

基于知识Petri网的确定性和不确定性联合推理

谭开成, 罗继亮[†], 林鑫杰, 章宏彬

(华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 厦门 361021; 福建省电机控制与系统优化调度工程技术研究中心, 福建 厦门 361021)

摘要: 知识推理是人工智能的核心领域, 旨在研究如何从已知(知识库和推理规则)推理出未知, 以帮助智能体做出科学决策. 而智能体所处的环境存在不可观性和不确定性, 因此知识库通常不仅包含确定性知识, 还包含不确定性知识, 而且推理过程需要两类知识紧密协作. 然而, 目前的推理方法无法将两类知识统一表示, 常常将两者对应的推理过程割裂进行. 基于此, 为了实现在统一的模型架构下完成确定性和不确定性联合推理, 给出了一种知识Petri网推理方法. 首先, 定义了一种新的知识Petri网, 使其不仅能够描述确定性的知识规范, 也可以描述先验概率知识; 其次, 根据知识Petri网的网结构, 给出了一种知识Petri网概率独立剪枝算法, 能够指数级地降低不确定性推理的计算复杂性; 最后, 利用知识Petri网及其概率独立剪枝算法, 给出了一种新型推理算法, 实现了确定性和不确定性的联合推理, 并利用Wumpus世界进行了演示和验证.

关键词: 知识Petri网; 确定性和不确定性; 推理; 剪枝处理; wumpus世界; 人工智能

引用格式: 谭开成, 罗继亮, 林鑫杰, 等. 基于知识Petri网的确定性和不确定性联合推理. 控制理论与应用, 2023, 40(3): 531 – 539

DOI: 10.7641/CTA.2022.11234

Certainty and uncertainty joint reasoning based on knowledge Petri nets

TAN Kai-cheng, LUO Ji-liang[†], LIN Xin-jie, ZHANG Hong-bin

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen Fujian 361021, China;
Fujian Engineering Research Center of Motor Control and System Optimal Schedule, Xiamen Fujian 361021, China)

Abstract: The knowledge reasoning is a core area of artificial intelligence, which aims to investigate how to reason from known (knowledge bases and inference rules) to unknown in order to assist an agent to make rational decisions. Since an environment where an agent lives may be unobservable and uncertain, its knowledge base usually contains both deterministic and uncertain rules, and the reasoning process requires their close collaboration. However, they cannot be represented in a unified way by the reported methods, and their corresponding reasoning processes are often separated from each other. Therefore, an inference method is proposed based on a knowledge Petri net to realize the certainty and uncertainty joint reasoning in a unified architecture. First, a new knowledge Petri net is defined, which can be used to describe not only deterministic rules but also prior probabilities. Second, according to structures of a knowledge Petri net, a probabilistic independent pruning algorithm is given, which can greatly reduce the computational complexity of uncertainty reasoning. Finally, a new inference algorithm is given to realize the joint inference by utilizing a knowledge Petri net and the probabilistic independent pruning algorithm, and the Wumpus world is taken as an example to illustrate and verify the theoretic results.

Key words: knowledge Petri nets; certainty and uncertainty; reasoning; pruning; wumpus world; artificial intelligence

Citation: TAN Kaicheng, LUO Jiliang, Lin Xinjie, et al. Certainty and uncertainty joint reasoning based on knowledge Petri nets. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(3): 531 – 539

1 引言

人工智能要求设计能够合理思考和行为的智能体(Agent)^[1]. Agent常常工作在复杂的环境中, 不可避免地面临一大挑战: 如何从观察信息和先验知识中推

理未知环境信息.

根据知识确定与否, 推理方法分为确定性推理和不确定性推理. 确定性推理所用的知识是确定的, 并且结论也是确定的. 逻辑推理的实质是证明在知识

收稿日期: 2021–12–16; 录用日期: 2022–05–23.

[†]通信作者. E-mail: jlluo@hqu.edu.cn; Tel.: +86 13110595996.

本文责任编辑: 赵千川.

国家自然科学基金项目(61973130)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61973130).

库 K 下语句 q 的永真性, 知识库中的逻辑知识是确定的, 推理结论为语句 q 是正确的或错误的, 或不做评价, 因而可以将逻辑推理理解为确定性推理. 分离和归结是逻辑推理中两个基础性规则, 分别采用Horn子句和合取范式(conjunctive normal form, CNF)的逻辑语句来表示知识库^[1]. Petri网作为一种强大的形式化语言, 其分析与综合^[2-4]得到了广泛地研究, 常被用于基于知识的推理建模中. 文献[5]用Petri网对蕴涵结构的子句集进行建模, 以变迁表示子句, 库所表示文字, 通过变迁激发序列表示相应的推理过程. 文献[6-7]利用了Petri网并行和异步来表示Horn子句集, 利用并行激发变迁来提高推理效率. 文献[8-9]将Petri网与命题动态逻辑相结合, 提出了一种新的逻辑语言(Petri-PDL), 并给出了一种基于归结规则的推理方法. 文献[10]利用Petri网的监控理论, 将布尔变量设计成环形Petri网, 将子句设计成监控库所, 从而得到推理Petri网. 文献[11]给出了一种知识Petri网的设计方法及其推理引擎, 将CNF形式知识库设计为知识Petri网, 定义了知识Petri网中的推理使能变迁, 通过激发推理使能变迁来完成推理. 文献[5-11]利用Petri网描述逻辑知识, 并设计相应的推理方法来实现逻辑推理.

但是, 逻辑推理无法处理不确定知识的表示及其推理问题. 不确定性推理是利用先验概率、条件概率或模糊逻辑等知识推理事件发生的可能性. 不确定知识表示引起了人工智能领域大量关注. 其中, 出现了贝叶斯网络^[12]、模糊神经网络^[13]、动态不确定因果关系图^[14]和马尔科夫链^[15]等模型, 在不确定性知识表示和推理方面发挥了重要作用. 这些方法依据模糊数学、统计学和概率论对不确定知识进行严格的数学描述, 为不确定性推理方法的设计提供了基础.

传统的Petri网无法描述不确定知识, 需要对Petri网定义作相应的扩展, 目前出现了两类方法:

一类是将Petri网与模糊数学相结合. 基于模糊产生式规则的模糊Petri网(fuzzy Petri net, FPN)^[16]被广泛地用来描述模糊知识, 通过弧上的置信度和变迁上的阈值来实现不确定性推理. 此后, 许多工作致力于改进推理规则和不确定性管理来增强FPN的描述能力. 文献[17]在传统的FPN上增加了条件库所, 设计了正向推理算法和反向推理算法. 文献[18-19]提出了一种基于时间约束FPN的故障诊断模型, 同时考虑模糊推理和时间推理. 文献[20]致力于研究FPN中输入库所的初始置信度, 根据不确定性二元组语术集、专家知识和收集数据获得FPN的初始真值. 文献[21-23]介绍了一类新型FPN, 称为语言Petri网, 并将其运用于设备故障诊断. 针对FPN在描述可变模糊准则下不确定知识的局限性, 文献[24]提出了一种基于定性映射和定性标准转换的扩展FPN模型.

