

对抗网络下时滞非线性多智能体系统固定时间二分一致性

王 啸¹, 刘 剑², 武永宝², 孙长银^{2†}

(1. 东南大学 网络空间安全学院, 江苏 南京 211189; 2. 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 本文针对一类存在输入时延的非线性多智能体系统, 研究了其在结构平衡的无向符号图下的固定时间二分一致性问题. 首先, 本文针对智能体间相互合作与相互竞争的关系, 设计了一类存在输入时延的多智能体系统固定时间分布式一致性控制协议, 使得系统状态在固定时间内收敛到数值相同但符号相反的两个值, 且收敛时间上界与初始状态无关. 随后, 利用Lyapunov稳定性理论和代数图论给出了在存在输入时延的情况下多智能体系统实现固定时间二分一致性的充分条件和收敛时间的上界值, 证明了控制算法的稳定性. 最后, 仿真实例验证了所提固定时间二分一致性算法和理论结果的有效性.

关键词: 非线性多智能体系统; 输入时延; 固定时间控制; 二分一致性

引用格式: 王啸, 刘剑, 武永宝, 等. 对抗网络下时滞非线性多智能体系统固定时间二分一致性. 控制理论与应用, 2023, 40(2): 204–211

DOI: 10.7641/CTA.2022.11280

Fixed-time bipartite consensus of delayed nonlinear multi-agent systems under antagonistic network

WANG Xiao¹, LIU Jian², WU Yong-bao², SUN Chang-yin^{2†}

(1. School of Cyber Science and Engineering, Southeast University, Nanjing Jiangsu 211189, China;

2. School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

Abstract: In this paper, the fixed-time bipartite consensus problem is investigated for a class of nonlinear multi-agent systems with input delay under an undirected signed graph, and the signed graph is structurally balanced. Firstly, a fixed-time distributed consensus control protocol of multi-agent systems with input delay is designed for the cooperation and competition behaviors among agents, which guarantees the system states converge to two same values but opposite signs in a fixed time, and the upper bound of convergence time is independent of the initial states. Then, the sufficient conditions are proposed for the multi-agent systems to achieve the fixed-time bipartite consensus with input delay by using the Lyapunov stability theory and algebraic graph theory, and the stability of the control algorithm is proved. Meanwhile, the upper bound of convergence time is given. Finally, the effectiveness of the proposed fixed-time bipartite consensus algorithm and the theoretical analysis results are illustrated by the simulation examples.

Key words: nonlinear multi-agent systems; input delay; fixed-time control; bipartite consensus

Citation: WANG Xiao, LIU Jian, WU Yongbao, et al. Fixed-time bipartite consensus of delayed nonlinear multi-agent systems under antagonistic network. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(2): 204–211

1 引言

多智能体系统是由多个可计算的智能体组成的系统, 通过智能体之间的通讯交互代替单个体系统, 以解决复杂的现实问题. 近年来, 多智能体系统在智能电网、智慧交通、无人机编队等领域的深入应用引起

了研究人员的广泛关注. 一致性作为协同控制的基础, 是当前多智能体系统研究的核心问题之一^[1–5]. 一致性问题即通过设计系统的控制协议, 使各个智能体状态在进行信息交换后达到一致, 从而有效地提升系统的可靠性、鲁棒性和容错性.

收稿日期: 2021–12–27; 录用日期: 2022–08–22.

[†]通信作者. E-mail: cysun@seu.edu.cn; Tel.: +86 13913036082.

本文责任编辑: 龙离军.

科技部“2030–人工智能专项”重大项目(2018AAA0101400), 国家自然科学基金项目(61921004, 62103099), 江苏省前沿引领技术基础研究专项项目(BK20202006)资助.

Supported by the National Key Research and Development Program of China (2018AAA0101400), the National Natural Science Foundation of China (61921004, 62103099) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China (BK20202006).

在多智能体一致性控制的研究中,收敛速度是评价控制性能的一项核心指标,如何保证和提高智能体状态的收敛速度是一个重要的研究方向.针对这一问题,研究人员提出了渐近一致性和有限时间一致性的概念,并取得了较为成熟的研究成果.多智能体的渐近一致性指的是在无穷时刻各个智能体的状态渐近收敛为相同的值.而在实际应用中,由于资源、成本、时间等条件的局限性,需要在有限时间内实现一致性来进一步满足对实际系统收敛时长的要求.相较于渐近一致性,有限时间一致性控制方法具有更强的抗干扰能力、更高的控制精度和更快的收敛速度等优点.然而,由于有限时间一致性的收敛时间依赖于多智能体系统的初始状态,但系统的初始状态往往不易于获取,导致有限时间一致性控制难以直接应用到工程实际中.为了解决此问题,研究人员提出了固定时间一致性的概念和相关理论. Polyakov在文献[6]中首次提出固定时间控制的概念,应用Lyapunov第二方法给出了非线性系统固定时间稳定的充分条件.固定时间控制指对于多智能体系统中任意初始状态的不同个体,能在固定时间达到一致性,且收敛时间存在一个与初始状态无关的有限的上界.近年来,越来越多的研究者对多智能体系统固定时间一致性问题展开了研究.文献[7]研究了一类基于拓扑优化的固定时间一致性问题.文献[8]针对一类具有输出约束和死区输入的多智能体系统,通过引入神经网络和自适应算法提出了一种控制协议,实现了系统的固定时间一致性.文献[9]基于固定拓扑和切换拓扑两种情况,提出了一种基于边的分布式控制算法,在保证各智能体局部凸函数之和最小的情况下实现固定时间一致性.文献[10]针对非线性的多智能体系统,提出了一种高鲁棒性的固定时间跟踪控制算法,克服了通信环路问题.文献[11]分别基于事件触发和自触发机制,研究了一类带有领导者的固定时间一致性问题.文献[12]基于有向通信拓扑,提出了一种新的一致性策略来实现固定时间控制问题,节约了通信成本.文献[13]针对二阶系统,提出了一种可以解决通信时延的固定时间一致性控制协议.文献[14]研究了多智能体系统固定时间的容错控制.文献[15]基于事件触发机制提出了一种分布式控制协议,解决了不连续通信的问题,实现了系统的固定时间一致性.文献[16]提出了一种动态事件触发机制,研究了一类非线性多智能体系统实际固定时间一致性问题,并以蔡氏电路为例验证了算法的有效性.文献[17]利用滑模控制方法设计了具有鲁棒性的高阶多智能体系统固定时间一致性跟踪控制算法.文献[18]基于事件触发机制,研究了一类切换拓扑下存在外部扰动的多智能体系统固定时间一致性问题,降低了系统的能量损耗.

