

时滞半Markov切换随机系统输入-状态稳定性分析的 时变驻留时间条件方法

刘 乾^{1,2}, 何 勇^{1,2†}, 宁重阳³

(1. 中国地质大学(武汉)自动化学院, 湖北 武汉 430074; 2. 复杂系统先进控制与智能化湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430074;
3. 中南林业科技大学 计算机与信息工程学院, 湖南 长沙 410004)

摘要: 本文针对时滞半Markov切换随机系统, 建立了一种基于时变驻留时间条件的不定多重Lyapunov-Razumikhin函数方法, 给出了系统输入-状态稳定性和积分输入-状态稳定性判别条件. 一方面, 构造了一种不定多重Lyapunov函数, 不要求每个子系统对应的Lyapunov-Razumikhin函数导数总是保持负定, 从而放宽了对于子系统稳定性要求, 甚至允许了不稳定子系统的存在; 另一方面, 提出了一种时变驻留时间条件来表示半Markov切换信号的切换次数与子系统驻留时间之间的关系, 利用时变函数对切换次数进行估计, 间接放松了不定多重Lyapunov-Razumikhin函数选取的限制. 最后, 数值算例验证了所提方法的有效性.

关键词: 半Markov切换系统; 随机系统; 时滞系统; 输入-状态稳定性; Lyapunov-Razumikhin函数; 不定多重Lyapunov函数; 时变驻留时间条件

引用格式: 刘乾, 何勇, 宁重阳. 时滞半Markov切换随机系统输入-状态稳定性分析的时变驻留时间条件方法. 控制理论与应用, 2023, 40(2): 322 – 330

DOI: 10.7641/CTA.2022.11309

Approach of time-varying dwell time condition for the input-to-state stability analysis of the time-delayed stochastic systems with semi-Markovian switching

LIU Qian^{1,2}, He Yong^{1,2†}, NING Chong-yang³

(1. School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan Hubei 430074, China;
2. Hubei Key Laboratory of Advanced Control and Intelligent Automation for Complex Systems, Wuhan Hubei 430074, China;
3. School of Computer and Information Engineering, Central South University of Forestry and Technology,
Changsha Hunan 410004, China)

Abstract: The time-delayed stochastic systems with semi-Markovian switching are investigate in this paper. We establish an indefinite multiple Lyapunov-Razumikhin functions method based on a time-varying dwell time condition, and get input-to-state stability and integral input-to-state stability conditions. On the one hand, by introducing the indefinite multiple Lyapunov functions, we do not require that derivatives of Lyapunov-Razumikhin functions always remain negative, which eases stability requirements of subsystems, even allows unstable subsystems to exist. On the other hand, a time-varying dwell time condition is proposed to illustrate the connection between the switch counts and the dwell time. By this condition, we propose a time-varying functions to estimate the switch counts of the semi-Markovian switching signal, which mediately loosens the restrictions of multiple Lyapunov functions. Finally, a numerical example is presented to show the effectiveness of our results.

Key words: semi-markovian switched systems; stochastic systems; time-delayed systems; input-to-state stability; Lyapunov-Razumikhin functions; indefinite multiple Lyapunov functions; time-varying dwell time condition

Citation: LIU Qian, HE Yong, NING Chongyang. Approach of time-varying dwell time condition for the input-to-state stability analysis of the time-delayed stochastic systems with semi-Markovian switching. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(2): 322 – 330

1 引言

实际系统如电力系统、通信系统、飞控系统、社会经济系统等往往存在着外部随机扰动、随机结构突变、时滞等现象. 为了描述实际系统运行过程中所受到的随机扰动, Itô通过数学方法将布朗运动与确定性的运动增量结合, 确定了随机微分方程的概念^[1]; 有学者提出Markov切换系统来描述结构随机突变的系统^[2]; 时滞Markov切换随机系统同时具有以上3种现象, 因此受到广泛的关注及研究^[3-5].

计算机系统的故障现象具有Markov性, 但其故障持续时间与正常持续时间是随机的且时变的, 模态驻留时间非时变的Markov链并不适用, 故有学者采取了模态驻留时间服从任意分布的半Markov过程进行建模^[6]. 除计算机科学之外, 半Markov过程被广泛应用于其他学科领域研究, 如流体力学、生物信息学、经济金融学等^[7-8]. 在控制理论领域中, 半Markov切换系统同样受到了广泛的关注^[9-15].

输入-状态稳定性(input-to-state stability, ISS)是非线性系统分析及控制中的一种重要的概念^[16-18], 一般采用Lyapunov-Razumikhin(L-R)函数方法判别时滞非线性系统是否是ISS, 但L-R函数方法是充分条件, 其导数的负定性条件限制了Lyapunov函数的选取, 使得稳定性分析变得保守. 为了使L-R函数方法有效地运用于系统分析中, 放松Lyapunov函数选取条件成为了诸多学者研究的目标^[19]. 近些年, 有文献提出一种不需要Lyapunov函数导数处处负定的不定Lyapunov函数方法, 并应于时滞系统^[20-22]、随机系统^[23]、切换系统^[24-25]等的分析及控制. Zhou等人^[22-23]针对具有时滞的时变系统, 提出了更具一般性的基于一致渐近稳定(uniformly asymptotically stable, UAS)函数的不定Lyapunov函数方法.

Branicky^[26]提出了多重Lyapunov函数方法(multiple Lyapunov functions, MLFs), 针对每个子系统建立不同的Lyapunov函数, 这为确定性切换系统稳定性分析开辟了新的视角. 同样的, MLFs被广泛应用于半Markov切换系统这样的随机切换系统稳定性分析及控制器设计^[12-15, 27-30]. 更重要的是, 凭借着多个Lyapunov函数的灵活性以及不可约半Markov链的遍历性, 这些文献放松了对于多重Lyapunov函数导数全部负定的约束. 遗憾的是, 它们只能处理时不变的MLFs导数, 不适用于时变切换系统. 为此, Long^[31]将MLFs与时变不定Lyapunov函数结合, 建立了针对时变切换系统的不定多重Lyapunov函数(indefinite MLFs, iMLFs)方法. 在此基础上, 文献[32]利用Markov过程模态驻留时间指数分布特性提出了一种时变切换次数估计函数, 放松了切换次数估计给iMLFs带来的限制, 并建立了Markov切换随机系统稳定性分析方法.

