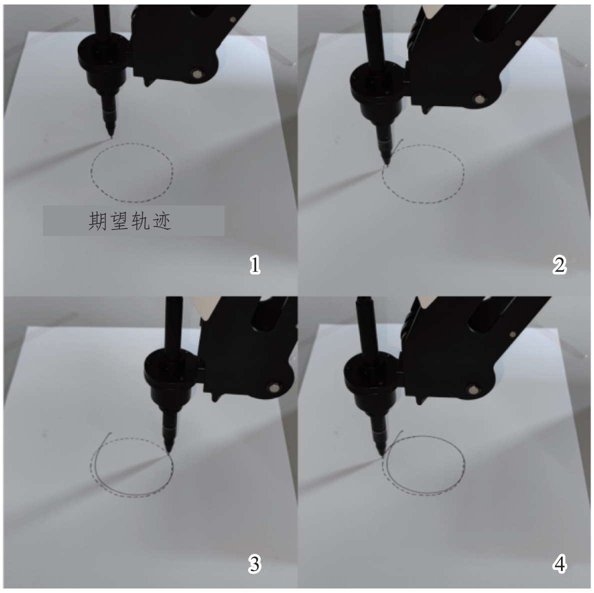

图 12 当末端执行器执行圆形轨迹任务时, 末端执行器的运动过程

Fig. 12 Movement of the end-effector when it performs a circular trajectory task

6 结论

本文针对带约束RMP方案(10)–(12), 提出了一种FTDNN模型(22). 在理论分析部分, 证明了FTDNN模型(22)的渐近稳定性, 并进一步计算出该模型求解RMP方案(10)–(12)最优解的时间上界, 证明了FTDNN模型(22)的有限时间收敛性. 最后, 将FTDNN模型应用于PA10冗余机械臂的重复运动规划, 计算机仿真结果表明FTDNN模型求解带约束RMP方案(10)–(12)的有效性.

参考文献:

[1] YANG C, LI Z, LI J. Trajectory planning and optimized adaptive control for a class of wheeled inverted pendulum vehicle models. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2013, 43(1): 24 – 36.

[2] HONG C, CHEN H, MOORING B W. Accuracy analysis of dynamic-wafer-handling robotic system in semiconductor manufacturing. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, 61(3): 1402 – 1410.

[3] SUN Jingtao, WANG Yaonan, TAN Jianhao, et al. Hybrid visual servoing for rotor aerial manipulation system. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 505 – 515.
(孙敬陶, 王耀南, 谭建豪, 等. 旋翼飞行机械臂系统的混合视觉伺服控制. 控制理论与应用, 2019, 36(4): 505 – 515.)

[4] WU Y, PAN Y, CHEN M , et al. Quantized adaptive finite-time bipartite NN tracking control for stochastic multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(6): 2870 – 2881.

[5] KADERABEK J, SHAPOVAL V, MATEJKA P, et al. Comparison of four RTK receivers operating in the static and dynamic modes using measurement robotic arm. *Sensors*, 2021, 21(23): 7794.

[6] HOPFIELD J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1982, 79(8): 2554 – 2558.

[7] JI Yuehui, ZHOU Hailiang, CHE Shixing, et al. Recurrent neural network-based optimal attitude control of reentry vehicle. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(3): 329 – 338.
(吉月辉, 周海亮, 车适行, 等. 基于递归神经网络的再入飞行器最优姿态控制. 控制理论与应用, 2021, 38(3): 329 – 338.)

[8] FANG Kai, YAO Jiaqi, LI Jiawang. Three-dimensional simultaneous tracking and stabilization of underactuated autonomous underwater vehicles based on neural network. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(6): 731 – 738.
(方凯, 姚佳琪, 李家旺. 基于神经网络的欠驱动水下机器人三维同步跟踪和镇定控制. 控制理论与应用, 2021, 38(6): 731 – 738.)

[9] ZHANG Y, LONG J. *Robot Manipulator Redundancy Resolution*. Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley and Sons, Ltd, 2017.