另一类是将Petri网与概率论相结合. 文献[25]定义了一种概率传播Petri网, 用于描述贝叶斯网络中概率的传播, 将概率信息以图形化表示, 利用Petri网的网络结构和动态特性来实现不确定性推理. 文献[26]设计了一种随机Petri网, 结合数值和统计方法来估计变迁触发周期的概率密度函数, 并将该方法用于离散事件系统的故障检测和识别. 文献[27]提出了一种标签Petri网及其标识估计方法, 能够根据已知的初始标识和对应的先验概率, 计算该标识Petri网在观测标签序列下可能标识的条件概率.

无论是利用Petri网实现确定性推理^[5-11]还是不确定性推理^[16-27], 当前的研究工作往往将两者割裂进行, 而Petri网强大的建模能力促使笔者思考能否在统一的框架中实现两种推理. 笔者在前期工作^[11]中发现: 在确定性推理之后, 虽然部分命题符号仍然无法确定取值(真或假), 但是知识Petri网的结构已经排除了它们某些取值的可能性, 这种结构恰恰是重要的命题逻辑知识, 可以帮助后续的不确定性推理. 这促使笔者考虑如何借助这种网结构进行不确定性推理, 从而在一个模型框架下实现两种推理的有机结合.

为此, 本文扩展了符号Petri网的定义, 引入概率库所来描述符号的先验概率, 且概率库所能否标识仍需满足语义约束, 从而定义了一种可以同时描述命题逻辑和先验概率的知识Petri网, 通过激发推理使能的确定变迁实现确定性推理. 此外, 为了提高不确定推理的计算效率, 提出了一种概率独立剪枝算法, 利用确定性知识, 对与目标符号(待求解概率的符号)不相关的网络结点进行删除, 得到目标概率知识Petri网; 然后, 利用目标概率知识Petri网的可达图, 求解目标符号为真或为假的概率, 并且证明计算得到的目标符号的概率等于它在当前知识库下的条件概率.

在实际工程应用中, 不确定性分析往往是不可避免的环节. 完全联合概率分布能够有效回答不确定性, 但其规模扩展性较差. 对于一个由 n 个布尔变量描述的问题, 其完全联合概率分布需要一个 $O(2^n)$ 的表, 而实际问题中的变量往往成百上千甚至上百万个, 这使得计算复杂度十分庞大. 在本文设计的知识Petri网中, 相互依赖的变量以网络结构连接, 从而能够根据独立性和网分解来降低计算复杂度. 此外, 本文的确定性推理是可靠的, 不确定性推理是在确定性推理的基础上进行的, 能够利用确定性推理减小随机变量的联合分布空间, 从而提高不确定性推理的计算效率.

2 基本概念

命题逻辑是一种形式化语言, 其中原子语句由单个命题词组成, 通过括号和逻辑连接词连接原子语句, 构成一个复杂语句. 语义是用于判定特定模型中语句真值的规则. 知识库由Agent关于世界的认识和感知

的逻辑语句组成. 文字是原子语句或原子语句的否定式, 子句是文字的析取, 以子句的合取式表示的语句称为合取范式. 任何一个语句逻辑上都等价于某些子句的合取式, 故都可以写成合取范式的形式.

Petri网的网结构是一个四元组, 记为 $\mathcal{N} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$, 其中: $\mathcal{P}$ 是库所集; $\mathcal{T}$ 是变迁集; $\mathcal{F} \subseteq ((\mathcal{P} \times \mathcal{T}) \cup (\mathcal{T} \times \mathcal{P}))$ 是变迁和库所组成的有序二元组的集合, 表示库所与变迁之间的有向弧; $\mathcal{W}: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ 是有向弧与权重映射的正整数集. 如果 $(x, y) \in \mathcal{F}$, 则 x 是 y 的输入, y 是 x 的输出. $x^\bullet$ 表示 x 的输出集, $^\bullet x$ 表示 x 的输入集. 前置关联矩阵 $C^-: \mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{Z}$, 后置关联矩阵 $C^+: \mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{Z}$, 关联矩阵 $C = C^+ - C^-$. Petri网记作 $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, m_0)$, 其中: m_0 为初始标识, $m_0(p)$ 表示库所 p 初始时的托肯数. 对于变迁 $t \in \mathcal{T}$, 如果满足 $\forall p \in {}^\bullet t, m(p) \geq \mathcal{W}(p, t)$, 则 t 在标识 m 下是使能的, 记作 $m[t]$. 只有使能变迁可以激发, 当 t 激发时, 它的每个输入库所 p 减少 $\mathcal{W}(p, t)$ 个托肯, 每个输出库所 p 中增加 $\mathcal{W}(t, p)$ 个托肯. $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ 是Petri网 $\mathcal{G}$ 从初始标识 m_0 经过任意个变迁激发到达的标识组成的集合.

线性约束 (η, b) 要求Petri网在它规定的合法标识中演化, 其中: η 是 $|\mathcal{P}|$ 维行向量, b 是整数, 每个标识 m 满足 $\eta \cdot m \leq b$. 行向量 $\bar{\eta} = \eta \cdot C$ 称为变迁权重向量, 其中 C 是关联矩阵. 根据库所不变量监控(supervision-based-on-place-invariant, SBPI)方法, 设计监控库所 p , 其初始标识为 $m_0(p) = b - \eta \cdot m_0$; 当 $\bar{\eta}(t) > 0$, 添加有向弧 (p, t) , 当 $\bar{\eta}(t) < 0$, 添加有向弧 (t, p) , 弧上权值均为 $|\bar{\eta}(t)|$.

根据可达图算法可获得Petri网的可达图, 该图为加权有向图, 记作 $G_R = (V, E, W)$, 其中: V 为结点集, 每个结点表示Petri网的一个标识; E 为有向弧集, 连接父结点和子结点; W 为弧上的权值, 表示父结点到子结点所激发的变迁. V 中没有子结点的结点称为叶结点, V^* 表示由所有叶结点组成的集合.

定义 1^[11] 给定一个符号 α , 其符号Petri网 $\mathcal{G}_\alpha = (\mathcal{N}_\alpha, m_0, \hat{\mathcal{T}}_\alpha)$, 其中:

1) $\mathcal{N}_\alpha$ 是Petri网结构; 库所集 $\mathcal{P}_\alpha = \{\tilde{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}\}$; 变迁集 $\mathcal{T}_\alpha = \{t_\alpha, t_{\bar{\alpha}}\}$, 其中 t_α 和 $t_{\bar{\alpha}}$ 为一组互斥变迁, 记作 $\hat{t}_\alpha = t_{\bar{\alpha}}, \hat{t}_{\bar{\alpha}} = t_\alpha$; 有向弧集 $\mathcal{F}_\alpha = \{(\tilde{\alpha}, t_\alpha), (\tilde{\alpha}, t_{\bar{\alpha}}), (t_\alpha, \alpha), (t_{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha})\}$; 弧上权值均为1;

2) m_0 是 $\mathcal{G}_\alpha$ 的初始标识, $m_0(\tilde{\alpha}) = 1, m_0(\alpha) = 0, m_0(\bar{\alpha}) = 0$;

3) $\hat{\mathcal{T}}_\alpha = \{t_\alpha, t_{\bar{\alpha}}\}$ 为确定变迁集.