对于时变半Markov切换系统而言, 虽然不可约半

Markov过程与iMLFs组合能够有效地处理时变子系统局部及全局不稳定的问题, 但实际系统的参数突变可能不是不可约半Markov过程. 此外, 文献[32]提出的时变切换次数估计函数能够放松iMLFs的一些限制, 但仅限于驻留时间服从指数分布的Markov过程, 半Markov过程中模态驻留时间的分布却是任意的. 对此, 本文针对时滞半Markov切换随机系统提出一种时变驻留时间条件来估计驻留时间服从任意分布情形下的切换次数, 在不要求半Markov切换过程不可约的前提下, 将L-R函数与iMLFs方法结合, 建立一种基于时变驻留时间条件的随机输入-状态稳定性和随机积分输入-状态稳定性的不定L-R函数(IMLRFs)方法.

注1 本文采用以下符号: $\mathbb{R}^n$ 代表 n 维欧氏空间, $|x|$ 代表欧氏范数; $\mathbb{R}_{t_0}^+ := [t_0, +\infty)$; $\mathbb{N}^+ := \{1, 2, \dots\}$; $\mathbb{N} := 0 \cup \mathbb{N}^+$; $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq t_0}, P)$ 代表完备的概率空间, Ω 是样本空间, $\mathcal{F}$ 是 σ 代数, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq t_0}$ 是域流, $P\{\cdot\}$ 是概率测度, $E\{\cdot\}$ 代表期望; 给定函数 $f: \mathbb{R}_{t_0}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\|f\|_{[t_0, t]} := \sup_{s \in [t_0, t]} |f(s)|$, $\|f\|_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \|f\|_{[t_0, t]}$; $\mathcal{C}^{1,2}$ 代表首个变量一阶可微且另一变量二阶可微函数的函数族; $\mathcal{PC}$ 代表分段连续函数族; 函数 $\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是 $\mathcal{K}$ 类函数当且仅当 α 是严格增的连续函数, 记作 $\alpha \in \mathcal{K}$. 如果 $\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha(s) = \infty$, 则 α 是 $\mathcal{K}_\infty$ 函数记作 $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$. $\beta(s, t): \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ 是 $\mathcal{KL}$ 函数, 如果固定 t 时 $\beta \in \mathcal{K}$, 固定 s 时 $\beta(s, t)$ 关于 t 递减, $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s, t) = 0$.

2 预备知识

考虑如下半Markov切换随机时滞系统:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x_t, u(t), r(t)) dt + \\ \quad g(t, x_t, u(t), r(t)) dB_t, \\ x(t_0) = \xi(\theta), \theta \in [t_0 - \Delta, t_0], t_0 \geq \Delta, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态, $u(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}_{t_0}^+; \mathbb{R}^n)$ 是可测的本征局部有界的外部输入, Δ 为时滞上界, 时滞相关的状态记作 $x_t = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\Delta, 0]$. 系统的初值 $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ 是确定性函数. B_t 是定义在完备概率测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq t_0})$ 上的 n 维标准布朗运动. 定义子系统模态 $S = \{1, 2, \dots, M\}$, 其中 $M \in \mathbb{N}$. 切换信号 $r(t) \in S$ 是右连续且模态有限的半Markov过程, 对应的切换时刻 $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$. 对任意 $i \in S$ 函数 $f(t, x, i)$ 和 $g(t, x, i)$ 均为Borel可测且满足局部Lipshitz条件, 并有 $f(0, 0, i) = g(0, 0, i) \equiv 0$.

定义1^[30] 半Markov过程 $r(t)$ 由嵌入Markov过程和驻留时间组成的: 当 $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$ 时, 嵌入Markov过程为 $r(t) = r_k$ 和驻留时间为 $s(k)$, 两者相互独立. 离散时间Markov过程 $r(t) = r_k$ 模态 i 到 j 的转移概率为 $P\{r_k = j | r_{k-1} = i\} = p_{ij}$, 模态转移概率矩阵记为 $P = [p_{ij}]_{M \times M}$. 驻留时间 $s(k)$ 的分布函数为

$$F_{ij}(t) = P\{s(k) \leq t | r_k = j, r_{k-1} = i\},$$

$$i, j \in S, t \geq t_0.$$

r_k 和 $s(k)$ 一同满足无记忆性:

$$P\{r_k = i, s(k) \leq t | r_{k-1}, s(k-1), \dots, r_1, s(1)\} =$$

$$P\{r_k = i, s(k) \leq t | r_{k-1}\}, i \in S, t \geq t_0.$$

设 $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ 时半Markov过程 $r(t) = i$, 那么模态 i 的驻留时间记作 $s_i(k) = \tau_{k+1} - \tau_k$. 假设 $s_i(k)$ 是关于 k 相互独立且同分布的随机变量, $E\{s_i(k)\} = m_i$. 总驻留时间 $T_i(t) = \sum_{k=1}^{N_i(t, t_0)} s_i(k)$, 其中 $N_i(t, t_0)$ 代表 t_0 到 t 时间段内到达模态 i 的次数. 如果嵌入Markov过程是不可约的, 那么半Markov切换信号是不可约的.

引理 1^[30] 如果半Markov切换信号是不可约的, 则 r_k 有平稳分布 $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_M]$, $r(t)$ 存在平稳分布 $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_M]$,

$$\pi_i = \frac{\bar{\pi}_i m_i}{\sum_{j \in S} \bar{\pi}_j m_j}, i \in S,$$

并有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T_i(t)}{t - t_0} = \pi_i, \text{ a.s.}$$

系统状态 $x(t)$ 满足以下定义, 则可称系统(1)是随机输入-状态稳定或是随机积分输入-状态稳定的.

