具有未知函数非线性系统的全局渐近稳定控制

贾付金[1,2†], 张天良[2]

(1. 安徽大学 电气工程与自动化学院, 安徽 合肥 230039; 2. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 本文讨论了一类具有未知函数和未知控制方向非线性系统的全局渐近稳定问题. 通过提出一个引理处理未知函数问题, 从而得到了一种基于反步法和Nussbaum增益技术的全局渐近稳定控制算法. 与逼近方法处理未知函数的算法相比, 本文提出的算法解决了非线性系统的全局渐近稳定问题; 与现存解决非线性系统的全局渐近稳定控制算法相比, 本文避免了使用未知函数的假设条件, 因此降低了保守性. 值得一提的是本文的算法也解决了反步法的"微分爆炸"问题, 因此所提出的控制方案不仅仅得到了全局渐近稳定控制方案, 而且降低了计算的复杂性. 最后, 将该方案应用到刚性单链杆机械手系统中, 仿真结果验证了其有效性.

关键词: 非线性系统; 渐近稳定; 反步法; 状态反馈

引用格式: 贾付金, 张天良. 具有未知函数非线性系统的全局渐近稳定控制. 控制理论与应用, 2023, 40(2): 196 – 203

DOI: 10.7641/CTA.2022.11244

Global asymptotic stability control for nonlinear systems with unknown functions

JIA Fu-jin[1,2†], ZHANG Tian-liang[2]

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Anhui University, Hefei Anhui 230039, China;
2. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China)

Abstract: In this paper, the global asymptotic stability of a class of nonlinear systems with unknown functions and unknown control directions is discussed. A lemma is proposed to deal with the unknown functions problem, and a global asymptotic stability control algorithm based on the backstepping and Nussbaum gain technology is obtained. Compared with the algorithms dealing with unknown functions by approximation method, the algorithm proposed in this paper solves the problem of global asymptotic stability of nonlinear systems. Compared with the existing global asymptotic stability control algorithms for nonlinear systems, this paper avoids the assumptions of unknown functions, so the method in this paper reduces the conservatism. It is worth mentioning that the algorithm in this paper also solves the "explosion of terms" problem of backstepping. Therefore, the algorithm in this paper not only obtains the global asymptotic stability control scheme, but also has simple calculation. Finally, the algorithm is applied to the rigid single link manipulator system, and the simulation results verify the effectiveness of the control scheme.

Key words: nonlinear systems; asymptotic stability; backstepping; state feedback

Citation: JIA Fujin, ZHANG Tianliang. Global asymptotic stability control for nonlinear systems with unknown functions. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(2): 196 – 203

1 引言

非线性系统控制理论在过去的几十年中经历了一个快速发展的阶段[1–2]. 为了保证系统的全局稳定性, 大多数研究成果对系统具有条件约束, 如不确定参数的线性化[3]、匹配条件和增长条件等[4]. 作为克服这些困难的突破口, 反步法已广泛应用于一些非线性系统的设计中[5–8].

上述解决非线性系统稳定性的控制方法都是基于已知的系统控制方向. 系统的控制方向是控制输入系数的符号[9], 其正负决定了控制信号增益的方向. 因此, 系统未知的控制输入方向给控制器设计带来了挑战. 解决这一问题的一般方法是Nussbaum增益技术[10], 并且可用于解决控制输入方向未知的非线性系统的全局控制问题[11–13].

收稿日期: 2021–12–18; 录用日期: 2022–07–15.

†通信作者. E-mail: fujinjia1234@163.com.

本文责任编委: 龙离军.

江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX21_0305)资助.

Supported by the Postgraduate Research & Practice Innovation Program of Jiangsu Province (KYCX21_0305).

另一方面, 非线性系统模型与实际系统之间存在偏差, 因此研究不确定非线性系系统的控制问题是至关重要的. 这些不确定包括参数不确定[14]、未建模动态[15]、未知函数等[16]. 目前, 关于具有未知函数和未知控制方向的非线性系统的控制已有很多报道[17–19]. 根据神经网络逼近方法的一般性质, 紧集上的任何光滑函数都可以用神经网络逼近[20]. 基于神经网络逼近方法的这一性质, 将具有未知函数和未知控制方向的非线性系统的镇定问题转化为具有不确定参数的控制问题, 然后采用自适应控制方法和Nussbaum增益技术解决非线性系统的镇定问题[21–23]. 从大量的研究成果可以看出, 该方法成功地解决了这类问题. 然而, 当神经网络用于逼近未知函数时, 也会引入逼近误差. 这导致了半全局一致最终有界控制方法的结果[24]. 众所周知, 这是一种半全局控制方法, 而且系统状态也仅仅只能收敛到原点的一个小区域内. 因此, 基于神经网络逼近方法很难解决具有未知函数和未知控制方向的非线性系统的全局渐近稳定控制问题. 值得一提的是, 与神经网络近似方法类似, 模糊逻辑系统方法也难以使具有未知函数的非线性系统得到全局渐近稳定控制的结果[25–26]. 因此, 如何解决具有未知函数和未知控制方向的非线性系统的全局渐近稳定控制问题具有十分重要的意义.

实际上近年来, 带有未知函数非线性系统的全局渐近稳定控制问题已经有一些报道. 在很多文献中研究了状态反馈和输出反馈方法, 基于对未知函数的假设条件, 设计出的控制器能够保证带有未知函数非线性系统是全局渐近稳定[27–32]. 从这类文献中, 可以看出这类控制方法也很好的解决了各类非线性系统的全局渐近稳定控制问题, 并且促进了非线性系统控制理论的发展. 然而, 这些假设条件增加了受控系统和控制算法的保守性, 并且因为它们依赖于对受控系统未知函数的确切了解, 所以这些方法的应用相当有限. 当前自适应控制技术的其他问题, 如难以推导的非线性控制律、随着未知参数数量的几何增加而增加的复杂性以及实时应用的普遍困难, 迫使研究人员针对带有未知函数非线性系统的全局渐近稳定控制问题寻找更适用的方法.