当多智能体系统中只存在合作交互时,智能体之

间可以通过局部的交互实现全局的协同目标.然而在很多实际应用中,智能体之间并非只存在合作关系,也会出现相互竞争的行为^[19-21].因此,一般性的合作与竞争关系共存的多智能体系统研究同样值得关注.文献[22]研究了存在敌对关系的多智能体系统的一致性问题,首次提出了二分一致性的概念,将智能体划分为两个不同的集合,最终分别收敛到两个大小相同但符号相反的值.近年来,研究者对多智能体系统二分一致性的研究取得了较大的发展.文献[23]针对一个线性系统,研究了在有向图下带有领导者的二分一致性问题.文献[24]针对具有时变时滞的多智能体系统,研究了其二分一致性问题.文献[25]针对结构不平衡下的矩阵加权网络,给出了实现系统二分一致性的充分条件.文献[26]针对一类受到网络攻击的多智能体系统提出了一种控制协议,使得系统在受到攻击时仍可实现二分一致性.文献[27]利用智能体间的合作与竞争关系,研究了一类网络化系统的实用二分一致性问题.文献[28]分别针对异质线性和非线性系统研究了其二分一致性问题,发现当耦合拓扑满足一定的连接条件时系统可实现二分一致性.文献[29]针对高阶非线性多智能体系统,提出了一种分布式控制协议,解决了带有未知扰动的问题,实现了二分一致性.文献[30]研究了具有对抗交互的一类非线性多智能体系统的二分一致性跟踪控制问题,在保持系统稳定的前提下推导出了耦合增益的下界.文献[31]提出了一种具有差分隐私保护的分布式控制协议,实现了系统的二分一致性.

上述工作在多智能体一致性控制上都做出了较大的贡献,但有一些问题尚未被考虑.一方面,目前固定时间控制的相关结论主要是基于合作交互的多智能体系统,在更多的实际情况下,智能体间同时存在竞争对抗,因此需将系统中的智能体分成多个小组,通过组间合作与竞争完成不同的任务.例如当移动机器人集群围捕多个目标时,可将全部机器人进行分组,每个分组针对不同抓捕物采取不同策略,最终实现协同抓捕的目标;另一方面,目前对于存在输入时延的二分一致性的研究较少.在实际的多智能体系统当中,输入时延往往是不可避免的.输入时延的存在会影响系统的稳定性,这主要是因为系统中智能体对自身数据的处理导致其传输速度变得有限.针对上述问题,本文利用智能体之间合作与竞争的关系,研究了一类输入时延下的固定时间二分一致性控制问题.在满足符号图结构平衡的条件下,借助拉普拉斯矩阵设计了一种分布式控制律,通过Lyapunov稳定性理论和代数图论等方法给出了具有输入时延的多智能体系统实现固定时间二分一致性的充分条件和收敛时间的上界.

本文结构组织如下:第2节对非线性多智能体系统

模型及固定时间二分一致性问题进行阐述;第3节设计了固定时间二分一致性控制律,并对存在输入时延的情况进行稳定性分析;第4节通过仿真将本文所提出的固定时间二分一致性控制方法加以验证;第5节对全文进行了总结.