定义 2^[33] 如果对任意常数 $\epsilon \in (0, 1)$ 存在函数 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ 满足

$$P\{|x(t)| < \beta(\|\xi\|, t - t_0) + \gamma(\|u\|_{[t_0, t]})\} \geq 1 - \epsilon, \\ \forall t \in \mathbb{R}_t^+, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

系统(1)是随机输入-状态稳定的(stochastically input-to-state stable, SISS). 进一步, 如果存在函数 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$ 满足

$$P\{|x(t)| < \beta(\|\xi\|, t - t_0) + \\ \gamma_1(\int_{t_0}^t \gamma_2(\|u(s)\|)ds)\} \geq 1 - \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}_t^+, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

系统(1)是随机积分输入-状态稳定的(stochastically integral input-to-state stable, SiISS).

本文针对随机系统稳定性研究需引入无穷小算子和Itô公式^[4]. 设 $V \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}^+)$, 定义如下无穷小算子:

$$\mathcal{L}V(t, x, i) = V_t(t, x, i) + V_x(t, x, i)f(t, x, i, u) + \\ \frac{1}{2} \text{trace}[g^T(t, x, i, u)V_{xx}(t, x, i)g(t, x, i, u)], \\ \mathcal{H}V(t, x, i) = V_x(t, x, i)g(t, x, i, u), i \in S,$$

其中:

$$V_t(t, x, i) = \frac{\partial V(t, x, i)}{\partial t},$$

$$V_x(t, x, i) = [\frac{\partial V(t, x, i)}{\partial x_k}]_{1 \times n},$$

$$V_{xx}(t, x, i) = [\frac{\partial^2 V(t, x, i)}{\partial x_k \partial x_l}]_{n \times n}.$$

由文献[4]中的Itô公式可得

$$dV(t, x, i) = \mathcal{L}V(t, x, i)dt + \mathcal{H}V(t, x, i)dB_t. \quad (4)$$

不定Lyapunov函数中的不定是指在Lyapunov函数导数估计不等式中加入值域为实数的时变标量函数, 即

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq \lambda(t)V(t, x(t)), \lambda \in \mathbb{R},$$

其中 $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ 容许了Lyapunov函数出现局部能量增现象. 为了保证Lyapunov函数能量是整体下降的, 需要引入一致渐近稳定UAS函数.

定义 3^[22-23] 函数 $\lambda \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ 满足以下条件任意一个:

1) 存在 $\epsilon > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得

$$\int_{t_0}^t \lambda(s)ds \leq -\epsilon(t - t_0) + \delta;$$

2) 对任意给定的常数 $c > 0$, 存在 $T^*(c) > 0$ 使得

$$\int_t^{t+T} \lambda(s)ds \leq -c, \\ \int_t^{t+\theta} \lambda(s)ds \leq d, \theta \in [0, T],$$

对任意 $T^*(c) \leq T < \infty$ 都成立, 其中 $d \in \mathbb{R}$;

3) 如果 $\lambda(t)$ 是周期为 T 的周期函数, 则只需要存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$\int_t^{t+T} \lambda(s)ds \leq -\epsilon,$$

那么函数 $\lambda(t)$ 被称之为UAS函数.

对于任意给定的 $T > 0$, UAS函数 $\lambda(t)$ 的过冲定义如下:

$$\eta_\lambda(T) = \sup_{t \geq t_0} \{ \max_{\theta \in [0, T]} \{ \int_t^{t+\theta} \lambda(s)ds \} \}.$$

此外, 建立iMLRFs还需要类Halanay不等式.

引理 2^[34-35] 设 $T^* > 0$, 对于局部有界函数 $v \in \mathcal{PC}([t_0 - T^*, t_0]; \mathbb{R}^+)$ 以及 $d \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}_t^+; \mathbb{R}^+)$, 假设存在常数 $\bar{\rho} \in (0, 1)$ 使得

$$v(t) \leq \bar{\rho} \|v\|_{[t-T^*, t]} + d(t), \forall t \geq t_0,$$

那么有下列不等式成立:

$$v(t) \leq \|v\|_{[t_0-T^*, t_0]} e^{\frac{\ln \bar{\rho}}{T^*} t} + \frac{1}{1 - \bar{\rho}} \|d\|_{[t_0, t]}.$$

定义 4 令 $N(b, a)$ 为切换信号 $r(t)$ 在时间段 $[a, b]$ 内发生的切换次数, $s_{r(t)}$ 为切换信号 $r(t)$ 的驻留时

间, 切换次数和驻留时间满足

$$N(b, a) \leq \int_a^b \frac{dh}{s_{r(h)}}. \quad (5)$$

注2 定义4描述了切换次数与驻留时间的时变关系. 不等式(5)未约束驻留时间, 因而 $N(b, a)$ 可以随时间变化, 故称之为时变驻留时间条件.

引理3 当切换信号为半Markov过程时, 有如下的切换次数的估计:

$$E\{N(b, a)\} \leq \int_a^b E\left\{\frac{dh}{m_{r(h)}}\right\}.$$

证 由Fubini-Tonelli定理^[3], 可得

$$\int_a^b E\left\{\frac{dh}{m_{r(h)}}\right\} = E\left\{\int_a^b \frac{dh}{E\{s_{r(h)}|r(h)\}}\right\}.$$

根据Jensen不等式有 $1/E\{s_i\} \leq E\{1/s_i\}$, 故可得

$$E\left\{\int_a^b \frac{dh}{E\{s_{r(h)}|r(h)\}}\right\} \leq E\left\{\int_a^b E\left\{\frac{dh}{s_{r(h)}} \middle| r(h)\right\}\right\} = E\left\{\int_a^b \frac{dh}{s_{r(h)}}\right\}.$$

最终可得 $E\{N(b, a)\} \leq E\left\{\int_a^b \frac{dh}{s_{r(h)}}\right\}$, 满足时变驻留时间条件. 证毕.

注3 在未要求半Markov切换信号是不可约的前提下, 引理3基于定义4给出一种时变的切换次数估计.

基于以上知识, 下文将给出时滞半Markov切换随机系统以及时滞Markov切换随机系统SISS和SiSS判据.