不同于逼近控制算法和对未知函数的假设条件算法, 本文结合Nussbaum增益技术和提出的引理, 基于反步法对具有未知函数和未知控制方向非线性系统提出了一种全局渐近稳定的控制算法. 本文的主要贡献总结如下:

1) 目前, 处理非线性系统中的未知函数问题的主要方法是模糊逼近法和神经网络逼近法[21–26], 这种方法首先将未知函数问题转化为未知参数问题, 然后采用自适应控制方法来设计控制器. 本文提出的算法没有采用自适应控制方法, 不需要设计自适应律. 因此, 本文算法设计方案推导简单, 并且易于实现;

2) 由于模糊逼近法和神经网络逼近法处理未知函数, 仅仅只能使得受控系统得到半全局一致最终有界的结果[21–26]. 然而, 本文提出的算法解决了带有未知函数非线性系统的全局渐近稳定问题, 这显示了本文算法的优越性;

3) 当前解决未知函数非线性系统的全局渐近稳定问题已经有了很多文献[27–32], 然而在这些文献中都是基于未知函数的假设条件, 这样就增大了控制算法的保守性. 本文避免了利用未知函数的假设条件. 因此, 本文的算法降低了保守性;

4) 同时, 本文设计的控制器和虚拟控制器不存在虚拟控制器的偏导数问题, 因此避免了由于要对虚拟控制器求导而引起的计算量增加的问题, 即避免了反步法的"微分爆炸"问题.

本文剩余的结构安排如下: 第2节描述了研究的问题; 第3节设计了控制器; 第4节是稳定性分析的内容; 第5节是仿真部分; 第6节是结论部分.

2　问题描述

考虑下面n阶非线性不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + f_i(x_1, \cdots, x_n), \\ \dot{x}_n = g_n(\bar{x}_n)u + f_n(x_1, \cdots, x_n), \\ y = x_1,\ i = 1, \cdots, n-1, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x = [x_1\ \cdots\ x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$是系统状态, $u \in \mathbb{R}$和$y \in \mathbb{R}$分别是系统输入和系统输出, 并且$f_i(x_1, \cdots, x_n)(i = 1, \cdots, n)$和$g_i(\bar{x}_i) \neq 0$是未知光滑函数. 与此同时, 函数$f_i(x_1, \cdots, x_n)$满足$f_i(0, \cdots, 0) = 0$.

假设 1　对于$i = 1, \cdots, n$, 系统中函数$g_i(\bar{x}_i)$满足$\underline{g}_i \leqslant g_i(\bar{x}_i) \leqslant \bar{g}_i$, 其中$\underline{g}_i$和$\bar{g}_i$分别是$g_i(\bar{x}_i)$的下界和上界. $g_i(\bar{x}_i)$的符号称为控制输入方向并且是未知的. 也就是说, $g_i(\bar{x}_i)$有未知的正的或者负的符号.

控制目标: 设计控制器u, 使得具有未知函数和未知控制方向非线性系统(1)的所有状态x_i以及闭环系统的所有信号是全局渐近稳定, 也即满足

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0. \tag{2}$$

为了处理系统中的未知控制方向问题,下面的引理被引入.

引理 1　如果一个函数$N(\zeta)$具有下面性质, 那么函数$N(\zeta)$为光滑Nussbaum-type型函数[21–23]

$$\begin{cases} \lim\limits_{s\to\infty} \sup \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^s N(\zeta)\mathrm{d}\zeta = +\infty, \\ \lim\limits_{s\to\infty} \inf \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^s N(\zeta)\mathrm{d}\zeta = -\infty, \end{cases} \tag{3}$$

其中, 在本文中光滑Nussbaum-type型函数$N(\zeta) = \zeta^2\cos(\zeta)$.

引理 2　在区域$[0, t_f)$上, 让Lyapunov函数

$V(t) \geqslant 0$和函数$\zeta_i(t)$ $(i=1,\cdots,p)$为光滑函数, 并且函数$N(\zeta_i(t))$是光滑Nussbaum-type型函数. 如果下面的等式成立[21–23]:

$$V(t) \leqslant V(0) + \sum_{i=1}^{p}\int_0^t [g_i(\cdot)N(\zeta_i(t))+1]\dot{\zeta}_i(\tau)\mathrm{d}\tau,\\ \forall \in [0,t_f), \tag{4}$$

其中: $g_i(\cdot) > 0$是一个光滑函数, p是有界整数. 那么, $V(t), \zeta_i(t)$和$\int_0^t N(\zeta_i)\dot{\zeta}_i\mathrm{d}\tau$一定是有界的.

本文是基于反步法设计的控制算法, 为了解决具有未知函数的非线性系统(1)的全局渐近稳定问题, 并且避免对系统中未知函数的假设条件和逼近方法的弊端, 引入和提出了以下引理.

引理 3 让$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$作为一个$C^1$函数, 如果满足$f(0,0)=0$, 那么, 存在光滑函数$F_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$和$F_2:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, 并且满足$F_1(0)=0$和$F_2(0)=0$, 使得[33]

$$|f(x,y)| \leqslant F_1(x)+F_2(y),\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^m.$$

注 1 让$m=1$, $x=[x_1\ \cdots\ x_n]^{\mathrm{T}}$, 根据引理3, 可知存在一个光滑函数$F_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 并且满足$F_i(0)=0$. 与此同时, 上述公式被写为

$$|f(x_1,\cdots,x_n)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i),\ \forall x_i\in\mathbb{R},$$

其中暗含了$x_1=y$.

为了更好的解决本文的控制问题, 结合注1, 下面的引理被提出.