2 预备知识与问题描述

2.1 图论

图 $\mathcal{G} = (V, E, A)$ 表示一个有 M 个节点的无向图, $V = \{v_1, \dots, v_M\}$ 表示图 $\mathcal{G}$ 的顶点,其中用节点 v_i 表示第 i 个智能体.如果节点 v_i 和 v_j 有路径相连,则称两者之间是连通的.在无向图中,如果图中任意两节点之间都是连通的,则称该图是连通图. $E \in V \times V$ 表示图 $\mathcal{G}$ 的边集.如果智能体 i 和智能体 j 之间能够相互传递信息,则智能体 i 和智能体 j 互为邻居智能体.本文用 $N_i = \{v_j \in V | (v_i, v_j) \in E\}$ 表示节点 v_i 的所有邻居节点的集合. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 表示图 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵,其中

$$\begin{cases} a_{ij} > 0, & j \in N_i, \\ a_{ij} = 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (1)$$

本文默认 $a_{ii} = 0$.节点 i 的度即为其邻居节点的个数,由此构建的度矩阵为 $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_M\}$,其中 $d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^M a_{ij}$.如果任意两个节点之间都有一条路径,则图 $\mathcal{G}$ 是连通图.根据前述邻接矩阵和度矩阵的定义,可以得到 $L = D - A$.对于无向图, L 矩阵是一个对称且半正定的矩阵,其中

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1, j \neq i}^M a_{ij}, & i = j, \\ -a_{ij}, & i \neq j. \end{cases} \quad (2)$$

2.2 结构平衡

在早期对多智能体网络一致性问题研究中,大多使用非负数权重来描述个体间的相互作用关系,这并不符合大多数实际网络拓扑结构中出现负权重的情形. Altafini^[22]于2013年将结构平衡理论应用于二分一致性问题,提出并证明达成二分一致性的充分必要条件,其结论与多智能体网络对应的符号网络的结构平衡性有着密切的联系,具体如下:给定一个符号图 $\mathcal{G}$,如果它的节点集合 $\mathcal{V}$ 可以划分为 $\{V_1, V_2\}$,满足 $V_1 \cup V_2 = V$ 且 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,在 V_1 和 V_2 内部的边都是正权重的,而 V_1 和 V_2 之间的边都是负权重的,则该符号图是结构平衡的,其邻接矩阵的具体表现形式为

$$\begin{cases} a_{ij} \geq 0, & \forall v_i, v_j \in V_p (p \in \{1, 2\}), \\ a_{ij} \leq 0, & \forall v_i \in V_p, v_j \in V_q, p \neq q (p, q \in \{1, 2\}). \end{cases} \quad (3)$$

其拉普拉斯矩阵的具体表现形式为

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1, j \neq i}^M |a_{ij}|, & i = j, \\ -a_{ij}, & i \neq j. \end{cases} \quad (4)$$

本文假定符号图 $\mathcal{G}$ 是结构平衡的.

2.3 相关定义和引理

假设原点是如下系统的一个平衡点:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $f(x(t), t) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ 是一个未知的非线性函数.如果 $f(x(t), t)$ 是不连续的,那么系统(5)的解是Filippov意义下的解^[32].

注 1 值得注意的是,本文的结论都是基于一维的($M = 1$),由于每一维之间都是互相独立的,所以很容易由一维的结果拓展到多维.如果需要分析 M 维的结果,可以利用Kronecker乘积的形式获得相应的结果.

定义 1^[6] 如果系统(5)是Lyapunov稳定的并且存在一个设定时间 $T(x_0) > 0$,使得系统能够在 $T(x_0)$ 内收敛到平衡点,其中 x_0 是初始状态,那么称系统(5)的原点是全局有限时间稳定的.

定义 2^[6] 如果系统(5)是全局有限时间稳定的,并且存在 $T_{\max} > 0$,使得 $T(x) \leq T_{\max}$,其中, $T_{\max}$ 是和初始状态无关的,那么称系统(5)的原点是固定时间稳定的.

定义 3 对于多智能体系统(5),如果存在一个设定时间 $T(x)$ 使得 $\lim_{t \rightarrow T(x)} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$ 成立,并且当 $t \geq T(x)$ 时, $x_i(t) = x_j(t)$ 成立,则多智能体系统(5)是固定时间一致的.其中,设定时间 $T(x)$ 是有界的,即存在 $T_{\max} > 0$,使得 $T(x) \leq T_{\max}$ 对任意的初始状态 x_0 都是成立的.

引理 1^[6] 对于系统(5),假设存在一个Lyapunov函数 $V(x(t))$ 满足如下条件:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -aV^\alpha(x(t)) - bV^\beta(x(t)), \quad (6)$$

其中: $a, b > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 1$ 时,则称系统是固定时间稳定的,且设定时间 $T(x)$ 满足如下条件:

$$T(x) \leq T_{\max} := \frac{1}{a(1-\alpha)} + \frac{1}{b(\beta-1)}, \quad (7)$$

其中 $T_{\max}$ 为设定时间 $T(x)$ 的上界.

引理 2^[33] 对于任意 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_M \geq 0$,有

$$\sum_{i=1}^M \zeta_i^{\hat{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^M \zeta_i\right)^{\hat{p}}, \quad \forall 0 < \hat{p} \leq 1. \quad (8)$$

$$M^{1-\hat{q}} \left(\sum_{i=1}^M \zeta_i\right)^{\hat{q}} \leq \sum_{i=1}^M \zeta_i^{\hat{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^M \zeta_i\right)^{\hat{q}}, \quad \forall 1 < \hat{q} \leq \infty. \quad (9)$$

引理 3^[34] 如果无向图 $\mathcal{G}$ 是连通的, L 是其拉普拉斯矩阵, 则如下结论成立:

1) 0 是矩阵 L 的单一特征值且对应的特征向量为 1_M ;

2) L 是半正定的, 且 L 的所有特征值满足 $0 = \lambda_1(L) < \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_M(L)$, 其中 $\lambda_2(L)$ 为矩阵 L 的次小特征值, 也叫图 $\mathcal{G}$ 的代数连通度;

3) $\lambda_2(L) = \min_{x \neq 0, 1_M^T x = 0} \frac{x^T L x}{x^T x}$, 因此, 如果 $1_M^T x = 0$, 那么 $x^T L x \geq \lambda_2(L) x^T x$.