3 知识Petri网

本文主要考虑两种类型的知识, 即由命题逻辑语句组成的知识库 Π 和命题符号的先验概率知识, 其中 Σ_Π 表示 Π 中所有符号的集合, Σ_Π^Δ 表示具有先验概

率的符号(概率符号)的集合, $\hat{\Sigma}_\Pi^\Delta = \bigcup_{\alpha \in \Sigma_\Pi^\Delta} \{\alpha, \bar{\alpha}\}$ 表示

具有先验概率的文字(概率文字)的集合, P 为 $\hat{\Sigma}_\Pi^\Delta$ 映射到 $[0, 1]$ 区间的先验概率函数.

定义 2 给定一个知识库 Π , α 是具有先验概率 $P(\alpha)$ 的符号, 则它的符号Petri网 $\mathcal{G}_\alpha = (\mathcal{N}_\alpha, m_0, \hat{\mathcal{T}}_\alpha, \mathcal{T}_\alpha^\Delta, \Delta_\alpha, P)$, 其中:

1) $\mathcal{N}_\alpha$ 是网结构. 库所集 $\mathcal{P}_\alpha = \{\tilde{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}, \alpha^\Delta, \bar{\alpha}^\Delta\}$; 变迁集 $\mathcal{T}_\alpha = \{t_\alpha, t_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha^\Delta}, t_{\bar{\alpha}^\Delta}\}$, t_α 和 $t_{\bar{\alpha}}$ 为一组互斥变迁, 记作 $\hat{t}_\alpha = t_{\bar{\alpha}}, \hat{t}_{\bar{\alpha}} = t_\alpha$; 有向弧集 $\mathcal{F}_\alpha = \{(\tilde{\alpha}, t_\alpha), (\tilde{\alpha}, t_{\bar{\alpha}}), (t_\alpha, \alpha), (t_{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha}), (\tilde{\alpha}, t_{\alpha^\Delta}), (\tilde{\alpha}, t_{\bar{\alpha}^\Delta}), (t_{\alpha^\Delta}, \alpha^\Delta), (t_{\bar{\alpha}^\Delta}, \bar{\alpha}^\Delta)\}$; 弧上权值均为1;

2) m_0 是 $\mathcal{G}_\alpha$ 的初始标识, $m_0(\tilde{\alpha}) = 1, m_0(\alpha) = 0, m_0(\bar{\alpha}) = 0, m_0(\alpha^\Delta) = 0, m_0(\bar{\alpha}^\Delta) = 0$;

3) $\hat{\mathcal{T}}_\alpha = \{t_\alpha, t_{\bar{\alpha}}\}$ 为确定变迁集;

4) $\mathcal{T}_\alpha^\Delta = \{t_{\alpha^\Delta}, t_{\bar{\alpha}^\Delta}\}$ 为概率变迁集;

5) $\Delta_\alpha = \{\alpha^\Delta, \bar{\alpha}^\Delta\}$ 为概率库所集;

6) $P: \Delta_\alpha \rightarrow [0, 1]$ 为每个概率库所映射的一个概率值, 即 $P(\alpha^\Delta) = P(\alpha), P(\bar{\alpha}^\Delta) = 1 - P(\alpha)$.

例 1 对于具有先验概率为 x 的符号 α , 其符号Petri网如图1所示. 库所 $\tilde{\alpha}, \alpha$ 和 $\bar{\alpha}$ 分别表示符号 α 的值为不确定、真和假. 概率库所 α^Δ 和 $\bar{\alpha}^\Delta$ 分别表示符号 α 为真和为假的概率为 x 和 $1 - x$. 变迁 t_α 和 $t_{\bar{\alpha}}$ 为一组互斥变迁, 也是确定变迁, $t_{\alpha^\Delta}, t_{\bar{\alpha}^\Delta}$ 为概率变迁.

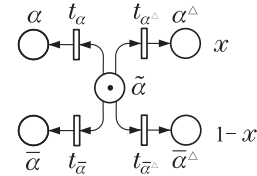


图1 先验概率为 x 的 α 的符号Petri网

Fig. 1 The symbol Petri net of α with prior probability x

定义 3 给定一条析取子句 c , 其语义约束为

$$\sum_{l \in \hat{\Sigma}_c \wedge l \in \hat{\Sigma}_c^\Delta} [m(\bar{l}) + m(\bar{l}^\Delta)] + \sum_{l \in \hat{\Sigma}_c \wedge l \notin \hat{\Sigma}_c^\Delta} m(\bar{l}) \leq |\hat{\Sigma}_c| - 1, \quad (1)$$

其中: $\hat{\Sigma}_c$ 是出现在 c 中的文字集, $\hat{\Sigma}_c^\Delta$ 是出现在 c 中的概率文字集, $|\hat{\Sigma}_c|$ 表示出现在 c 中的文字个数.

定义3给出了析取子句的语义线性约束表示方式, 从而可以根据SBPI设计监控库所, 使得符号Petri网满足逻辑语句的语义约束. 值得注意的是, 监控库所对概率库所也施加了约束作用, 即概率库所标识也需满足命题逻辑知识库的运行规则.

根据定义1-3和SBPI, 给出了描述CNF知识库和先验概率的知识Petri网设计方法, 如算法1所示.

在算法1中, 步骤1-8根据一个符号是否具有先验概率, 设计相应的符号Petri网; 步骤9-12将知识库中

的析取子句转换为语义约束, 根据SBPI设计相应的监控库所, 从而得到知识Petri网。

算法1 知识Petri网设计算法

输入: CNF知识库 Π , 先验概率函数 P ;

输出: 知识Petri网 $\mathcal{G}_\Pi$. 步骤如下:

- 1 由 Π 和 P 得到符号集 Σ_Π 、概率符号集 Σ_Π^Δ 和概率文字集 Σ_Π^Δ ;
- 2 **for all** 符号 $\alpha \in \Sigma_\Pi$ **do**
- 3 **if** $\alpha \notin \Sigma_\Pi^\Delta$ **do**
- 4 根据定义1设计 α 的符号Petri网;
- 5 **else**
- 6 根据定义2设计 α 的符号Petri网;
- 7 **end if**
- 8 **end for**
- 9 **for all** 析取子句 $c \in \Pi$ **do**
- 10 由定义3得到 c 的语义约束, 记作 (η, b) ;
- 11 根据SBPI设计 (η, b) 的监控库所, 命名为 c ;
- 12 **end for**

根据算法1设计的知识Petri网表示为 $\mathcal{G}_\Pi = (\mathcal{N}_\Pi, m_0, \hat{T}_\Pi, \mathcal{T}_\Pi^\Delta, \Delta_\Pi, \mathbf{P})$, 其中: $\mathcal{N}_\Pi$ 为网结构, m_0 是 $\mathcal{G}_\Pi$ 的初始标识, $\hat{T}_\Pi$ 是由确定变迁组成的集合, $\mathcal{T}_\Pi^\Delta$ 是由概率变迁组成的集合, $\mathcal{T}_\Pi = \hat{T}_\Pi \cup \mathcal{T}_\Pi^\Delta$, Δ_Π 为概率库所集, $\mathbf{P}: \Delta_\Pi \rightarrow [0, 1]$ 是概率库所映射到 $[0, 1]$ 区间的函数。