引理 4 让$f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\in\mathbb{R}$作为一个$C^1$函数, 并且对于$\sigma_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,\cdots,n)$, 满足$f(0,\cdots,0)=0$. 那么, 存在一个光滑函数$\hbar_i(\sigma_i)\geqslant 0$使得

$$f^2(\sigma_1,\cdots,\sigma_n) \leqslant n\sum_{i=1}^{n}\hbar_i^2(\sigma_i)\sigma_i^2. \tag{5}$$

证 根据引理3和注1可知, 存在一个满足$g_i(0)=0$的光滑函数$g_i(\sigma_i)\geqslant 0$ $(i=1,\cdots,n)$使得

$$|f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} g_i(\sigma_i).$$

由于$g_i(0)=0$, 并且$f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$是一个光滑函数. 因此, 根据Maclaurin's series可知

$$g_i(\sigma_i) = g_i(0)+g_i{}'(0)\sigma_i+\cdots+g_i^n(0)\sigma_i^n+\\ g_i^{n+1}(\theta\sigma_i)\sigma_i^{n+1} = \vartheta_i(\sigma_i)\sigma_i,$$

其中, $\vartheta_i(\sigma_i)=[g_i{}'(0)+g_i{}''(0)\sigma_i+\cdots+g_i^n(0)\sigma_i^{n-1}+g_i^{n+1}(\theta\sigma_i)\sigma_i^n]\sigma_i$, 并且$0<\theta<1$. 那么, 存在一个光滑函数$\hbar_i(\sigma_i)\geqslant\vartheta_i(\sigma_i)\geqslant 0$使得$g_i(\sigma_i)\leqslant\hbar_i(\sigma_i)|\sigma_i|$. 那么

$$|f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\hbar_i(\sigma_i)||\sigma_i|.$$

因此, $f^2(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\leqslant n\sum_{i=1}^{n}\hbar_i^2(\sigma_i)\sigma_i^2$. 证毕.

注 2 本文研究具有未知函数的非线性系统的全局渐近稳定问题. 为了避免未知函数的假设条件, 提出了引理4来解决未知函数的问题. 尽管引理4的证明与参考文献[33]中的引理证明相似, 但它们之间也存在着一些差异. 并且引理4适合解决阶非线性系统(1)的控制问题. 同时, 本文首次基于引理4和反步法来解决非线性系统(1)的全局渐近稳定问题.

3 控制器设计

在本节中, 反步法被利用以设计控制率.

步骤 1 坐标变换$z_1=x_1$和$z_2=x_2-a_1(z_1,\zeta_1)$被定义, 其中$a_1(z_1,\zeta_1)$是一个虚拟控制器. 根据式(1), z_1的动态被展示为

$$\dot{z}_1 = g_1(x_1)x_2+f_1(x) =\\ g_1(x_1)[z_2+a_1(z_1,\zeta_1)]+F_1(x), \tag{6}$$

其中$F_1(x)=f_1(x)$.

定义Lyapunov函数$V_1=\dfrac{1}{2}z_1^2$. 基于式(6), V_1的动态可以给出

$$\dot{V}_1 = g_1(x_1)z_1z_2+g_1(x_1)z_1a_1(z_1,\zeta_1)+z_1F_1(x). \tag{7}$$

由Young's不等式, 可以获得下面的不等式:

$$z_1F_1(x) \leqslant \frac{\gamma_1}{4}z_1^2+\frac{1}{\gamma_1}F_1^2(x), \tag{8}$$

其中γ_1是一个正参数. 那么, 可以设计虚拟控制器$a_1(z_1,\zeta_1)$为

$$\begin{cases} a_1(z_1,\zeta_1) = N_1(\zeta_1)[c_1(z_1)z_1+\dfrac{\gamma_1}{4}z_1], \\ \dot{\zeta}_1 = c_1(z_1)z_1^2+\dfrac{\gamma_1}{4}z_1^2, \end{cases} \tag{9}$$

其中: $N_1(\zeta_1)$是一个光滑Nussbaum增益函数, $c_1(z_1)$是一个待设计的光滑正函数. 根据式(9)可知, 如果$z_1=0$, 那么$a_1(0,\zeta_1)=0$.

将式(8)–(9)代入式(7), 可以得到

$$\dot{V}_1 \leqslant -c_1(z_1)z_1^2+[g_1(x_1)N_1(\zeta_1)+1]\dot{\zeta}_1+\\ g_1(x_1)z_1z_2+\frac{1}{\gamma_1}F_1^2(x). \tag{10}$$

步骤 i $(2\leqslant i\leqslant n-1)$ 定义坐标变换$z_i=x_i-a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})$, 与此同时定义$z_{i+1}=x_{i+1}-a_i(z_i,\zeta_i)$, 其中: $a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})$和$a_i(z_i,\zeta_i)$是虚拟控制器, 并且$\bar{z}_i=(z_1,\cdots,z_i)$. 根据式(1), z_i的动态可以展示为

$$\dot{z}_i = \dot{x}_i-\dot{a}_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1}) =\\ g_i(\bar{x}_i)[z_{i+1}+a_i(z_i,\zeta_i)]+f_i(x)-\\ \frac{\partial a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})}{\partial z_{i-1}}\dot{z}_{i-1}-\\ \frac{\partial a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})}{\partial\zeta_{i-1}}\dot{\zeta}_{i-1}. \tag{11}$$

定义Lyapunov函数$V_i = V_{i-1}+\frac{1}{2}z_i^2$. 基于式(11), V_i的动态被给为

$$\begin{aligned}\dot{V}_i =&\dot{V}_{i-1} + z_i\dot{z}_i \leqslant -\sum_{j=1}^{i-1} c_j(z_j)z_j^2+\\&\sum_{j=1}^{i-1}[g_j(\bar{x}_j)N_j(\zeta_j)+1]\dot{\zeta}_j+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\gamma_j}F_j^2(x)+\\&g_i(\bar{x}_i)z_iz_{i+1}+z_ig_i(\bar{x}_i)a_i(z_i,\zeta_i)+z_iF_i(x),\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}F_i(x)=&g_{i-1}(\bar{x}_{i-1})z_{i-1}+f_i(x)-\\&\frac{\partial a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})}{\partial z_{i-1}}\dot{z}_{i-1}-\\&\frac{\partial a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})}{\partial \zeta_{i-1}}\dot{\zeta}_{i-1}.\end{aligned} \tag{13}$$