引理 4^[22] 考虑一个结构平衡的符号图 $\mathcal{G}$, 对于其邻接矩阵 A , 可以找到一个非奇异矩阵

$$C = \text{diag} \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M \},$$

使 CAC 非负, 其中

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & i \in V_1, \\ -1, & i \in V_2. \end{cases} \quad (10)$$

引理 5 考虑一个连通的无向符号图 $\mathcal{G}$, 且 $\mathcal{G}$ 是结构平衡的, L 为其对应的拉普拉斯矩阵, 对于所有的 $x \in \mathbb{R}^M$, 如果 $1_M^T Cx = 0$, 则有

1) $x^T L x \geq \lambda_2(L) x^T x$;

2) $x^T L^T L x \geq \lambda_2(L) x^T L x$. 其中: $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M]^T$, $\lambda_2(L)$ 为矩阵 L 的次小特征值.

证 1) 令 $v(x) = x^T L x$, 可得

$$\begin{aligned} v(x) &= x^T L x = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M |a_{ij}| (x_i - \text{sgn}(a_{ij}) x_j)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M |a_{ij}| (x_j - \text{sgn}(a_{ij}) x_i)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

如果 $\mathcal{G}$ 是连通图且是结构平衡的, 根据引理3, 取变换矩阵 $C = \text{diag} \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M \}$, ($\sigma_i \in \{\pm 1\}$), 设计

$$\begin{aligned} L_C &= \text{diag} \left\{ \sum_{j=1}^M |a_{1j}|, \sum_{j=1}^M |a_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^M |a_{Mj}| \right\} - \\ &= CAC = CLC. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} L_C 1_M &= \left[\sum_{j=1}^M |a_{1j}|, \sum_{j=1}^M |a_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^M |a_{Mj}| \right]^T - \\ &= (CAC) 1_M = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

因此, $\lambda_1(L_C) = 0$, 对应的特征向量为 1_M . 根据引理3中对一般无向连通图的结论可知, $0 < \lambda_2(L_C) \leq \dots \leq \lambda_M(L_C)$. 根据 $C^2 = I$ 推理可得

$$\begin{aligned} v(x) &= x^T L x = x^T C^2 L C^2 x = \\ &= (Cx)^T L_C Cx. \end{aligned} \quad (14)$$

因此可得当 $v(x) = 0$ 时, $Cx = 1_M d$, 其中 $d \in \mathbb{R}^M$. 根据文献[22]可知 L_C 和 L 的特征值相同, 因此它们的次

小特征值 $\lambda_2(L_C) = \lambda_2(L)$. 进一步根据引理3可得

$$\begin{aligned} v(x) &\geq \lambda_2(L_C) (Cx)^T (Cx) = \lambda_2(L) x^T C^2 x = \\ &= \lambda_2(L) x^T x. \end{aligned} \quad (15)$$

2) 符号图 $\mathcal{G}$ 对应的拉普拉斯矩阵 L 是半正定的, 根据半正定矩阵的性质, 可以找到另一个半正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 使得 $L = Q^T Q = Q^2$ ^[35]. 根据 $L_C 1_M = 0$ 可得

$$\begin{aligned} \|1_M^T CQ\|^2 &= (1_M^T CQ) (1_M^T CQ)^T = \\ &= 1_M^T (CQ^2 C) 1_M = 1_M^T (CLC) 1_M = \\ &= 1_M^T L_C 1_M = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

因此, $1_M^T CQ = 0$, $1_M^T C(Qx) = 0$. 结合引理5中1)进一步可得

$$\begin{aligned} x^T L^T L x &= x^T Q^T Q Q^T Q x = (Qx)^T Q^2 (Qx) = \\ &= (Qx)^T L (Qx) \geq \lambda_2(L) x^T Q^T Q x = \\ &= \lambda_2(L) x^T L x. \end{aligned} \quad (17)$$

注 2 根据文献[35]矩阵分析的理论可知, 可以找到一正交矩阵 P , 使得 $L = P \Lambda_1 P^{-1}$, 其中 $\Lambda_1 = \text{diag} \{ \lambda_1(L), \lambda_2(L), \dots, \lambda_M(L) \}$. 令 $Q = P \Lambda_2 P^{-1}$, 其中

$$\Lambda_2 = \text{diag} \{ \sqrt{\lambda_1(L)}, \sqrt{\lambda_2(L)}, \dots, \sqrt{\lambda_M(L)} \},$$

因此可以得到 $Q = Q^T$, $L = Q^2$.

证毕.

2.4 问题描述

考虑一个由 M 个智能体组成的多智能体系统, 其中第 i ($i = 1, 2, \dots, M$)个智能体的动力学模型为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t - \tau) + f(x_i(t), t), \quad (18)$$

其中: $x_i(t)$, $u_i(t)$, τ 和 $f(x_i(t); t)$ 分别为位置状态、控制输入、已知的输入时延和非线性函数.