3 主要结论

3.1 时滞半Markov切换随机系统SISS判据

定理1 存在函数 $V \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}^+)$, 函数 $\lambda \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{K}_\infty$, 以及正常数 $\mu \geq 1, \bar{\rho} \in (0, 1)$, 满足

- 1) $\alpha_1(|x(t)|) \leq V(t, x(t), i) \leq \alpha_2(|x(t)|)$;
- 2) $\mathcal{L}V(t, x(t), i) \leq \lambda(t)V(t, x(t), i)$, 当 $V(t, x(t), i) > \max\{\rho_1(V(t+\theta, x(t+\theta), r(t+\theta))), \rho_2(|u(t)|)\}$, $\theta \in [-\Delta, 0]$;

- 3) $V(t, x(t), i) \leq \mu V(t, x(t), j)$;

- 4) $\lambda_0(t) = \lambda(t) + E\left\{\frac{\ln \mu}{m_{r(t)}}\right\}$ 是UAS函数, 且满足

$\rho_1(s) \leq \frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}} s$, 其中 $\eta_{\lambda_0} = \exp(\varphi_{\lambda_0})$, 那么半Markov切换随机时滞系统是随机输入-状态稳定的(SISS).

证 为了证明简便, 令 $v_{r(t)}(t) = V(t, x(t), r(t))$. 定义增益裕度集

$$\mathcal{B} = \{v_{r(t)}(t) \leq \max\{\rho_1(v_{r(t+\theta)}(t+\theta), \rho_2(|u(t)|))\},$$

$\theta \in [-\Delta, 0]$, 以及时停序列

$$\begin{cases} T_0 = t_0, \\ T_1 = \inf\{t > T_0 : v_{r(t)}(t) \in \mathcal{B}\} \cup \{\infty\}, \\ T_{2j} = \inf\{t > T_{2j-1} : v_{r(t)}(t) \in \mathcal{B}^c\} \cup \{\infty\}, \\ T_{2j+1} = \inf\{t > T_{2j} : v_{r(t)}(t) \in \mathcal{B}\} \cup \{\infty\}, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\mathcal{B}^c$ 是集合 $\mathcal{B}$ 的补集, $j = 1, 2, \dots$.

分别考虑初值的两种情形: $v_{r(t_0)}(t_0) \in \mathcal{B}^c$ 以及 $v_{r(t_0)}(t_0) \in \mathcal{B}$.

情形1 $v_{r(t_0)}(t_0) \in \mathcal{B}^c$, 即存在 $T_1 > t_0$, 需要分为 $[T_0, T_1]$ 和 $[T_1, +\infty)$ 时间段去分析 $v_{r(t)}(t)$.

首先对 $t \in [T_0, T_1]$, 有

$$v_{r(t)}(t) > \max(\rho_1(v_{r(t+\theta)}(t+\theta)), \rho_2(|u(t)|)),$$

其中 $\theta \in [-\Delta, 0]$, 根据条件2)可得

$$\mathcal{L}V(t, x(t), i) \leq \lambda(t)V(t, x(t), i).$$

当 $T_0 \leq \tau_k < t \leq T_1$, $r(t) = r(\tau_k) = i_k \in S$, 由Itô公式可得

$$v_{i_k}(t) \leq v_{i_k}(\tau_k) e^{\int_{\tau_k}^t \lambda(s) ds} + \int_{\tau_k}^t \mathcal{H}v_{i_k}(s) e^{\int_s^t \lambda(h) dh} dB_s. \quad (7)$$

根据条件3)有

$$v_{i_k}(t) \leq \mu v_{i_{k-1}}(\tau_{k-1}) e^{\int_{\tau_{k-1}}^t \lambda(s) ds} + \mu \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \mathcal{H}v_{i_{k-1}}(s) e^{\int_s^{\tau_k} \lambda(h) dh} dB_s. \quad (8)$$

对上式(8)进行迭代并代入式(7)中得

$$v_{i_k}(t) \leq v_{r_0}(t_0) \mu^k e^{\int_{t_0}^t \lambda(s) ds} + \sum_{l=0}^{k-1} \mu^{k-l} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathcal{H}v_{i_l}(s) e^{\int_s^{\tau_{l+1}} \lambda(h) dh} dB_s + \int_{\tau_k}^t \mathcal{H}v_{i_k}(s) e^{\int_s^t \lambda(h) dh} dB_s.$$

令 $k = N(t, t_0)$, $\forall t \in [T_0, T_1]$,

$$v_{r(t)}(t) \leq \mu^{N(t, t_0)} v_{r_0}(t_0) e^{\int_{t_0}^t \lambda(s) ds} + \int_{t_0}^t \mu^{N(t, s)} e^{\int_s^t \lambda(h) dh} \mathcal{H}v_{r(s)}(s) dB_s.$$

两边同期望, $\forall t \in [t_0, T_1]$ 有

$$E\{v_{r(t)}(t)\} \leq v_{r_0}(t_0) E\{\mu^{N(t, t_0)} e^{\int_{t_0}^t \lambda(s) ds}\}. \quad (9)$$

接下来考虑 $t \in [T_1, +\infty)$. 对 $t \in [T_{2j-1}, T_{2j}]$, $v_{r(t)}(t) \in \mathcal{B}$, 有

$$v_{r(t)} \leq \frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}} \sup_{\theta \in [-\Delta, 0]} \{v_{r(t+\theta)}(t+\theta)\} + \rho_2(|u(t)|). \quad (10)$$

对 $t \in [T_{2j}, T_{2j+1}]$, $v_{r(t)}(t) \in \mathcal{B}^c$, 有

$$\begin{cases} \mathcal{L}v_{r(t)}(t) \leq \lambda(t)v_{r(t)}(t), & t \in [T_{2j}, T_{2j+1}] - \mathcal{T}, \\ v_{r(t)}(t) < \mu v_{r(t)}(t^-), & t \in [T_{2j}, T_{2j+1}] \cap \mathcal{T}, \\ v_{r(T_{2j})} \leq \frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}} \sup_{\theta \in [-\Delta, 0]} \{v_{r(t+\theta)}(t+\theta)\} + \rho_2(|u(t)|). \end{cases}$$