根据Young's不等式, 可以得到下面不等式:

$$z_iF_i(x)\leqslant \frac{\gamma_i}{4}z_i^2+\frac{1}{\gamma_i}F_i^2(x), \tag{14}$$

其中γ_i是一个正常数. 那么, 虚拟控制器$a_i(z_i,\zeta_i)$可以设计为

$$\begin{cases}a_i(\bar{z}_i,\zeta_i)=N_i(\zeta_i)[c_i(z_i)z_i+\dfrac{\gamma_i}{4}z_i],\\ \dot{\zeta}_i=c_i(z_i)z_i^2+\dfrac{\gamma_i}{4}z_i^2,\end{cases} \tag{15}$$

其中: $N_i(\zeta_i)$是一个光滑Nussbaum增益函数, $c_i(z_i)$是一个待设计的光滑正函数. 根据式(15), 可以得到$a_1(0,\cdots,0,\zeta_i)=0$.

将式(14)–(15)代入到式(12), 可以得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_i\leqslant& -\sum_{j=1}^{i}c_j(z_j)z_j^2+\sum_{j=1}^{i}[g_j(\bar{x}_j)N_j(\zeta_j)+1]\dot{\zeta}_j+\\&g_i(\bar{x}_i)z_iz_{i+1}+\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\gamma_j}F_j^2(x).\end{aligned} \tag{16}$$

步骤 n 坐标变换$z_n=x_n-a_{n-1}(z_{n-1},\zeta_{n-1})$被定义, 其中, $a_{n-1}(z_{n-1},\zeta_{n-1})$是一个虚拟控制器. 根据式(1), z_n的动态可以表示为如下所示:

$$\begin{aligned}\dot{z}_n=&g_n(\bar{x}_n)u+f_n(x)-\frac{\partial a_{n-1}(z_{n-1},\zeta_{n-1})}{\partial z_{n-1}}\dot{z}_{n-1}-\\&\frac{\partial a_{n-1}(z_{n-1},\zeta_{n-1})}{\partial \zeta_{n-1}}\dot{\zeta}_{n-1}.\end{aligned} \tag{17}$$

定义Lyapunov函数$V_n=V_{n-1}+\frac{1}{2}z_n^2$. 根据式(17), V_n的动态被获得为

$$\begin{aligned}\dot{V}_n=&\dot{V}_{n-1}+z_n\dot{z}_n\leqslant\\&-\sum_{j=1}^{n-1}c_j(z_j)z_j^2+\sum_{j=1}^{n-1}[g_j(\bar{x}_j)N_j(\zeta_j)+1]\dot{\zeta}_j+\\&\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\gamma_j}F_j^2(x)+g_n(\bar{x}_n)z_nu+z_nF_n(x),\end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned}F_n(x)=&g_{n-1}(\bar{x}_{n-1})z_{n-1}+f_n(x)-\\&\frac{\partial a_{n-1}(z_{n-1},\zeta_{n-1})}{\partial z_{n-1}}\dot{z}_{n-1}-\\&\frac{\partial a_{n-1}(z_{n-1},\zeta_{n-1})}{\partial \zeta_{n-1}}\dot{\zeta}_{n-1}.\end{aligned} \tag{19}$$

根据Young's不等式, 可以得到下面不等式:

$$z_nF_n(x)\leqslant\frac{\gamma_n}{4}z_n^2+\frac{1}{\gamma_n}F_n^2(x), \tag{20}$$

其中γ_n是一个待设计的正常数. 那么, 设计控制率u为

$$\begin{cases}u=N_n(\zeta_n)[c_n(z_n)z_n+\dfrac{\gamma_n}{4}z_n],\\ \dot{\zeta}_n=c_n(z_n)z_n^2+\dfrac{\gamma_n}{4}z_n^2,\end{cases} \tag{21}$$

其中: $N_n(\zeta_n)$是一个光滑Nussbaum增益函数, $c_n(z_n)$是一个待设计的光滑正函数.

将式(20)–(21)代入式(18), 可以得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_n\leqslant& -\sum_{j=1}^{n}c_j(z_j)z_j^2+\sum_{j=1}^{n}[g_j(\bar{x}_j)N_j(\zeta_j)+1]\dot{\zeta}_j+\\&\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j}F_j^2(x).\end{aligned} \tag{22}$$

注 3 根据等式(15)(21), 可知虚拟控制器$a_i(\bar{z}_i)$和控制器u不包含先前虚拟控制器的导数. 因此, 该算法不仅解决了非线性系统(1)的全局渐近问题, 而且解决了反步法的"微分爆炸"问题[34–35]. 在目前, 解决反步法的"微分爆炸"有动态面控制方法和直接模糊法[34–35], 然而, 这两种算法仅仅解决了半全局一致最终有界问题, 而全局渐近稳定稳定问题则无法得到. 这说明了本文算法的优越性.

4 稳定性分析

根据上述对控制器的设计过程, 可以得到下面的定理.

定理 1 考虑式(1)中描述的具有未知函数和未知控制方向的非线性系统. 构造控制器(21)以及虚拟控制器(15)(9)以保证系统状态$x_i(i=1,\cdots,n)$渐近收敛到原点, 也即$\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)=0$, 并且闭环系统的所有信号都是有界的.