定义4 给定一个知识Petri网 $\mathcal{G}_\Pi$ 和它的标识 m , 任意一个确定变迁 $t \in \hat{T}_\Pi$, 若 t 满足

$$m \geq C^-(\cdot, t) \wedge m \not\geq C^-(\cdot, \hat{t}), \quad (2)$$

即 t 是使能的, 且 t 的互斥变迁 $\hat{t}$ 是不使能的, 则称确定变迁 t 在标识 m 下是推理使能的。

定理1 给定一个知识库 Π 和其知识Petri网 $\mathcal{G}_\Pi$, 如果存在一个标识 m_r 是由 $\mathcal{G}_\Pi$ 的初始标识 m_0 激发推理使能的确定变迁序列到达的, 且在标识 m_r 下无推理使能的确定变迁, 那么

$$\Pi \models \left(\bigwedge_{\alpha \in \Xi_r} \alpha \right) \wedge \left(\bigwedge_{\alpha \in \Xi_r} \bar{\alpha} \right), \quad (3)$$

其中: $\Xi_r = \{\forall \alpha \in \Sigma_\Pi | m_r(\alpha) = 1\}$ 为 m_r 的正符号集, $\Xi_r = \{\forall \alpha \in \Sigma_\Pi | m_r(\bar{\alpha}) = 1\}$ 为 m_r 的负符号集。

证 给定一个知识库 Π 和其知识Petri网 $\mathcal{G}_\Pi$, $\forall t_1, t_2 \in \mathcal{T}_\Pi$, $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 = \emptyset$, 这表明变迁的前置库所无法通过变迁的激发获得托肯, 故如果一个确定变迁 t 在标识 $m \in \mathcal{R}(\mathcal{G}_\Pi)$ 下是不使能的, 那么 t 在 m 可达的任一标识下, 都是不使能的, 而变迁 t 和 $\hat{t}$ 的后置库所分别对应一个符号为真或假的一种状态, 故该符号只能为 $\hat{t}$ 的后置库所对应的状态, 实现确定性推理。

证毕。

例2 给定一个描述实时天气状况的知识库 $\Pi = \{s \vee r \vee c, \bar{r}, \bar{c}\}$, 其中子句 $s \vee r \vee c$ 表示天气为晴天

或者雨天或者阴天, $\bar{r}$ 表示不是雨天, $\bar{c}$ 表示不是阴天。此外还有一条先验概率知识, $P(s) = 0.7$ 表示实时天气为晴天的概率为0.7。

根据算法1, 知识库 Π 的符号集 $\Sigma_\Pi = \{s, r, c\}$, 概率符号集 $\Sigma_\Pi^\Delta = \{s\}$, 概率文字集 $\Sigma_\Pi^\Delta = \{s, \bar{s}\}$, 符号 r 和 c 根据定义1设计符号Petri网, s 根据定义3设计符号Petri网。由定义2可得3条子句的语义约束为

$$m(\bar{s}) + m(\bar{s}^\Delta) + m(\bar{c}) + m(\bar{r}) \leq 2, \quad (4)$$

$$m(r) \leq 0, \quad (5)$$

$$m(c) \leq 0. \quad (6)$$

因此, 根据算法1设计的知识Petri网如图2所示, 其中包括3个符号Petri网和根据式(4)–(6)设计的监控库所 c_1, c_2 和 c_3 , 知识Petri网的概率符号集为 $\Delta_\Pi = \{s^\Delta, \bar{s}^\Delta\}$, $\mathbb{P}(s^\Delta) = 0.7, \mathbb{P}(\bar{s}^\Delta) = 0.3$, 监控库所 c_1 对概率库所 $\bar{s}^\Delta$ 能否标识也起着约束作用。

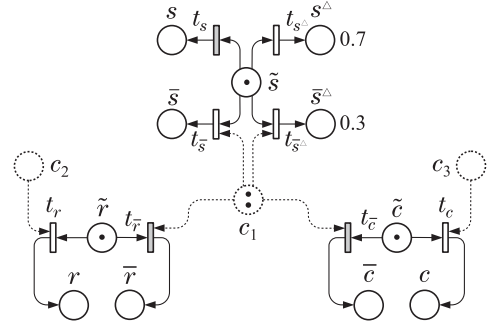


图2 根据算法1设计的例2中的知识Petri网

Fig. 2 The knowledge Petri net in example 2 designed according to algorithm 1

在确定性推理阶段, 变迁 t_r 和 t_c 推理使能, 分别激发后, 库所 $\bar{r}$ 和 $\bar{c}$ 标识; 此时, 监控库所 c_1 中无托肯, 变迁 t_s 满足推理使能, 将其激发, 库所 s 标识。整个知识Petri网中已无推理使能变迁, 确定性推理结束, 推理结果为 $s \wedge \bar{r} \wedge \bar{c}$, 这与知识库 Π 表示的含义是一致的: 实时天气状况要么晴天, 要么雨天, 要么阴天, 当已知不是雨天, 不是阴天, 那么只能是晴天。

由定理1和例2的演示可知, 通过激发推理使能的变迁, 利用知识Petri网的动态演化, 可以从已知(知识库)推理出未知命题成立与否。

4 知识Petri网不确定性推理方法

虽然知识Petri网能够完成确定性推理, 但仍然存在无法由知识库判定的命题, 这促使笔者思考: 如何利用概率知识, 在确定性推理的前提下, 进一步计算某些命题为真的概率。

4.1 概率独立剪枝

在知识Petri网确定性推理结束后, 笔者可以利用知识Petri网的可达图计算未知概率文字成真的概率。如果本文要计算一个概率符号的概率, 则将该符号称

为目标符号. 在此之前, 为了提高推理的计算效率, 利用概率库所之间的网络结构, 本文给出了概率独立剪枝方法, 以有效减小知识Petri网的规模.

定义 5 将结点 x 和与 x 连接的弧从Petri网 $\mathcal{G}$ 中删除, 该操作称为剪枝, 记作 $\text{Pruning}(\mathcal{G}, x)$.

定义 6 给定一个Petri网 $\mathcal{G}$, 如果 x 和 y 是 $\mathcal{G}$ 的结点, 且 x 和 y 至少存在一条路径, 则称 x 和 y 是连通的.

如算法2所示, 利用定义5和定义6, 本文给出了知识Petri网的概率独立剪枝算法.

算法 2 概率独立剪枝算法

输入: 知识Petri网 $\mathcal{G}_\Pi$, 目标符号 γ ;

输出: 目标概率知识Petri网 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$. 步骤如下:

- 1 拷贝知识Petri网 $\mathcal{G}_\Pi$, 将新得到的网称为目标概率知识Petri网 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$;
 - 2 **for all** 符号 $\alpha \in \Sigma_\Pi$ **do**
 - 3 根据定义5对确定变迁 t_α 和 $t_{\bar{\alpha}}$ 进行剪枝;
 - 4 **end for**
 - 5 遍历 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 中的概率变迁, 剪枝当前标识下不使能的概率变迁;
 - 6 遍历 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 中的监控库所, 若存在监控库所 c 满足:
 $|c^\bullet| \leq m(c)$, 则将 c 进行剪枝, 其中: $|c^\bullet|$ 表示输出集的变迁个数, $m(c)$ 为 c 中托肯数;
 - 7 从目标符号 γ 对应的概率库所 γ^Δ 出发, 仅保留 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 中与 γ^Δ 连通的部分, 其余部分进行剪枝.
-

在算法2中, 对知识Petri网剪枝得到目标概率知识Petri网. 在步骤2–4中, 将知识Petri网中确定变迁进行剪枝; 在步骤5中, 对不能使能的概率变迁进行剪枝; 在步骤6中, 对未起着约束作用的监控库所进行剪枝; 在步骤7中, 仅保留与目标符号的概率库所连通的部分, 从而得到目标符号的目标概率知识Petri网.