定义 4 对多智能体系统(18), 其通信拓扑图是一个连通的无向符号图, 若存在控制输入 $u_i(t)$, 使得对任意初始状态 $x_i(0)$ 都有

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T(x)} (\|x_i(t)\| - \|x_j(t)\|) = 0, \\ \|x_i(t)\| \equiv \|x_j(t)\|, \forall t \geq T(x), i, j = 1, 2, \dots, M, \end{cases} \quad (19)$$

且存在一个正常数 $T_{\max}$, 使得 $T(x) \leq T_{\max}$ 恒成立, 则称多智能体系统(18)实现固定时间二分一致性.

假设 1 $f(x_i, t)$ 为一个有界的非线性函数, 即存在一个正的常数 γ , 使得

$$|f(x_i, t)| \leq \gamma. \quad (20)$$

3 主要结果

在本节中, 针对具有输入时延的多智能体系统, 提出了一种分布式控制协议. 首先, 为了处理多智能体系统(18)中存在的输入时延问题, 采用模型降阶方法对系统(18)进行处理^[36]. 定义辅助变量 $\chi_i(t)$ 如下:

$$\chi_i(t) = x_i(t) + \int_{t-\tau}^t u_i(T) dT. \quad (21)$$

根据Newton-Leibniz公式, 对式(21)求导可得

$$\dot{\chi}_i(t) = u_i(t) + f(x_i(t), t). \quad (22)$$

设计如下分布式控制协议:

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -k_1 \left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right)^p - \\ & k_2 \text{sgn} \left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right), \end{aligned} \quad (23)$$

其中: k_1 和 k_2 是正常数, $p \in (1, +\infty)$ 是两个正奇数之比.

定理1 考虑一类满足假设1的多智能体系统(18), 通信拓扑图是一个结构平衡的无向连通符号图, 若 $k_2 > \gamma$, 利用控制器(23), 该多智能体系统可以实现固定时间二分一致性, 即

$$\lim_{t \rightarrow T(x)} (\|x_i(t)\| - \|x_j(t)\|) = 0, \quad (24)$$

且收敛时间 $T(x)$ 满足

$$\begin{aligned} T(x) \leq & \frac{1}{k_1 2^{\frac{p-1}{2}} \lambda_2(L)^{\frac{p+1}{2}} M^{\frac{1-p}{2}} (p-1)} + \\ & \frac{1}{(k_2 - \gamma) 2^{-\frac{1}{2}} \lambda_2(L)^{\frac{1}{2}}} + \tau. \end{aligned} \quad (25)$$

证 选取如下Lyapunov函数:

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{1}{2} \chi^T(t) L \chi(t) = \\ & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t))^2 = \\ & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_j(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_i(t))^2. \end{aligned} \quad (26)$$

根据引理5可得

$$\begin{aligned} \chi^T(t) L \chi(t) = & \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right)^2 \geq \\ & \lambda_2(L) \chi^T(t) L \chi(t). \end{aligned} \quad (27)$$

对 $V(t)$ 进行求导

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \\ \chi^T(t) L \dot{\chi}(t) = & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right) \times \\ & (u_i(t) + f(x_i(t), t)) = \\ & -k_1 \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right)^{p+1} - \\ & k_2 \sum_{i=1}^M \left| \sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right| + \\ & \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right) f(x_i(t), t) \leq \\ & -k_1 \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right)^{p+1} - \\ & k_2 \sum_{i=1}^M \left| \sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right| + \\ & \gamma \sum_{i=1}^M \left| \sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right| \leq \\ & -k_1 \sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right)^2 \right)^{\frac{p+1}{2}} - \\ & (k_2 - \gamma) \sum_{i=1}^M \left| \sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right| \leq \\ & -k_1 \sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right)^2 \right)^{\frac{p+1}{2}} - \\ & (k_2 - \gamma) \sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & -k_1 M^{\frac{1-p}{2}} \left(\sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \right. \right. \\ & \left. \left. \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right)^2 \right)^{\frac{p+1}{2}} - (k_2 - \gamma) \left(\sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M |a_{ij}| (\chi_i(t) - \right. \right. \\ & \left. \left. \text{sgn}(a_{ij}) \chi_j(t)) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & -(k_2 - \gamma) (2\lambda_2(L) V(t))^{\frac{1}{2}} - \\ & k_1 M^{\frac{1-p}{2}} (2\lambda_2(L) V(t))^{\frac{p+1}{2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

根据引理1可得 $\lim_{t \rightarrow T(x)} V(t) = 0$, 因此

$$\lim_{t \rightarrow T(x)} (\|\chi_i(t)\| - \|\chi_j(t)\|) = 0,$$

且当 $t \geq T(x)$ 时, $\|\chi_i(t)\| \equiv \|\chi_j(t)\|$. 其中收敛时间 $T(x)$ 的上界为

$$\begin{aligned} T_{\max} = & \frac{1}{k_1 2^{\frac{p-1}{2}} \lambda_2(L)^{\frac{p+1}{2}} M^{\frac{1-p}{2}} (p-1)} + \\ & \frac{1}{(k_2 - \gamma) 2^{-\frac{1}{2}} \lambda_2(L)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (29)$$