证 根据不等式(22), $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j}F_j^2(x)\geqslant 0$. 现在下面的过程是处理$\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j}F_j^2(x)$. 根据对上述函数$F_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$的定义, 可以解释为如下所示:

1) 函数$F_1(x)$的定义, 下面的等式可以获得

$$\begin{aligned}F_1(x)=&f_1(x)=\\&f_1(z_1,z_2+a_1(z_1),\cdots,z_n+a_{n-1}(\bar{z}_{n-1}))=\\&\bar{F}_1(\bar{z}_n).\end{aligned} \tag{23}$$

由式(23), 得到

$$\bar{F}_1(0,\cdots,0)=f_1(0,0+a_1(0),\cdots,0+a_{n-1}(0,\cdots,0))=f_1(0,\cdots,0)=0. \tag{24}$$

根据引理4, 可知存在一个光滑函数$\hbar_{1i}(z_i)$ ($i=1,\cdots,n$)使得

$$\bar{F}_1^2(\bar{z}_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\hbar_{1i}^2(z_i)z_1^2. \tag{25}$$

2) 根据$F_i(x)(i=2,\cdots,n)$的定义式(13)(19), 可以获得

$$\begin{aligned}
&F_i(x)=\\
&g_{i-1}(\bar{x}_{i-1})z_{i-1}-\frac{\partial a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})}{\partial z_{i-1}}\dot{z}_{i-1}-\\
&\frac{\partial a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})}{\partial \zeta_{i-1}}\dot{\zeta}_{i-1}+f_i(x)=\\
&f_i(z_1,z_2+a_1(z_1,\zeta_1),\cdots,z_n+a_{n-1}(z_{n-1},\zeta_{n-1}))-\\
&\frac{\partial a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})}{\partial z_{i-1}}(g_{i-1}(\bar{x}_{i-1})(z_i+\\
&a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1}))+f_{i-1}(x)-\\
&\frac{\partial a_{i-2}(z_{i-2},\zeta_{i-2})}{\partial z_{i-2}}\dot{z}_{i-2}-\frac{\partial a_{i-2}(z_{i-2},\zeta_{i-2})}{\partial \zeta_{i-2}}\dot{\zeta}_{i-2})-\\
&\frac{\partial a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})}{\partial \zeta_{i-1}}(c_{i-1}z_{i-1}^2+\frac{\gamma_1}{4}z_{i-1}^2)+\\
&g_{i-1}(\bar{x}_{i-1})z_{i-1}=\bar{F}_i(\bar{z}_n).
\end{aligned} \tag{26}$$

从式(24)(26)可以得到

$$\begin{aligned}
&\bar{F}_i(0,\cdots,0)=\\
&f_i(0,0+a_1(0,\zeta_1),\cdots,0+a_{n-1}(0,\zeta_{n-1}))-\\
&\frac{\partial a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})}{\partial z_{i-1}}(g_{i-1}(\bar{x}_{i-1})(0+a_{i-1}(0,\zeta_{i-1}))-\\
&\frac{\partial a_{i-2}(z_{i-2},\zeta_{i-2})}{\partial z_{i-2}}\times 0-\frac{\partial a_{i-2}(z_{i-2},\zeta_{i-2})}{\partial \zeta_{i-2}}\times 0+\\
&0)-\frac{\partial a_{i-1}(z_{i-1},\zeta_{i-1})}{\partial \zeta_{i-1}}(c_{i-1}\times 0^2+\frac{\gamma_1}{4}\times 0^2)+\\
&g_{i-1}(\bar{x}_{i-1})\times 0=0.
\end{aligned} \tag{27}$$

因此, 根据引理4, 可知存在光滑函数$\hbar_{i1}(z_1)$, $\hbar_{i2}(z_2),\cdots,\hbar_{in}(z_n)$满足

$$\bar{F}_i^2(\bar{z}_n)\leqslant\hbar_{i1}^2(z_1)z_1^2+\hbar_{i2}^2(z_2)z_2^2+\cdots+\hbar_{in}^2(z_n)z_n^2. \tag{28}$$

从式(25)(28), 不等式(22)被重写为

$$\begin{aligned}
\dot{V}_n\leqslant&-\sum_{j=1}^{n}c_j(z_j)z_j^2+\sum_{j=1}^{n}[g_j(\bar{x}_j)N_j(\zeta_j)+1]\dot{\zeta}_j+\\
&\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\tau_j}\bar{F}_j^2(\bar{z}_n)\leqslant-\sum_{i=1}^{n}[c_i(z_i)-\\
&\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j}\hbar_{ji}^2(z_i)]z_i^2+\\
&\sum_{j=1}^{n}[g_j(\bar{x}_j)N_j(\zeta_j)+1]\dot{\zeta}_j.
\end{aligned} \tag{29}$$

定义

$$c_i(z_i)\geqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j}\hbar_{ji}^2(z_i). \tag{30}$$

那么, $\dot{V}_n$能被表达为

$$\dot{V}_n\leqslant\sum_{j=1}^{n}[g_j(\bar{x}_j)N_j(\zeta_j)+1]\dot{\zeta}_j. \tag{31}$$

将式(31)的两边沿$[0,t]$积分, 可以得到

$$V_n\leqslant\int_0^t\sum_{j=1}^{n}[g_j(\bar{x}_j)N_j(\zeta_j)+1]\dot{\zeta}_j(\tau)\mathrm{d}\tau+V_n(0). \tag{32}$$

根据引理2, 文献[36]和式(32), 可以看到和V_n $\zeta_i(t)(i=1,\cdots,n)$在时间区间$[0,T)(0<T<+\infty)$内有界. 因此, 系统(1), 虚拟控制器(9), (15)和控制器(21)组成的闭环系统的解是存在且有界的. 由于$\zeta_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$是有界的. 那么$\dot{\zeta}_i(i=1,\cdots,n)$, $z_i(t)$和$\dot{z}_i(t)$也是有界的. 根据Barbalat引理, 可知$\lim\limits_{t\to\infty}z_i(t)=0$. 因此, 可以获得$\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)=0$ $(i=1,\cdots,n)$.

证毕.

5 仿真实例

在这一部分中, 给出了两个仿真实例来阐述本文中控制方法的有效性.