根据算法2剪枝得到的目标概率知识Petri网可表示为 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma} = (\mathcal{N}_{\Pi, \gamma}, m_0, \Delta_{\Pi, \gamma}, \mathbf{P})$, 其中: $\mathcal{N}_{\Pi, \gamma}$ 为网结构, 变迁集 $\mathcal{T}_{\Pi, \gamma}$ 中的变迁皆为概率变迁; m_0 是 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 的初始标识; $\Delta_{\Pi, \gamma}$ 为概率库所集; $\mathbf{P} : \Delta_{\Pi, \gamma} \rightarrow [0, 1]$ 是概率库所映射到 $[0, 1]$ 区间的函数.

引理 1 在算法2中, 删去的结点与目标符号的条件概率的计算是不相关的.

证 给定一个知识Petri网 $\mathcal{G}_\Pi$, 根据算法2对 $\mathcal{G}_\Pi$ 进行剪枝, 得到目标概率知识Petri网 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$. 在 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 上保留的变迁皆满足使能条件, 概率库所皆可被标识, 且这些概率库所通过监控库所与目标符号的概率库所连通. 又因为 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 上保留的监控库所 c 满足 $|c^\bullet| > m(c)$, 这意味着监控库所不能为所有概率库所标识提供托肯, 故目标符号的概率库所能否标识只与 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 上其他概率库所的标识状态相关, 与在算法2中删去的结点无关. 证毕.

4.2 概率求解

目标概率知识Petri网描述了目标符号与其他不确定符号之间的依赖关系, 可以通过它的可达图来求解目标符号的概率, 实现不确定性推理.

定义 7 如果 v 是目标概率知识Petri网的可达图中一个叶结点, 那么它的概率为

$$P(v) = \prod_{p \in \mathcal{P}_\Delta} P(p), \quad (7)$$

其中: $\mathcal{P}_\Delta = \{p \in \Delta_{\Pi, \gamma} | m_v(p) = 1\}$, m_v 是叶结点 v 对应的标识.

定义 8 给定一个目标概率知识Petri网 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$, 它的概率为

$$P(\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}) = \sum_{v \in V^*} P(v), \quad (8)$$

其中 V^* 是 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 可达图的叶结点集.

根据定义7–8, 给出目标符号概率的求解算法, 如算法3所示.

算法 3 概率求解算法

输入: 目标概率知识Petri网 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$, 目标符号 γ ;

输出: 目标符号 γ 的概率. 步骤如下:

- 1 根据可达图算法得到 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 的可达图, 其叶结点集为 V^* ;
- 2 **for all** 叶结点 $v \in V^*$ **do**
- 3 根据定义7计算叶结点 v 的概率;
- 4 **end for**
- 5 根据定义8计算 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 的概率 $P(\mathcal{G}_{\Pi, \gamma})$;
- 6 计算目标符号 γ 对应的概率库所 γ^Δ 标识的叶结点的概率之和:

$$P(\gamma^\Delta, \mathcal{G}_{\Pi, \gamma}) = \sum_{v \in \{v \in V^* | m_v(\gamma^\Delta) = 1\}} P(v), \quad (9)$$

其中 m_v 是叶结点 v 对应的标识;

- 7 计算目标符号的概率

$$P(\gamma^\Delta | \mathcal{G}_{\Pi, \gamma}) = \frac{P(\gamma^\Delta, \mathcal{G}_{\Pi, \gamma})}{P(\mathcal{G}_{\Pi, \gamma})}. \quad (10)$$

在算法3中, 步骤1用于计算目标概率知识Petri网的可达图; 步骤2–4负责计算可达图中叶结点的概率; 在步骤5中, 得到目标概率知识Petri网的概率; 在步骤6–7中, 计算目标符号的概率库所标识的叶结点的概率之和, 并计算其与目标概率知识Petri网的概率之比, 得到目标符号的条件概率.

定理 2 利用算法3求解的目标符号的概率与它在当前知识库下的条件概率是一致的.

证 给定一个目标概率知识Petri网 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$, 其目标符号为 γ , 根据引理1可知, $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 的网络结构将与 γ 相依赖的其他不确定符号的概率库所连接起来, 因而 $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 的可达图中每个叶结点对应 γ 和其他不确定符号在当前知识库下满足的状态, 叶结点的概率与对应状态计算联合概率是一致的. $\mathcal{G}_{\Pi, \gamma}$ 的概率为目标符号在当前知识库下为真或为假的所有状态的概率之和, 将

满足目标符号为真的叶结点概率之和比上 $\mathcal{G}_{\Pi,\gamma}$ 的概率,这与条件概率的求解是一致的.证毕.

定理2说明算法2和算法3可用于计算目标符号的条件概率,实现知识Petri网的不确定性推理.

在统一的模型(知识Petri网)框架下,先执行推理使能的确定变迁,推理知识库蕴含的文字;后利用概率变迁生成可达图,就可以计算目标符号的条件概率,实现确定性和不确定性的联合推理.此外,确定性推理缩小了目标符号的联合分布空间,从而提高不确定性推理的计算效率.接下来本文通过一个案例来演示该推理方法.

5 实验验证

Wumpus世界是人工智能中的一个经典案例^[1].为了使得示例聚焦本文重点,而又不失一般性,本文对Wumpus世界进行了精简,如图3所示,环境有9个房间,而Agent在环境中探索,利用传感器感知臭气,避开怪兽,寻找黄金.Wumpus世界的知识规则有

- 1) 怪兽相邻的房间有臭气;
- 2) 房间包含怪兽的概率为0.2.



图3 Wumpus世界

Fig. 3 The wumpus world

用符号 w_i 表示 i 号房间有怪兽, s_i 表示 i 号房间有臭气, A_i 表示 i 号房间的相邻房间的集合,如 $A_1 = \{2, 4\}$ 表示房间1的相邻房间是房间2和房间4.因此,该Wumpus世界的知识规则形式化描述为

$$\bigwedge_{i=1}^9 (s_i \Leftrightarrow \bigvee_{j \in A_i} w_j), \quad (11)$$

$$P(w_i) = 0.2, i = 1, 2, \dots, 9, \quad (12)$$

式(11)的含义为:当且仅当某个房间相邻的房间中有怪兽时,该房间有臭气.式(12)表示先验概率知识:房间包含怪兽的概率为0.2.

根据逻辑等价规则,可将命题逻辑转换成合取范式形式,如 $s_1 \Leftrightarrow (w_2 \vee w_4) \equiv (s_1 \Rightarrow (w_2 \vee w_4)) \wedge ((w_2 \vee w_4) \Rightarrow s_1) \equiv (\bar{s}_1 \vee (w_2 \vee w_4)) \wedge ((\bar{w}_2 \wedge \bar{w}_4) \vee s_1) \equiv (\bar{s}_1 \vee w_2 \vee w_4) \wedge (\bar{w}_2 \vee s_1) \wedge (\bar{w}_4 \vee s_1)$.因此,

式(11)可表示成33条析取子句合取形式

$$r_1 \wedge r_2 \wedge \dots \wedge r_{33}, \quad (13)$$

其中析取子句的语义约束如表1所示.