对其求解可得

$$\begin{aligned} E\{v_{r(t)}(t)\} &\leq E\{v_{r(T_{2j})}(T_{2j})\mu^{N(t, T_{2j})}e^{\int_{T_{2j}}^t \lambda(s)ds}\} \leq \\ &\frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}} \sup_{\theta \in [-\Delta, 0]} E\{v_{r(t+\theta)}(t+\theta)\mu^{N(t, T_{2j})}e^{\int_{T_{2j}}^t \lambda(s)ds}\} + \\ &\rho_2(|u(t)|). \end{aligned} \quad (11)$$

因而对 $t \in [T_1, \infty)$, 由式(10)–(11)可得

$$\begin{aligned} E\{v_{r(t)}(t)\} &\leq \\ &\frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}} \sup_{\theta \in [-\Delta, 0]} E\{v_{r(t+\theta)}(t+\theta)\mu^{N(t, T_1)}e^{\int_{T_1}^t \lambda(s)ds}\} + \\ &\rho_2(|u(t)|). \end{aligned} \quad (12)$$

根据引理3有

$$E\{\mu^{N(t, t_0)}e^{\int_{t_0}^t \lambda(s)ds}\} \leq e^{\int_{t_0}^t (\lambda(s) + E\{\frac{\ln \mu}{m_{r(s)}}\})ds}.$$

记 $\lambda_0(t) = \lambda(t) + E\{\frac{\ln \mu}{m_{r(t)}}\}$, 根据UAS函数的定义, 存在过冲 φ_{λ_0} 满足

$$1 < \exp(\int_{t_0}^t \lambda_0(s)ds) \leq \exp(\varphi_{\lambda_0}) = \eta_{\lambda_0}. \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)中并由引理2得

$$\begin{aligned} E\{v_{r(t)}(t)\} &\leq E\{\|v_{r(t)}(t)\|_{[T_1-\Delta, T_1]}e^{\frac{\ln \bar{\rho}}{\Delta}(t-T_1)} + \\ &\frac{1}{1-\bar{\rho}}\rho_2(\|u(t)\|_{[T_1, t]})\}. \end{aligned} \quad (14)$$

当 $t \in [t_0, T_1]$ 有式(9)成立, $t \in [T_1, +\infty)$ 有式(14)成立, 两者相结合得

$$\begin{aligned} E\{v_{r(t)}(t)\} &\leq \|v_{r_0}(t_0)\|e^{\bar{\varepsilon}(t-t_0)} + \\ &\frac{1}{1-\bar{\rho}}\rho_2(\|u(t)\|_{[t_0, t]}), \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\bar{\varepsilon} = (-\varepsilon) \vee \frac{\bar{\rho}}{\Delta} < 0$.

情形2 $v_{r_0}(t_0) \in \mathcal{B}$, 有 $P\{T_1 = T_0\} = 1$, 即式(14)成立, 因此有

$$\begin{aligned} E\{v_{r(t)}(t)\} &\leq \|v_{r(t)}(t)\|_{[t_0-\Delta, t_0]}e^{\frac{\ln \bar{\rho}}{\Delta}(t-t_0)} + \\ &\frac{1}{1-\bar{\rho}}\rho_2(\|u(t)\|_{[r_0, t]}). \end{aligned} \quad (16)$$

综合情形1的式(15)和情形2的式(16),

$$\begin{aligned} E\{v_{r(t)}(t)\} &\leq \|v_{r_0}(t_0)\|e^{\bar{\varepsilon}(t-t_0)} + \\ &\frac{1}{1-\bar{\rho}}\rho_2(\|u(t)\|_{[t_0, t]}), \end{aligned}$$

其中 $\bar{\varepsilon} = (-\varepsilon) \vee \frac{\bar{\rho}}{\Delta} < 0$. 由条件1)以及 $\mathcal{K}$ 类函数的特性

$$\alpha_1^{-1}(s) \in \mathcal{K}_\infty, \alpha_1(s_1 + s_2) \leq 2\alpha_1(s_1) + \alpha_1(s_2) \quad (17)$$

可得

$$\begin{aligned} E\{|x(t)|\} &\leq \alpha_1^{-1}(2\alpha_2(\|\xi\|e^{\bar{\varepsilon}(t-t_0)})) + \\ &\frac{2}{1-\bar{\rho}}\alpha_1^{-1}(\rho_2(\|u(t)\|_{[t_0, t]})), \end{aligned}$$

记 $\gamma(s) = 2/(1-\bar{\rho})\alpha_1^{-1}(\rho_2(s))$, 应用Markov不等式^[3], 任意选取 $\epsilon \in (0, 1)$ 可得

$$\begin{aligned} P\{|x(t)| < \bar{\beta}(\|\xi\|, t-t_0) + \gamma(\|u\|_{[t_0, t]})\} &\geq \\ 1 - \frac{E\{|x(t)|\}}{\bar{\beta}(\|\xi\|, t-t_0) + \bar{\gamma}(\|u\|_{[t_0, t]})} &= 1 - \epsilon, \end{aligned}$$

其中: $\bar{\beta}(s, t) = \alpha_1^{-1}(2\alpha_2(s)e^{\bar{\varepsilon}t})/\epsilon$, $\bar{\gamma}(s) = \gamma(s)/\epsilon$, 根据定义2系统(1)是SISS. 证毕.

注4 由于系统1为随机系统, 其状态 $x(t)$ 是随机过程, 因此采用随机增益裕度分析方法. 定理1中 $\lambda(t)$ 的值域为实数, 也就意味着子系统的无穷小算子在某些时间段内为正, 甚至允许不稳定子系统的存在. 时变驻留时间条件与UAS函数的结合, 放松了Lyapunov函数的限制, 也去除了半Markov过程不可约的假设.

下文将基于iMLRFs方法建立系统SiSS条件.