例 1 考虑下面二阶非线性系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=g_1(x_1)x_2+0.1x_1^2,\\ \dot{x}_2=g_2(\bar{x}_2)u+0.2(\mathrm{e}^{-x_2}-1)+x_1\sin x_2,\\ y=x_1,\end{cases} \tag{33}$$

其中$x=[x_1\ \ x_2]^{\mathrm{T}}$和$y$分别是系统状态和输出.

定义$z_1=x_1$和$z_2=x_2-a_1(z_1)$. 那么, 根据已提出的算法, 虚拟控制器和实际控制器可以设计为

$$\begin{cases}a_1(z_1,\zeta_1)=N_1(\zeta_1)[c_1z_1+\frac{\gamma_1}{4}z_1],\\ u=N_2(\zeta_2)[c_2z_2+\frac{\gamma_2}{4}z_2].\end{cases} \tag{34}$$

在MATLAB仿真上, 控制器参数可以选择为$c_1(z_1)=0.5+z_1^2, c_2(z_2)=0.5+z_2^2, \gamma_1=2, \gamma_2=2$, $g_1(x_1)=g_2(\bar{x}_2)=1$. 如果系统状态的初始值选择为$x_1(0)=0.5, x_2(0)=0.5, \zeta_1(0)=0.5$和$\zeta_2(0)=0.5$, 那么, 仿真的结果如图1–3所示, 其中图2是基于文献[37]提供算法的仿真结果. 文献[37]是基于神经网络逼近方法得到的控制算法, 解决了带有未知函数非线性系统的控制问题.

图1显示了系统状态$x_1(t)$和$x_2(t)$的响应曲线, 图2是将文献[37]中的算法应用到系统(33)仿真的结果, 图3显示了控制输入$u(t)$的响应曲线. 仿真结果表明, 系统状态渐近收敛于原点, 闭环系统的所有信号都有

界. 同时, 对比于图2, 在图1中系统状态$x_1(t)$的收敛速度更快, 收敛时间更小, 并且稳态误差更小, 这显示出本文提出算法的优越性. 因此, 本文的控制算法能够解决系统(33)的渐近稳定控制问题.

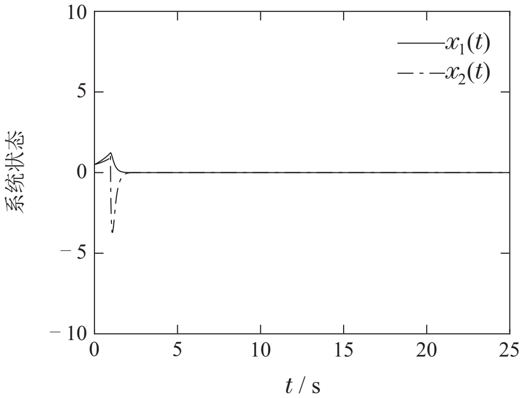

图 1　系统状态$x_1(t)$和$x_2(t)$

Fig. 1　System states $x_1(t)$和$x_2(t)$

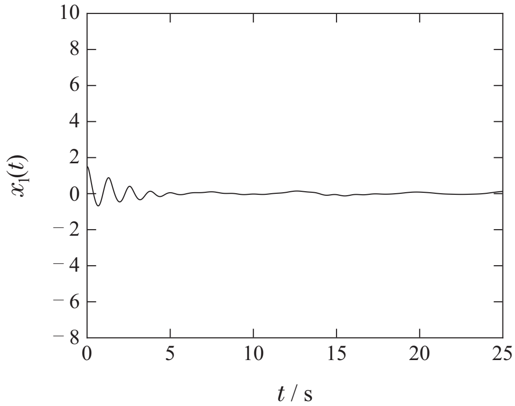

图 2　文献[37]算法的仿真结果

Fig. 2　Simulation result of the algorithm in [37]

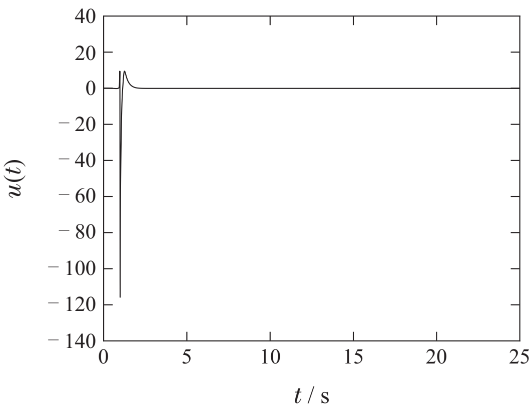

图 3　系统的控制信号$u(t)$

Fig. 3　Control input $u(t)$

例 2　考虑一个刚性单连杆机械手系统[38]. 该系统的动力学模型为

$$\begin{cases} M\ddot{q}+B\dot{q}+N\sin q=I, \\ L\dot{I}=V_{\mathrm{e}}-RI-K_B\dot{q}, \end{cases} \tag{35}$$

其中

$$\begin{cases} M=\dfrac{J}{K_\tau}+\dfrac{mL_0^2}{K_\tau}+\dfrac{M_0L_0^2}{K_\tau}+\dfrac{2m_0R_0^2}{5K_\tau}, \\ N=\dfrac{mL_0G}{2K_\tau}+\dfrac{M_0L_0G}{K_\tau},\ B=\dfrac{B_0}{K_\tau}. \end{cases} \tag{36}$$

依照系统(1), 把系统(35)转化为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2, \\ \dot{x}_2=g_2x_3+f_2(x), \\ \dot{x}_3=g_3u+f_3(x), \end{cases} \tag{37}$$

其中: $x_1=q$, $x_2=\dot{q}$, $x_3=I$, $u=V_{\mathrm{e}}$, $g_2=\dfrac{1}{M}$, $g_3=\dfrac{1}{L}$,

$$\begin{cases} f_2(x)=-\dfrac{N}{M}\sin x_1-\dfrac{B}{M}x_2, \\ f_3(x)=-\dfrac{K_B}{L}x_2-\dfrac{R}{L}x_3, \end{cases} \tag{38}$$

并且可以知道$f_2(0,0,0)=0$和$f_3(0,0,0)=0$. 因此, 本文提出的方法可用于解决系统(37)的渐近稳定控制问题.