为了验证和说明所提出的方法,本文模拟了Agent在Wumpus世界的探索过程,利用知识Petri网的确定性和不确定性联合推理来获取环境信息.

已知房间1无怪兽,对应命题语句 $\hat{p}_0 = \bar{w}_1$.初始时Agent在房间1,感知信息为 $\hat{p}_1 = \bar{s}_1$,知识库为

$$(13) \wedge \hat{p}_0 \wedge \hat{p}_1. \quad (14)$$

根据算法1,由知识库(14)和先验概率知识(12)设计得到知识Petri网,如图4所示.根据确定性推理可知:确定变迁 $t_{\bar{w}_1}$, $t_{\bar{s}_1}$, $t_{\bar{w}_2}$ 和 $t_{\bar{w}_4}$ 推理使能,分别激发,根据到达的标识和定理1可知房间2和房间4无怪兽.之后Agent分别进入房间2和房间4,均感知到臭气,感知信息为 $\hat{p}_2 = s_2$ 和 $\hat{p}_3 = s_4$.此时,知识库为

$$(14) \wedge \hat{p}_2 \wedge \hat{p}_3. \quad (15)$$

根据算法1,由知识库(15)和先验概率知识(12)设计得到知识Petri网,如图4所示.根据确定性推理可知:确定变迁 t_{s_2} 和 t_{s_4} 推理使能,分别激发.此时,不存在推理使能变迁,确定性推理结束.Agent未探索的房间中无确定安全的房间,相邻的房间3,房间5和房间7皆可能存在怪兽.

利用确定性推理结束后的知识Petri网 $\mathcal{G}_{\Pi}$,将符号 w_3 , w_5 和 w_7 分别作为目标符号,计算它们的概率.

以 w_3 作为目标符号为例,根据算法2对 $\mathcal{G}_{\Pi}$ 进行剪枝,得到的目标概率知识Petri网 $\mathcal{G}_{\Pi,\gamma}$ 如图5所示,其中: w_j^Δ , $\bar{w}_j^\Delta$ 为概率库所, $P(w_j^\Delta) = 0.2$, $P(\bar{w}_j^\Delta) = 0.8$, $j = 3, 5, 7$.

按照算法3,利用 $\mathcal{G}_{\Pi,\gamma}$ 求解目标符号 w_3 的概率.首先,得到 $\mathcal{G}_{\Pi,\gamma}$ 的可达图,其中叶结点有5个,记作 $V^* = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.根据定义7,计算叶结点的概率.如 v_1 ,其标识为010 010 001 01,概率为

$$P(v_1) = P(w_3^\Delta) \times P(w_5^\Delta) \times P(\bar{w}_7^\Delta) = 0.2 \times 0.2 \times 0.8 = 0.032. \quad (16)$$

同理,计算 $v_2 \sim v_5$ 的概率,如表2所示.然后,计算 $\mathcal{G}_{\Pi,\gamma}$ 的概率

$$P(\mathcal{G}_{\Pi,\gamma}) = \sum_{v \in V^*} P(v) = 0.232. \quad (17)$$

在叶结点集 V^* 中找到满足 $m_v(w_3^\Delta) = 1$ 的叶结点,分别为 v_1 , v_2 和 v_3 ,由式(8)可得

$$P(w_3^\Delta, \mathcal{G}_{\Pi,\gamma}) = P(v_1) + P(v_2) + P(v_3) = 0.072. \quad (18)$$

最后,得到房间3有怪兽的概率为

$$P(w_3^\Delta | \mathcal{G}_{\Pi,\gamma}) = \frac{P(w_3^\Delta, \mathcal{G}_{\Pi,\gamma})}{P(\mathcal{G}_{\Pi,\gamma})} \approx 0.31. \quad (19)$$