定理2 存在函数 $V \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}^+)$, 函数 $\lambda \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2, \rho, \chi \in \mathcal{K}_\infty$, 以及正常数 $\mu \geq 1, \bar{\rho} \in (0, 1)$, 满足

- 1) $\alpha_1(|x(t)|) \leq V(t, x(t), i) \leq \alpha_2(|x(t)|)$;
- 2) 当 $V(t, x(t), i) > \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} \{\rho(V(t+\theta, x(t+\theta), r(t+\theta)))\}$, $\theta \in [-\Delta, 0]$, 有

$$\mathcal{L}V(t, x(t), i) \leq \lambda(t)V(t, x(t), i) + \chi(|u(t)|);$$

- 3) $V(t, x(t), i) \leq \mu V(t, x(t), j)$;

- 4) $\lambda_0(t) = \lambda(t) + E\{\frac{\ln \mu}{m_{r(t)}}\}$ 是UAS函数, 且满足

$\rho(s) \leq \frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}}$, 其中 $\eta_{\lambda_0} = \exp(\varphi_{\lambda_0})$, 那么半Markov切换随机时滞系统是积分输入–状态稳定的(SiISS).

证 设 $v_{r(t)}(t) = V(t, x(t), r(t))$, $\mathcal{B} = \{v_{r(t)}(t) \leq \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} \{\rho_1(v_{r(t+\theta)}(t+\theta))\}\}$, 定义时停序列(6).

考虑以下两种情形: $v_{r_0}(t_0) \in \mathcal{B}^c$ 和 $v_{r_0}(t_0) \in \mathcal{B}$.

情形1 $v_{r_0}(t_0) \in \mathcal{B}^c$, 即存在 $T_1 > t_0$, 因此需要考虑 $t \in [t_0, T_1]$ 和 $t \in [T_1, +\infty)$ 两种情形.

根据条件2)–3), 当 $t \in [t_0, T_1]$ 有

$$\begin{aligned} E\{v_{r(t)}(t)\} &\leq E\{v_{r_0}(t_0)\mu^{N(t, t_0)}e^{\int_{t_0}^t \lambda(s)ds}\} + \\ &\int_{t_0}^t E\{\mu^{N(t, s)}e^{\int_s^t \lambda(h)dh}\}\chi(|u(s)|)ds. \end{aligned}$$

根据Jensen不等式和引理3可知

$$\mathbb{E}\{\mu^{N(t,t_0)} e^{\int_{t_0}^t \lambda(s) ds}\} \leq e^{\int_{t_0}^t (\lambda(s) + \mathbb{E}\{\frac{\ln \mu}{m_{r(t)}}\}) ds}.$$

记 $\lambda_0(t) = \lambda(t) + \mathbb{E}\{\frac{\ln \mu}{m_{r(t)}}\}$, 因此可得

$$\mathbb{E}\{v_{r(t)}(t)\} \leq v_{r_0}(t_0) e^{\int_{t_0}^t \lambda_0(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t \lambda_0(h) dh} \chi(|u(s)|) ds. \quad (18)$$

接下来考虑 $t \in [T_1, +\infty)$ 时的情况. 当 $t \in [T_{2j-1}, T_{2j}]$, $j = 1, 2, \dots$, 有

$$v_{r(t)}(t) \leq \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} \{\rho(v_{r(t+\theta)}(t+\theta))\} \leq \frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}} \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} \{v_{r(t+\theta)}(t+\theta)\}. \quad (19)$$

当 $t \in [T_{2j}, T_{2j+1}]$, 根据条件2)–3)可建立如下不等式:

$$\begin{cases} \mathcal{L}v_{r(t)}(t) \leq \lambda(t)v_{r(t)}(t) + \chi(|u(t)|), & t \in [T_{2j}, T_{2j+1}] - \mathcal{T}, \\ v_{r(t)}(t) \leq \mu v_{r(t-)}(t-), & t \in [T_{2j}, T_{2j+1}] \cap \mathcal{T}, \\ v_{r(T_{2j})}(T_{2j}) \leq \frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}} \|v\|_{[T_{2j}-\Delta, T_{2j}]}. \end{cases}$$

求解可得

$$\mathbb{E}\{v_{r(t)}(t)\} \leq \frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}} \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} \mathbb{E}\{v_{r(T_{2j}+\theta)}(T_{2j}+\theta)\} e^{\int_{T_{2j}}^t \lambda_0(s) ds} + \int_{T_{2j}}^t e^{\int_s^t \lambda_0(h) dh} \chi(|u(s)|) ds, \quad (20)$$

其中 $\lambda_0(t) = \lambda(t) + \mathbb{E}\{\frac{\ln \mu}{m_{r(t)}}\}$.

将式(19)与式(20)结合, 可知当 $t \in [T_1, \infty)$ 时, 有

$$\mathbb{E}\{v_{r(t)}(t)\} \leq \frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}} \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} \mathbb{E}\{v_{r(t+\theta)}(t+\theta)\} e^{\int_{T_1}^t \lambda_0(s) ds} + \int_{T_1}^t e^{\int_s^t \lambda_0(h) dh} \chi(|u(s)|) ds, \quad (21)$$

由式(18)和式(22), 可知对 $\forall t \geq t_0$ 有

$$\mathbb{E}\{v_{r(t)}(t)\} \leq \frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}} \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} \mathbb{E}\{v_{r(t+\theta)}(t+\theta)\} e^{\int_{t_0}^t \lambda_0(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t \lambda_0(h) dh} \chi(|u(s)|) ds, \quad (22)$$

根据条件4), UAS函数 $\lambda_0(t)$ 存在过冲 $\eta_{\lambda_0} > 1$ 使得下式成立:

$$\mathbb{E}\{v_{r(t)}(t)\} \leq \bar{\rho} \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} \mathbb{E}\{v_{r(t+\theta)}(t+\theta)\} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t \lambda_0(h) dh} \chi(|u(s)|) ds,$$

由引理2可得

$$\mathbb{E}\{v_{r(t)}(t)\} \leq \|v\|_{[t_0-\Delta, t_0]} e^{\frac{\ln \bar{\rho}}{\Delta}(t-t_0)} + \frac{\eta_{\lambda_0}}{1-\bar{\rho}} \int_{t_0}^t \chi(|u(s)|) ds. \quad (23)$$

情形2 $v_{r(t)}(t) \in \mathcal{B}$ 可推得 $\mathbb{P}\{T_1 = T_0\} = 1$, 因此有式(22)成立, 根据引理2同样可得到式(23).