上述结果说明当 $t = T(x) \leq T_{\max}$ 时, 控制输入 $u_i(t)$ 将会到零, 并且在 $T_{\max} + \tau$ 时刻, $\int_{t-\tau}^t u_i(T) dT$ 也会到零. 于是, 当 $T \leq T_{\max} + \tau$ 时, 可以得到 $\lim_{t \rightarrow T} \chi(t) = x(t)$, 进一步可得 $\lim_{t \rightarrow T} (\|x_i(t)\| - \|x_j(t)\|) = 0$, 且当 $t \geq T$ 时, $\|x_i(t)\| \equiv \|x_j(t)\|$. 因此, 多智能体系统(18)可以

实现固定时间二分一致性, 收敛时间 T 满足

$$T \leq \frac{1}{k_1 2^{\frac{p-1}{2}} \lambda_2(L)^{\frac{p+1}{2}} M^{\frac{1-p}{2}} (p-1)} + \frac{1}{(k_2 - \gamma) 2^{-\frac{1}{2}} \lambda_2(L)^{\frac{1}{2}}} + \tau. \quad (30)$$

证毕.

注3 不同于现有的有限时间一致性结果, 固定时间一致性控制可以通过调节控制器参数来保证需要的收敛速度. 因此, 在实际的系统中, 可以满足更加严格的收敛时间的需求.

4 仿真

本节将通过数值仿真来验证所得理论的有效性. 考虑一个由7个智能体组成的多智能体系统, 其中的节点 v_1, v_2, v_3, v_4 和 v_5, v_6, v_7 分别属于两个不同的组别. 各智能体的初始状态为 $[9 \ 4 \ 6 \ -4.5 \ -9.7 \ -7.3 \ 7]$. 图1为智能体之间结构平衡的拓扑图.

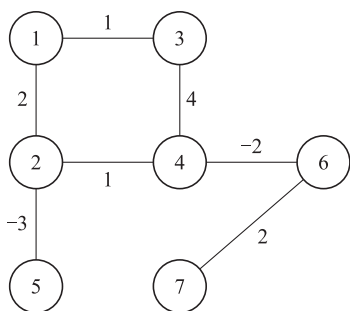


图1 结构平衡的拓扑图

Fig. 1 Structurally balanced topological graph

根据拓扑图, 可以得到如下的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

根据本文的拉普拉斯矩阵, 计算得到 $\lambda_2(L) = 0.66$. 设置控制器(23)的参数为 $k_1 = 0.2, k_2 = 2, p = 7/5, f(x_i,$

$t) = 0.2 \cos x_i$. 因此, 可得 $\gamma = 0.2$. 设置输入时延 τ 为0.8 s. 仿真结果如图2-5所示. 图2显示了7个智能体的状态轨迹, 图3显示了7个智能体的控制输入的曲线. 由图2可以看出7个智能体在3 s内实现二分一致. 根据引理1, 可以计算得到 $T_{\max}$ 为27.4 s, 因此满足 $T \leq T_{\max} + \tau$. 根据 $T_{\max}$ 的表达式可以发现 k_1 和 k_2 是影响收敛时间上界大小的因素, 可以发现, 当控制器增益越大, 收敛时间越短. 为了进一步显示控制器增益对收敛时间的影响, 为控制器(23)设置新的参数 $k_1 = 0.5, k_2 = 5$. 根据引理1, 可以计算得到调整过控制器增益后的设定时间上界 $T_{\max} = 10.9$ s. 图4和图5分别显示了7个智能体在调整过控制器增益后的状态轨迹和控制输入曲线. 从图4可以看出, 7个智能体在2 s内实现二分一致, 因此满足 $T \leq T_{\max} + \tau$. 图6对比了调整 k_1, k_2 前后系统中各智能体的状态轨迹, 可以直观地看出当控制器增益变大后, 各智能体的状态以更快的速度达到收敛值.

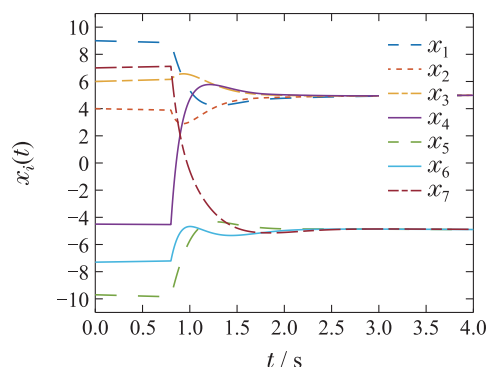


图2 系统状态响应曲线

Fig. 2 States of seven agents

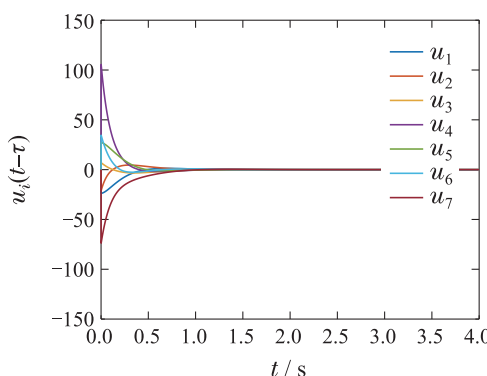


图3 控制器输入曲线

Fig. 3 Control inputs of seven agents

5 结论

本文研究了一类存在输入时延的非线性多智能体系统固定时间二分一致性问题. 首先, 本文不仅考虑了智能体间的协作交互, 也考虑了智能体间的对抗交互. 通过设计基于结构平衡图的控制协议, 以图论和Lyapunov稳定性理论为主要研究工具, 证明了多智

能体系统中各智能体的状态可以在固定时间内收敛到模值相同符号相反的两个状态,其收敛时间上界不依赖于各智能体的初始状态.最后,通过仿真实验验证了所提出控制协议的有效性.