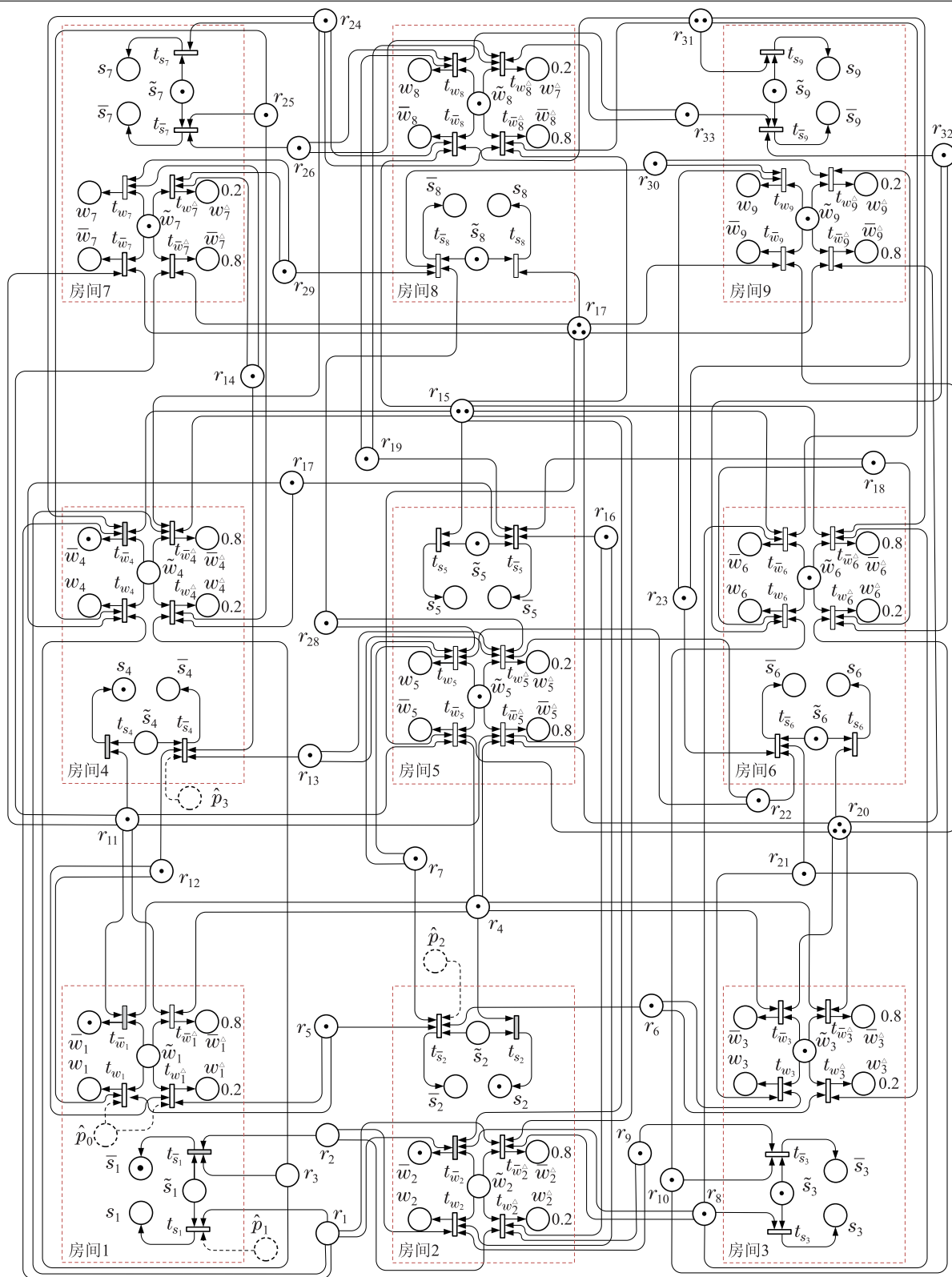


图4 Wumpus世界的知识Petri网

Fig. 4 The knowledge Petri net of the Wumpus world

同理, 分别将 w_5 和 w_7 作为目标符号, 对知识Petri网 $\mathcal{G}_H$ 进行概率独立剪枝, 得到的目标概率知识Petri网与图5一样. 在 $\mathcal{G}_{H,\gamma}$ 的可达图中, 满足 $w_5^{\wedge}$ 标识的叶结点有 v_1, v_2, v_4 和 v_5 , 满足 $w_7^{\wedge}$ 标识的叶结点有 v_2, v_3 和 v_4 , 故可计算得到: 在当前知识库下, 房间5有怪兽

的概率约为86%, 房间7有怪兽的概率约为31%.

通过不确定性推理, 房间3, 房间5和房间7有怪兽的概率分别为31%, 86%和31%, 故Agent探索Room3或房间7风险较低, 应优先选择.

综上, Agent在知识Petri网两种推理引导下, 优先

在确定安全的房间中探索;若无确定安全的房间,则进行不确定性推理,计算待探索房间出现怪兽的概率,然后选择概率最低的房间进行探索,帮助Agent实现理性思考和执行.此外,在该案例中可以看到,在不确定性推理阶段需要考虑的随机变量为 w_3, w_5 和 w_7 ,通过概率独立剪枝算法可以获得它们的目标概率知识Petri网,极大地删除了无关结点,指数级地降低了不确定性推理的计算复杂度.3个随机变量的组合方式有 $2^3 = 8$ 种,需要对这8种情况分别验证是否符合当前知识库,而当知识库庞大,考虑的随机变量个数增多时,其计算复杂度随着随机变量的个数呈指数型

增长.而利用目标概率知识Petri网的可达图,可直接得到符合当前知识库的叶结点,无需组合所有情况来验证,可见确定性推理确实可以缩小随机变量的联合分布空间,从而提高不确定性推理的计算效率.

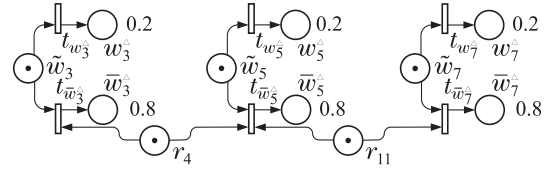


图5 目标概率知识Petri网

Fig. 5 The target probability knowledge Petri net

表1 Wumpus世界的子句及其语义约束

Table 1 The clauses and their semantic constraints in the Wumpus world

子句	语义约束	子句	语义约束
r_1	$s_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_2^\Delta + \bar{w}_4 + \bar{w}_4^\Delta \leq 2$	r_{20}	$s_6 + \bar{w}_3 + \bar{w}_3^\Delta + \bar{w}_5 + \bar{w}_5^\Delta + \bar{w}_9 + \bar{w}_9^\Delta \leq 3$
r_2	$\bar{s}_1 + w_2 + w_2^\Delta \leq 1$	r_{21}	$\bar{s}_6 + w_3 + w_3^\Delta \leq 1$
r_3	$\bar{s}_1 + w_4 + w_4^\Delta \leq 1$	r_{22}	$\bar{s}_6 + w_5 + w_5^\Delta \leq 1$
r_4	$s_2 + \bar{w}_1 + \bar{w}_1^\Delta + \bar{w}_3 + \bar{w}_3^\Delta + \bar{w}_5 + \bar{w}_5^\Delta \leq 3$	r_{23}	$\bar{s}_6 + w_9 + w_9^\Delta \leq 1$
r_5	$\bar{s}_2 + w_1 + w_1^\Delta \leq 1$	r_{24}	$s_7 + \bar{w}_4 + \bar{w}_4^\Delta + \bar{w}_8 + \bar{w}_8^\Delta \leq 2$
r_6	$\bar{s}_2 + w_3 + w_3^\Delta \leq 1$	r_{25}	$\bar{s}_7 + w_4 + w_4^\Delta \leq 1$
r_7	$\bar{s}_2 + w_5 + w_5^\Delta \leq 1$	r_{26}	$\bar{s}_7 + w_8 + w_8^\Delta \leq 1$
r_8	$s_3 + \bar{w}_2 + \bar{w}_2^\Delta + \bar{w}_6 + \bar{w}_6^\Delta \leq 2$	r_{27}	$s_8 + \bar{w}_5 + \bar{w}_5^\Delta + \bar{w}_7 + \bar{w}_7^\Delta + \bar{w}_9 + \bar{w}_9^\Delta \leq 3$
r_9	$\bar{s}_3 + w_2 + w_2^\Delta \leq 1$	r_{28}	$\bar{s}_8 + w_5 + w_5^\Delta \leq 1$
r_{10}	$\bar{s}_3 + w_6 + w_6^\Delta \leq 1$	r_{29}	$\bar{s}_8 + w_7 + w_7^\Delta \leq 1$
r_{11}	$s_4 + \bar{w}_1 + \bar{w}_1^\Delta + \bar{w}_5 + \bar{w}_5^\Delta + \bar{w}_7 + \bar{w}_7^\Delta \leq 3$	r_{30}	$\bar{s}_8 + w_9 + w_9^\Delta \leq 1$
r_{12}	$\bar{s}_4 + w_1 + w_1^\Delta \leq 1$	r_{31}	$s_9 + \bar{w}_6 + \bar{w}_6^\Delta + \bar{w}_8 + \bar{w}_8^\Delta \leq 2$
r_{13}	$\bar{s}_4 + w_5 + w_5^\Delta \leq 1$	r_{32}	$\bar{s}_9 + w_6 + w_6^\Delta \leq 1$
r_{14}	$\bar{s}_4 + w_7 + w_7^\Delta \leq 1$	r_{33}	$\bar{s}_9 + w_8 + w_8^\Delta \leq 1$
r_{15}	$s_5 + \bar{w}_2 + \bar{w}_2^\Delta + \bar{w}_4 + \bar{w}_4^\Delta + \bar{w}_6 + \bar{w}_6^\Delta + \bar{w}_8 + \bar{w}_8^\Delta \leq 4$	$\hat{p}_0$	$w_1 + w_1^\Delta \leq 0$
r_{16}	$\bar{s}_5 + w_2 + w_2^\Delta \leq 1$	$\hat{p}_1$	$s_1 \leq 0$
r_{17}	$\bar{s}_5 + w_4 + w_4^\Delta \leq 1$	$\hat{p}_2$	$\bar{s}_2 \leq 0$
r_{18}	$\bar{s}_5 + w_6 + w_6^\Delta \leq 1$	$\hat{p}_3$	$\bar{s}_4 \leq 0$
r_{19}	$\bar{s}_5 + w_8 + w_8^\Delta \leq 1$		