由条件1)以及 $\mathcal{K}$ 类函数的特性(17)可对式(23)进行处理得到

$$\mathbb{E}\{|x(t)|\} \leq 2\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|\xi\|) e^{\frac{\ln \bar{\rho}}{\Delta}(t-t_0)}) + \frac{2\eta_{\lambda_0}}{1-\bar{\rho}} \alpha_1^{-1}(\int_{t_0}^t \chi(|u(s)|) ds).$$

应用Markov不等式^[3], 可得

$$\mathbb{P}\{|x(t)| < \bar{\beta}(\|\xi\|, t-t_0) + \gamma_1(\int_{t_0}^t \gamma_2(|u(s)|) ds)\} \geq 1 - \frac{\mathbb{E}\{|x(t)|\}}{\bar{\beta}(\|\xi\|, t-t_0) + \gamma_1(\int_{t_0}^t \gamma_2(|u(s)|) ds)} = 1 - \epsilon,$$

其中: $\bar{\beta}(s, t) = 2\alpha_1^{-1}(\alpha_2(s) e^{\frac{\ln \bar{\rho}}{\Delta}t})/\epsilon$, $\gamma_2 = \chi(s)$, $\gamma_1(s) = 2\eta_{\lambda_0} \alpha_1^{-1}(s)/((1-\bar{\rho})\epsilon)$, 其中 $\ln \bar{\rho} < 0$. 根据定义2可知, 系统是SiISS. 证毕.

注5 $m_{r(t)}$ 作为分段连续函数与切换信号 $r(t)$ 相关, 因而定理1和定理2中的条件4)较难验证, 下面将给出替代条件.

引理4 如果满足以下任一条件:

U1) $\lambda(t) + \frac{\ln \mu}{\min_{i \in S}\{m_i\}}$ 是一个UAS函数,

U2) $r(t)$ 不可约, $\lambda(t) + \sum_{i \in S} \frac{\pi_i \ln \mu}{m_i}$ 是UAS函数, 那么 $\lambda_0(t)$ 是UAS函数.

证 因为 $m_{r(t)} \geq \min_{i \in S}\{m_i\}$, 故有

$$\int_{t_0}^t \lambda_0(t) ds \leq \int_{t_0}^t (\lambda(s) + \frac{\ln \mu}{\min_{i \in S}\{m_i\}}) ds \leq -\varepsilon(t-t_0) + \delta,$$

根据UAS函数定义, $\lambda_0(t)$ 是UAS函数.

半Markov过程 $r(t)$ 不可约时, 由引理1, 对 $\forall \varepsilon_1 > 0$, 存在 $T(\varepsilon_1) > 0$, 使得 $t \geq T(\varepsilon_1)$ 有

$$T_i(t) < (\pi_i + \varepsilon_1)(t-t_0), \quad \forall i \in S,$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 可得

$$\int_{t_0}^t \frac{\ln \mu}{m_{r(s)}} ds = \sum_{i \in S} \frac{T_i(t) \ln \mu}{m_i} I_{\{r(t)=i\}} \leq \sum_{i \in S} \frac{\pi_i \ln \mu}{m_i} (t-t_0).$$

因此

$$\int_{t_0}^t \lambda_0(s) ds \leq \int_{t_0}^t (\lambda(s) + \frac{\pi_i \ln \mu}{m_i}) ds \leq -\varepsilon(t - t_0) + \delta,$$

$\lambda_0(t)$ 是UAS函数. 证毕.

基于引理4可以得到如下稳定性推论.

推论 1 存在函数 $V \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}^+)$, 函数 $\lambda \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{K}_\infty$, 以及正常数 $\mu \geq 1$, $\bar{\rho} \in (0, 1)$, 满足定理1中的条件1)–3)以及引理4中的U1)或U2), 系统是SISS.

推论 2 存在函数 $V \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}^+)$, 函数 $\lambda \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2, \rho, \chi \in \mathcal{K}_\infty$, 以及正常数 $\mu \geq 1$, $\bar{\rho} \in (0, 1)$, 满足定理2中的条件1)–3)以及引理4中的U1)或U2), 系统是SiSS.

3.2 时滞Markov切换随机系统SISS判据

考虑如(1)式所示的时滞Markov切换随机系统, 其切换信号的定义如下.

定义 5^[30] 设 $r(t) \in S$ 为右连续Markov链, 其模态转移矩阵为 $Q = [q_{ij}]_{M \times M}$, 模态转移概率如下:

$$P\{r(t+h)=j|r(t)=i\} = \begin{cases} q_{ij}h + o(h), & i \neq j, \\ 1 + q_{ii}h + o(h), & i = j, \end{cases}$$

其中: $h > 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$, 模态 i 到 j 的转移速率为 $q_{ij} > 0$, $i \neq j$, 且有 $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$.

值得注意的是, 对任意 k , 驻留时间 $s_i(k)$ 是独立同分布于参数为 q_i 的指数分布, 即 $E\{s_i(k)\} = 1/q_i$, 其中 $q_i = |q_{ii}|$, $i \in S$.

Markov链是半Markov链的一种特殊形式, 当驻留时间服从指数分布, 半Markov链退化为Markov链. 基于定理1和定理2可推得滞Markov切换随机系统的SISS以及SiSS判据.

推论 3 存在函数 $V \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}^+)$, 函数 $\lambda \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{K}_\infty$, 以及正常数 $\mu \geq 1$, $\bar{\rho} \in (0, 1)$, 满足定理1(定理2)中的条件1)–3)以及条件4): $\lambda_0(t) = \lambda(t) + E\{q_{r(t)}\} \ln \mu$ 是UAS函数, 其中: $\rho_1(s) \leq \frac{\bar{\rho}}{\eta_{\lambda_0}} s$, $\eta_{\lambda_0} = \exp(\varphi_{\lambda_0})$, 时滞Markov切换随机系统是SISS(SiSS).