系统参数可以选择为

$$\begin{cases} J=1.625\times10^{-3}\ (\mathrm{Kg}\cdot\mathrm{m}^2), L_0=0.305\ \mathrm{m}, \\ B_0=16.25\times10^{-3}\ (\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{rad}^{-1}), \\ m=0.506\ \mathrm{Kg},\ M_0=0.434\ \mathrm{Kg}, R_0=0.023\ \mathrm{m}, \\ L=25.0\times10^{-3}\ \mathrm{H},\ R=5.0\ \Omega, \\ K_\tau=K_B=0.90\ (\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}^{-1}). \end{cases} \tag{39}$$

在MATLAB仿真中, 控制器参数可以选择为$\gamma_2=2$, $\gamma_3=2$, $c_1=3$, $c_2=3$, $c_3=3$. 如果系统状态的初始值为$x_1(0)=1$, $x_2(0)=1$, $x_3(0)=1$, $\zeta_2(0)=1$, $\zeta_3(0)=1$, 那么仿真结果如图4–5所示.

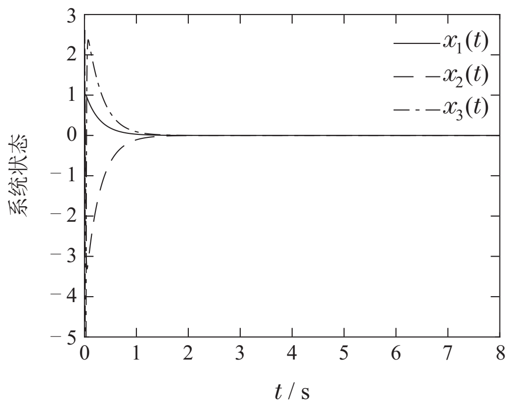

图 4　系统状态$x_1(t)$, $x_2(t)$和$x_3(t)$

Fig. 4　System states $x_1(t)$, $x_2(t)$ and $x_3(t)$

图4显示了系统状态$x_1(t)$, $x_2(t)$和$x_3(t)$的响应曲线, 图5显示了控制输入$u(t)$的响应曲线. 仿真结果表明, 系统状态渐近收敛到原点, 闭环系统的所有信号都有界. 结合以上仿真结果可知, 本文的控制算法能

够解决系统(35)的渐近稳定控制问题. 这表明已提出的控制方法是有效的.

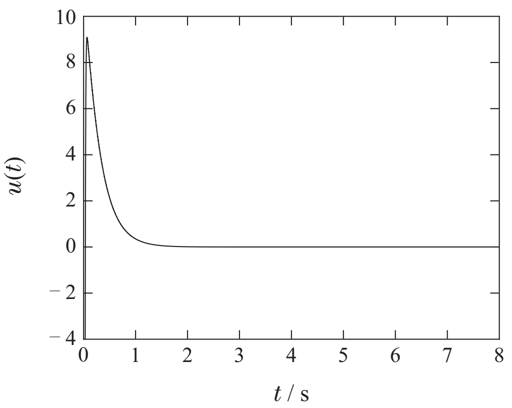

图 5 系统的控制信号$u(t)$

Fig. 5 Control input $u(t)$

6 结论

本文研究了具有未知函数和未知控制方向非线性系统的全局渐近稳定控制问题. 首先, 提出引理4来解决未知函数问题. 然后, 基于Lyapunov函数分析法, 反步法和Nussbaum增益函数, 设计控制律来解决具有未知函数和未知控制方向非线性系统的全局渐近稳定控制问题. 最后, 将该算法应用于单连杆机器人系统实际系统中, 验证了已提出算法的有效性. 本文的控制算法没有使用模糊逼近算法或神经网络算法来逼近未知函数, 这样使得全局渐近稳定控制算法的设计成为可能. 与此同时, 已提出的控制算法也没有基于对未知函数的假设条件, 因此降低了控制算法的保守性.

参考文献:

[1] DONG Y, CHEN J, HUANG J. Cooperative robust output regulation for second-order nonlinear multiagent systems with an unknown exosystem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(10): 3418 – 3425.

[2] FRANCIS B A, WONHAM W M. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 1976, 12(5): 457 – 465.

[3] ALTHOFF M, STURSBERG O, BUSS M. Reachability analysis of nonlinear systems with uncertain parameters using conservative linearization. *The 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico: IEEE, 2008: 4042 – 4048.

[4] LIU M M, LIU Y L, ZHAN H. Forming quality of thin-walled rectangular waveguide tube during small-radius rotary draw bending under different push assistant matching conditions. *International Journal of Adavanced Manufacturing Technology*, 2019, 104(5/8): 3095 – 3105.

[5] LIU Yonghua, HUANG Liangpei, XIAO Dongming, et al. Dynamic state feedback stabilization for a class of nonaffine nonlinear systems with unknown time delays. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(7): 923 – 928.
(刘勇华, 黄良沛, 肖冬明, 等. 一类非仿射非线性时滞系统的动态状态反馈镇定. 控制理论与应用, 2016, 33(7): 923 – 928.)

[6] LIU H, PAN Y P, CAO J D, et al. Adaptive neural network backstepping control of fractional-order nonlinear systems with actuator faults. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(12): 5166 – 5177.

[7] LIU Ye, YANG Pengju, ZHANG Xu. Distributed output feedback asymptotic consensus control for nonlinear multi-agent systems with hysteresis. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(7): 1102 – 1112.
(刘烨, 杨朋举, 张绪. 非线性多智能体磁滞系统的分布式输出反馈渐近一致控制. 控制理论与应用, 2021, 38(7): 1102 – 1112.)

[8] SONG S, ZHANG B Y, XIA J W, et al. Adaptive backstepping hybrid fuzzy sliding mode control for uncertain fractional-order nonlinear systems based on finite-time scheme. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(4): 1559 – 1569.