表2 目标概率知识Petri网可达图的叶结点

Table 2 The leaf nodes of the reachable graph of the target probability knowledge Petri net

叶结点	标识	概率
	$\bar{w}_3 w_3^\Delta \bar{w}_5 \bar{w}_5^\Delta \bar{w}_7 w_7^\Delta \bar{w}_7^\Delta r_{4r_{11}}$	
v_1	010 010 001 10	0.032
v_2	010 010 010 11	0.008
v_3	010 000 010 00	0.032
v_4	001 010 010 01	0.032
v_5	001 010 001 00	0.128

6 结论

本文提出了一种新型知识Petri网,能够同时描述确定的命题逻辑知识和不确定的概率知识,并设计了确定性与不确定性联合推理方法,实现将确定性推理与不确定性推理在统一的模型上进行.此外,确定性

推理结果是可靠的,保留的网络结构能够缩小随机变量的联合分布空间,提高不确定性推理的计算效率.在不确定性推理中,设计了概率独立剪枝算法,指数级地降低不确定性推理的计算复杂度,并利用目标概率知识Petri网的可达图求解目标符号在当前知识库下为真的条件概率,实现确定性推理与不确定性推理的有机结合.

未来笔者将考虑如何将条件概率知识描述到知识Petri网中,探索更具普遍性的确定性和不确定性联合推理方法.

参考文献:

- [1] RUSSELL S, NORVIG P. Artificial intelligence: A modern approach. Prentice Hall Press. *Applied Mechanics & Materials*, 2009.
- [2] MOODY J, ANTSAKLIS P. Petri net supervisors for DES with uncontrollable and unobservable transitions. *IEEE Transactions on Au-*

- tomatic Control*, 2000, 45(3): 462 – 476.
- [3] GIUA A, SILVA M. Petri nets and automatic control: A historical perspective. *Annual Reviews in Control*, 2018, 45: 223 – 239.
- [4] LUO J, WU W, ZHOU M, et al. Structural controller for logical expression of linear constraints on Petri nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(1): 397 – 403.
- [5] LAUTENBACH K. *On logical and linear dependencies*. Sankt Augustin, Germany: Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 1985.
- [6] MURATA T, ZHANG D. A high-level Petri net model for parallel interpretation of logic programs. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 1988, 14(4): 481 – 493.
- [7] JEFFREY J, LOBO J, MURATA T. A high-level Petri net for goal-directed semantics of Horn clause logic. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 1996, 8(2): 241 – 259.
- [8] NALON C, LOPES B, DOWEK G, et al. A calculus for automatic verification of petri nets based on resolution and dynamic logics. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2015, 312: 125 – 141.
- [9] LOPES B, NALON C, HAEUSLER E. Reasoning about Petri nets: A calculus based on resolution and dynamic logic. *ACM Transactions on Computational Logic*, 2021, 22(2): 1 – 22.
- [10] LUO H, LUO J, LIN W. Reasoning via Petri nets. *Eighth International Conference on Intelligent Control and Information Processing*, Hangzhou, China: IEEE, 2017: 162 – 167.
- [11] LUO J, TAN K, LUO H, et al. Inference approach based on Petri nets. *Information Sciences*, 2021, 547: 1008 – 1024.
- [12] BUNTINE W. Theory refinement on Bayesian networks. *Uncertainty proceedings 1991, Morgan Kaufmann*, 1991: 52 – 60.
- [13] QIAO Junfei, ZHOU Hongbiao. Prediction of effluent total phosphorus based on self-organizing fuzzy neural network. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(2): 224 – 232.
(乔俊飞, 周红标. 基于自组织模糊神经网络的出水总磷预测. 控制理论与应用, 2017, 34(2): 224 – 232.)
- [14] ZHOU Z, ZHANG Q. Model event/fault trees with dynamic uncertain causality graph for better probabilistic safety assessment. *IEEE Transactions on Reliability*, 2017, 66(1): 178 – 188.
- [15] HUANG Zhenjin, LU Yang, YANG Juan, et al. Bisimulation equivalence relation and logic preservation for continue time Markov decision process. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(8): 1031 – 1038.
(黄镇谨, 陆阳, 杨娟, 等. 连续时间Markov决策过程互模拟等价及逻辑保持. 控制理论与应用, 2016, 33(8): 1031 – 1038.)
- [16] LOONEY C. Fuzzy Petri nets for rule-based decisionmaking. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1988, 18(1): 178 – 183.
- [17] WANG K, LI X. Fault diagnosis method for avionics system based on conditional fuzzy Petri nets. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 2020, 22(3): 85 – 92.
- [18] XU B, YIN X, et al. Fault diagnosis of power systems based on temporal constrained fuzzy Petri nets. *IEEE Access*, 2019, 7: 101895 – 101904.
- [19] YUAN C, LIAO Y, KONG L, et al. Fault diagnosis method of distribution network based on time sequence hierarchical fuzzy Petri nets. *Electric Power Systems Research*, 2021, 191: 106870.
- [20] LIU H, YOU J, TIAN G. Determining truth degrees of input places in fuzzy Petri nets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2016, 47(12): 3425 – 3431.
- [21] LIU H, YOU J, YOU X, Q. et al. Linguistic reasoning Petri nets for knowledge representation and reasoning. *IEEE Transactions on Systems Man, and Cybernetics: Systems*, 2016, 46(4): 499 – 511.
- [22] LIU H, LUAN X, LI Z, et al. Linguistic Petri nets based on cloud model theory for knowledge representation and reasoning. *IEEE Transactions on Knowledge & Data Engineering*, 2018, 30(4): 717 – 728.
- [23] ZHANG C, TIAN G, FATHOLLAHI-FARD A, et al. Interval-valued intuitionistic uncertain linguistic cloud Petri net and its application to risk assessment for subway fire accident. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2022, 19(1): 163 – 177.
- [24] ZHOU R, FENG J, CHEN Y, et al. Representation and reasoning of fuzzy knowledge under variable fuzzy criterion using extended fuzzy Petri nets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 28(12): 3376 – 3390.
- [25] LAUTENBACH K, PINL A. A Petri net representation of bayesian message flows: Importance of bayesian networks for biological applications. *Natural Computing*, 2011, 10(2): 683 – 709.
- [26] LEFEBVRE D, LECLERCQ E. Stochastic Petri net identification for the fault detection and isolation of discrete event systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2011, 41(2): 213 – 225.
- [27] CABASINO M, HADJICOSTIS C, SEATZU C. Probabilistic marking estimation in labeled Petri nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(2): 528 – 533.

作者简介:

谭开成 硕士研究生, 目前研究方向为离散事件系统和Petri网理论与应用, E-mail: kaict@qq.com;

罗继亮 教授, 博士, 目前研究方向为离散事件系统和Petri网理论与应用, E-mail: jlluo@hqu.edu.cn;

林鑫杰 硕士研究生, 目前研究方向为离散事件系统和Petri网理论与应用, E-mail: 1148268947@qq.com;

章宏彬 硕士研究生, 目前研究方向为离散事件系统和Petri网理论与应用, E-mail: hopingzhang@foxmail.com.