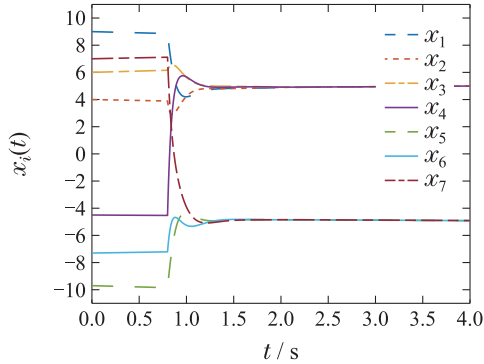


图4 调整增益后的系统状态响应曲线

Fig. 4 States of seven agents after adjusting the gain

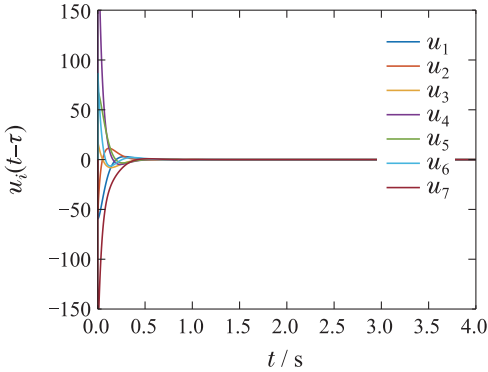


图5 调整增益后控制器输入曲线

Fig. 5 Control inputs of seven agents after adjusting the gain

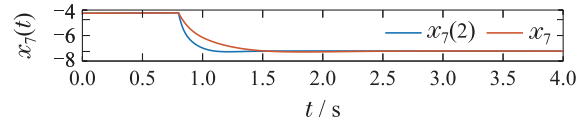
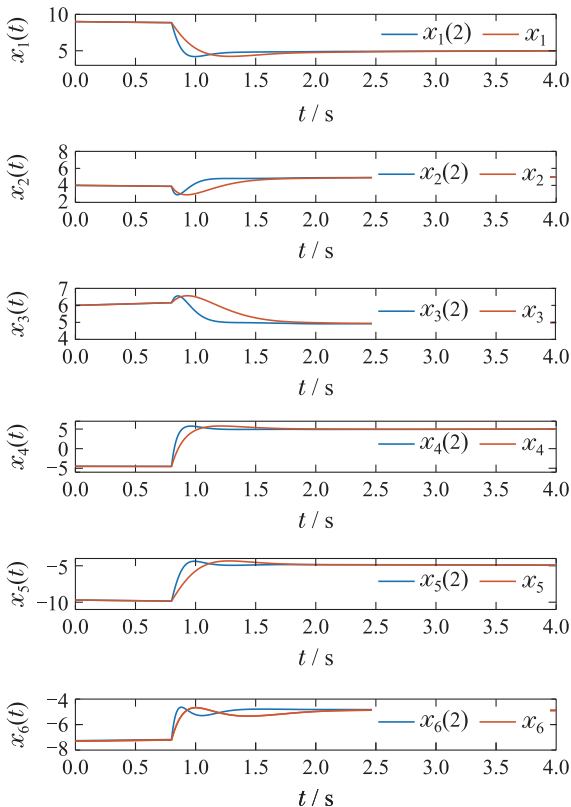


图6 不同增益下的智能体状态响应曲线

Fig. 6 States of seven agents under controllers with different gains

参考文献:

- [1] DONG X, HU G. Time-varying formation tracking for linear multi-agent systems with multiple leaders. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(7): 3658 – 3664.
- [2] YU J, DONG X, LIANG Z, et al. Practical time-varying formation tracking for high-order nonlinear multi-agent systems with multiple leaders based on the distributed disturbance observer. *International Journal of Control*, 2019, 10(3): 325 – 331.
- [3] ZHAO Y, LIU Y, LI Z, et al. Distributed average tracking for multiple signals generated by linear dynamical systems: An edge-based framework. *Automatica*, 2017, 75: 158 – 166.
- [4] JI Z J, LIN H, CAO S, et al. The complexity in complete graph characterizations of multi-agent controllability. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(1): 64 – 76.
- [5] WANG Z, LIU D. Data-based controllability and observability analysis of linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(12): 2388 – 2392.
- [6] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 57(8): 2106 – 2110.
- [7] HAO L, QI X H, YANG Z H. Topology optimised fixed-time consensus for multi-uav system in a multipath fading channel. *IET Communications*, 2020, 14(11): 1730 – 1738.
- [8] NI J K, SHI P. Adaptive neural network fixed-time leader-follower consensus for multi-agent systems with constraints and disturbances. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(4): 1835 – 1848.
- [9] NING B D, HAN Q L, ZUO Z Y. Distributed optimization for multi-agent systems: An edge-based fixed-time consensus approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(1): 122 – 132.
- [10] SHI S, XU S Y, FENG H Y. Robust fixed-time consensus tracking control of high-order multiple nonholonomic systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(3): 1869 – 1880.
- [11] LIU J, ZHANG Y L, YU Y, et al. Fixed-time leader-follower consensus of networked nonlinear systems via event/self-triggered control. *IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems*, 2020, 31(11): 5029 – 5037.
- [12] WANG Q L, WANG Y D, SUN C Y. Fixed-time consensus of multi-agent systems with directed and intermittent communications. *Asian Journal of Control*, 2016, 19(1): 95 – 105.
- [13] WANG C, WEN G, PENG Z. Integral sliding-mode fixed-time consensus tracking for second-order non-linear and time delay multi-agent systems. *Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics*, 2019, 356(6): 3692 – 3710.
- [14] LIU Y, YANG G. Fixed-time fault-tolerant consensus control for multi-agent systems with mismatched disturbances. *Neurocomputing*, 2019, 366: 154 – 160.
- [15] LIU J, ZHANG Y L, YU Y, et al. Fixed-time event-triggered consensus for nonlinear multi-agent systems without continuous communications. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 49(11): 2221 – 2229.