[10] ZHANG Y, TAN N, CAI B, et al. Matlab simulink modeling of zhang neural network solving for time-varying pseudoinverse in comparison with gradient neural network. *The 2nd International Symposium on Intelligent Information Technology Application*, Shanghai, China: IEEE, 2008: 39 – 43.

[11] LI S, ZHANG Y, JIN L. Kinematic control of redundant manipulators using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 28(10): 2243 – 2254.

[12] LÜ X, TAN Z, CHEN K, et al. Improved recurrent neural networks for online solution of moore-penrose inverse applied to redundant manipulator kinematic control. *Asian Journal of Control*, 2020, 22(3): 1188 – 1196.

[13] CHEN D, LI S, LI W, et al. A multi-level simultaneous minimization scheme applied to jerk-bounded redundant robot manipulators. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2020, 17(1): 463 – 474.

[14] JIN L, ZHANG Y, LI S, et al. Modified znn for time-varying quadratic programming with inherent tolerance to noises and its application to kinematic redundancy resolution of robot manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(11): 6978 – 6988.

[15] XIAO L, ZHANG Y, HU Z, et al. Performance benefits of robust nonlinear zeroing neural network for finding accurate solution of lyapunov equation in presence of various noises. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, 15(9): 5161 – 5171.

[16] ZHANG Y, ZHAN L. Zhang neural network for online solution of time-varying convex quadratic program subject to time-varying linear-equality constraints. *Physics Letters A*, 2009, 373(18/19): 1639 – 1643.

[17] ZHANG S, CONSTANTINIDES A G. Lagrange programming neural networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1992, 39(7): 441 – 452.

[18] TAO Q, CAO J, XUE M, et al. A high performance neural network for solving nonlinear programming problems with hybrid constraints. *Physics Letters A*, 2001, 288(2): 88 – 94.

[19] ZHANG Y. On the LVI-based primal-dual neural network for solving online linear and quadratic programming problems. *American Control Conference*. Portland, OR, USA: IEEE, 2005: 1351 – 1356.

[20] ZHANG Y, WU H, GUO D, et al. The link and comparison between velocity-level and acceleration-level repetitive motion planning schemes verified via PA10 robot arm. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, 69: 245 – 262.

[21] ZHANG Y, LI Z, TAN H Z, et al. On the simplified LVI-based primal-dual neural network for solving LP and QP problems. *IEEE International Conference on Control and Automation*. Guangzhou: IEEE, 2007: 3129 – 3134.

[22] ZHANG Y, ZHANG Z. *Repetitive Motion Planning and Control of Redundant Robot Manipulators*. Berlin: Springer, 2013.

[23] LI S, ZHOU M C, LUO X. Modified primal-dual neural networks for motion control of redundant manipulators with dynamic rejection of harmonic noises. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018: 29(10) 4791 – 4801.

[24] LIU S, WANG J. A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006, 17(6): 1500 – 1510.

[25] HWANG S. Cauchy's interlace theorem for eigenvalues of hermitian matrices. *The American Mathematical Monthly*, 2004, 111(2): 157 – 159.

[26] LI S, LI Y, WANG Z. A class of finite-time dual neural networks for solving quadratic programming problems and its k-winners-take-all application. *Neural Networks*, 2013, 39: 27 – 39.

[27] KHALLIL H K. Output regulation of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2002, 38(6), 1091 – 1093.

作者简介:

孔　颖　教授, 目前研究方向为神经网络、机器人轨迹优化、时变系统, E-mail: kongying-888@163.com;

吴佳佳　硕士研究生, 目前研究方向为神经网络、机器人轨迹优化、时变系统, E-mail: wjj1825859@163.com;

雷景生　教授, 目前研究方向为机器学习、人工智能应用技术、数据科学与大数据技术, E-mail: jshlei@126.com;

胡汤珑　硕士研究生, 目前研究方向为神经网络、机器人轨迹优化、时变系统, E-mail: tanglong1216@163.com.