[9] WANG C Y, ZHANG M Q, LI H, et al. Event-based adaptive output feedback prescribed performance control for a class of switched nonlinear systems with unknown control directions. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2020, 18(10): 2482 – 2491.

[10] LIU G L, ZHOU Q, ZHANG Y H, et al. Fuzzy tracking control for nonlinear multi-agent systems with actuator faults and unknown control directions. *Fuzzy Sets and Systems*, 2020, 358(6): 81 – 97.

[11] MENG X, ZHAI D, FU Z M, et al. Adaptive fault tolerant control for a class of switched nonlinear systems with unknown control directions. *Applied Mathematics and Computation*, 2020: 370, DOI: 10.1016/j.amc.2019.124913.

[12] CHEN J Y, LI Z H, DING Z T. Adaptive output regulation of uncertain nonlinear systems with unknown control directions. *Science China–Information Sciences*, 2019, 62(8): 089205.

[13] LIU T, HUANG J. Cooperative output regulation for a class of nonlinear multi-agent systems with unknown control directions subject to switching networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(3): 783 – 790.

[14] WANG W, WEN C Y, HUANG J S. Distributed adaptive asymptotically consensus tracking control of nonlinear multi-agent systems with unknown parameters and uncertain disturbances. *Automatica*, 2017, 77: 133 – 142.

[15] ZHANG L L, TONG S C, LI Y M. Prescribed performance adaptive fuzzy output-feedback control of uncertain nonlinear systems with unmodeled dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 77(4): 1653 – 1665.

[16] LIU W H, QI X J, LU J W, et al. Finite-time fault-tolerant control for nonlinear systems with input quantization and its application. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs*, 2020, 67(7): 1249 – 1253.

[17] MA J L, XU S Y, MA Q, et al. Event-triggered adaptive neural network control for nonstrict-feedback nonlinear time-delay systems with unknown control directions. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(10): 4196 – 4205.

[18] MA J L, PARK J H, XU S Y. Global adaptive finite-time control for uncertain nonlinear systems with actuator faults and unknown control directions. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97(4): 2533 – 2545.

[19] LIU W, MA Q, LU J W, et al. A neural composite dynamic surface control for pure-feedback systems with unknown control gain signs and full state constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(16): 5720 – 5743.

[20] HU Jianbo, WANG Yingyang, LIU Bingqi, et al. Adaptive neural fast prescribed performance control for non-affine pure-feedback systems. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(10): 2218 – 2230.
(胡剑波, 王应洋, 刘炳琪, 等. 非仿射纯反馈系统自适应神经网络快速预设性能控制. 控制理论与应用, 2020, 37(10): 2218 – 2230.)

[21] YU J P, SHI P, LIN C, et al. Adaptive neural command filtering control for nonlinear mimo systems with saturation input and unknown control direction. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(6): 2536 – 2545.

[22] WANG C L, GUO L, WEN C Y, et al. Adaptive neural network control for a class of nonlinear systems with unknown control direction. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(11): 4708 – 4718.

[23] SHU Y J, TONG Y H, YU C G. Robust neural tracking control for switched nonaffine stochastic nonlinear systems with unknown control directions and backlash-like hysteresis. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 375(5): 2791 – 2812.

[24] ZHAO X D, WANG X Y, ZONG G D, et al. Fuzzy-approximation-based adaptive output-feedback control for uncertain nonsmooth nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(6): 3847 – 3859.

[25] LI Y M, MIN X, TONG S C. Adaptive fuzzy inverse optimal control for uncertain strict-feedback nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(10): 22363 – 22374.

[26] WU L B, PARK J H, XIE X P, et al. Fuzzy adaptive event triggered control for a class of uncertain nonaffine nonlinear systems with full state constraints. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(10): 2363 – 2374.

[27] WANG X H. Global finite-time stabilization of a class of nonlinear system based on a dynamic gain approach. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, 43(1): 269 – 280.

[28] HUANG X Q, LIN W, YANG B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2005, 41(5): 881 – 888.

[29] GUO C, XIE X J. Global output feedback control of feedforward nonlinear time-delay systems with unknown output function. *International Journal of Control*, 2020, 93(8): 1942 – 1953.

[30] WANG P, YU C P, SUN J. Global output feedback control for nonlinear cascade systems with unknown output functions and unknown control directions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(6): 2493 – 2514.

[31] YAN X H, LIU Y G, ZHENG W X. Global adaptive output-feedback stabilization for a class of uncertain nonlinear systems with unknown growth rate and unknown output function. *Automatica*, 2019, 104: 173 – 181.

[32] LI J, QIAN C J, DING S H. Global finite-time stabilisation by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Control*, 2010, 83(11): 2241 – 2252.

[33] HUANG J. *Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications*. Phildelphia, PA, USA: SIAM, 2004.

[34] SWAROOP D, HEDRICK J K, YIP P P, GERDES J C. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(10): 1893 – 1899.

[35] CHEN B, LIU X P, LIU K F, et al. Direct adaptive fuzzy control of nonlinear strict-feedback systems. *Automatica*, 2009, 45(6): 1530 – 1535.

[36] YE X, HUANG J. Adaptive nonlinear design without a priori knowledge of control directions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(11): 1617 – 1621.

[37] PARK J H, KIM S H, MOON C J. Adaptive neural control for strict-feedback nonlinear systems without backstepping. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2009, 20(7): 1204 – 1209.

[38] DAWSON D M, CARROLL J J, SCHNEIDER M. Integrator backstepping control of a brush DC motor turning a roboyic load. *IEEE Transactions on Control Systems Technongy*, 1994, 2(3): 233 – 244.

作者简介:

贾付金 博士, 讲师, 主要从事非线性系统控制、自适应控制与输出调节问题研究, E-mail: fujinjia1234@163.com;

张天良 博士, 主要从事非线性系统控制、自适应控制研究, E-mail: t_lzhang@163.com.