- [16] LIU J, RAN G T, WU Y B, et al. Dynamic event-triggered practical fixed-time consensus for nonlinear multi-agent systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, 69(4): 2156 – 2160.
- [17] ZUO Z, HAN Q, NING B. An explicit estimate for the upper bound of the settling time in fixed-time leader-following consensus of high-order multivariable multi-agent systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 66(8): 6250 – 6259.
- [18] LIU J, YU Y, XU Y, et al. Fixed-time average consensus of nonlinear delayed MASs under switching topologies: An event-based triggering approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(5): 2721 – 2733.
- [19] FENG Y Z, ZHENG W X. Adaptive tracking control for nonlinear heterogeneous multi-agent systems with unknown dynamics. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(5): 2780 – 2797.
- [20] REZAEI M H, MENHAJ M B. Adaptive output stationary average consensus for heterogeneous unknown linear multi-agent systems. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(7): 847 – 856.
- [21] CHEN K R, WANG J W, ZHANG Y. Cluster consensus of heterogeneous linear multi-agent systems. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(11): 1533 – 1542.
- [22] ALTAFINI C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(4): 935 – 946.
- [23] MENG D Y, MENG Z Y, HONG Y G. Uniform convergence for signed networks under directed switching topologies. *Automatica*, 2018, 90: 8 – 15.
- [24] QIN J, FU W, ZHENG W X. On the bipartite consensus for generic linear multi-agent systems with input saturation. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 47(8): 1948 – 1958.
- [25] SU H S, CHEN J H, YANG Y C. The bipartite consensus for multi-agent systems with matrix-weight-based signed network. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 67(10): 2019 – 2023.
- [26] HU A H, PARK J H, CAO J D. Event-triggered bipartite consensus over cooperation-competition networks under DoS attacks. *Science China Technological Sciences*, 2020, 64(1): 157 – 168.
- [27] ZHANG T H, LI H Y, LIU J, et al. Practical bipartite consensus for networked lagrangian systems in cooperation-competition networks. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 2019, 10(3): 325 – 331.
- [28] QIN J H, MA Q C, GAO H J. On group synchronization for interacting clusters of heterogeneous systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(12): 4122 – 4133.
- [29] WU Y Z, ZHAO Y Y, HU J P. Leader-follower consensus of multi-agent systems with time delays over finite fields. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 10(3): 325 – 331.
- [30] LIU Jiangang, YANG Shengjie, WANG Zhongmei, et al. Tracking control for one class of nonlinear bipartite consensus systems under signed network. *Control and Decision*, 2022, 37(7): 1909 – 1914. (刘建刚, 杨胜杰, 王仲梅, 等. 符号网络下一类非线性二分一致性系统的跟踪控制. *控制与决策*, 2022, 37(7): 1909 – 1914.)
- [31] ZUO Z Q, TIAN R, WANG Y J. Bipartite consensus for multi-agent systems with differential privacy constraint. *Proceedings of the 40th Chinese Control Conference*. Shanghai: IEEE, 2021: 5062 – 5067.
- [32] FILIPPOV A F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Side*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1988.
- [33] ZUO Z, TIE L. Distributed robust finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(6): 1366 – 1375.
- [34] REN W, BEARD R W. *Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control*. London: Springer, 2008.
- [35] HORNAND R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990.
- [36] ARTSTEIN Z. Linear systems with delayed controls: A reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, 27(4): 869 – 879.

作者简介:

王 啸 博士研究生, 目前研究方向为自主无人系统安全一致性控制、固定时间控制, E-mail: xwang2020seu@163.com;

刘 剑 博士, 副研究员, 目前研究方向为自主无人系统协同控制、固定时间控制, E-mail: bkliujian@163.com;

武永宝 从事博士后研究工作, 目前研究方向为随机复杂网络、控制系统, E-mail: yongbaowu199211@163.com;

孙长银 博士, 教授, 目前研究方向为自主无人系统协同控制、智能控制, E-mail: cysun@seu.edu.cn.