证 根据引理3以及Markov链模态驻留时间服从指数过程可知

$$E\{\mu^{N(t,t_0)} e^{\int_{t_0}^t \lambda(s) ds}\} \leq e^{\int_{t_0}^t (\lambda(s) + E\{\frac{\ln \mu}{m_{r(s)}}\}) ds} = e^{\int_{t_0}^t (\lambda(s) + E\{q_{r(s)}\} \ln \mu) ds}.$$

将此结果代入定理1和定理2中即可得到时滞Markov切换随机系统SISS和SiSS条件. 证毕.

注 6 由于 $q_{r(t)}$ 为分段连续函数且具有随机特性, 对其进行积分较为困难, 因而定理3和定理4中的条件4)较难验证, 下面将给出替代条件.

引理 5 如果满足以下任一条件:

M1) $\lambda(t) + \max_{i \in S} \{q_i\}$ 是UAS函数;

M2) 如果Markov切换信号 $r(t)$ 是不可约的, 且 $\lambda(t) + \sum_{i \in S} \pi_i q_i \ln \mu$ 是UAS函数; 那么 $\lambda_0(t)$ 是UAS函数.

证 令 $m_{r(t)} = 1/q_{r(t)}$ 代入引理4的证明中即可得到结论, 故略去证明. 证毕.

推论 4 存在函数 $V \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}^+)$, 函数 $\lambda \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{K}_\infty$, 以及正常数 $\mu \geq 1$, $\bar{\rho} \in (0, 1)$, 满足定理1(定理2)的条件1)–3)以及引理5, 系统是SISS(SiSS).

4 数值算例

例 1 考虑如下系统:

$$\begin{cases} dx = f(t, x_t, r, u)dt + g(t, x_t, r)dB_t, \\ x(t_0) = \xi(\theta), \theta \in [t_0 - \Delta, t_0], \end{cases} \quad (24)$$

其中:

$$f(t, x_t, u, 1) = (-3 + 4 \sin(\pi t))x(t) + \sin(x(t-2)) + \frac{u^2(t)}{1+x^2(t)},$$

$$f(t, x_t, u, 2) = \sin(\pi t)x(t-2) + \frac{u^2(t)}{1+x^2(t)},$$

$$g(t, x_t, i) = \frac{\sqrt{10}}{5}x(t-2), i = 1, 2,$$

初始时刻 $t_0 = 2$, 时滞 $\Delta = 2$, 初值函数 $\xi(\theta) = 1 + \theta$, $\theta \in [t_0 - \Delta, t_0]$.

选取Lyapunov函数 $V(t, x(t), 1) = V(t, x(t), 2) = x^2(t)$, $V(t, x(t), 1) < 2V(t, x(t), 2)$, 因此 $\mu = 2$, 求得

$$\begin{aligned} \mathcal{LV}(t, x_t, 1) = & (-6 + 8 \sin(\pi t))x^2(t) + \\ & 2x(t) \sin(x(t-2)) + \frac{2}{5}x^2(t-2) + \\ & \frac{2x(t)u^2(t)}{1+x^2(t)}, \\ \mathcal{LV}(t, x_t, 1) = & 2 \sin(\pi t)x(t)x(t-2) + \frac{2}{5}x^2(t-2) + \\ & \frac{2x(t)u^2(t)}{1+x^2(t)}, \end{aligned}$$

当 $x^2(t) \geq \frac{2}{5}x^2(t-2)$ 时有

$$\mathcal{LV}(t, x_t, i) \leq (-5 + 8 \sin(\pi t))V(t, x_t, i) + u^2(t).$$

因此可以确定 $\lambda(t) = -5 + 8 \sin(\pi t)$, $\lambda(t)$ 为周期函数, 周期为2.

如果切换信号 $r(t) \in \{1, 2\}$ 是半Markov过程, s_1

服从参数为1的指数分布, s_2 服从比例参数为1形状参数为2的韦伯分布, 可知 $m_1 = 1$ 以及 $m_2 = \sqrt{\pi}/2$. 因此 $\min_{i \in S}\{m_i\} = m_2$, 嵌入的Markov过程的模态转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

因此可以得到

$$\lambda_0(t) = \lambda(t) + \frac{\ln \mu}{\min_{i \in S}\{m_i\}} = \frac{2 \ln 2}{\sqrt{\pi}} + 8 \sin(\pi t) - 5,$$

根据推论2, 可得

$$\int_0^T \lambda_0(s) ds < \int_0^2 (8 \sin(\pi s) - 4) ds = -8,$$

$\lambda_0(t)$ 是UAS函数. 系统(24)在切换信号为半Markov链时为SiISS.

如果切换信号 $r(t)$ 是Markov过程, 模态转移速率矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

因此 $\max_{i \in S}\{q_i\} = 2$, 应用推论4,

$$\int_0^T \lambda_0(s) ds < \int_0^2 (-2 + 8 \sin(\pi s)) ds < -4,$$

可知 $\lambda_0(t)$ 是UAS函数, 系统是SiISS.

图1是系统(24)在切换信号为Markov过程时单次实验下的状态轨迹, 其中绿色的线段代表半Markov切换信号, 图2是100次独立实验下的状态轨迹, 从图1-图2可以看出系统(24)是SiISS.

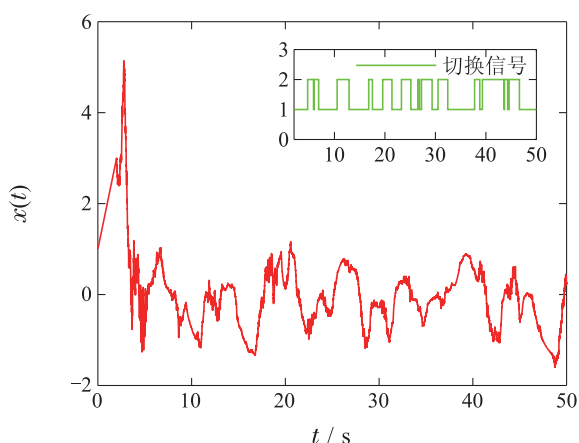


图1 时滞半Markov切换随机系统状态轨迹

Fig. 1 The state trajectories of the time-delay system with semi-Markovian switching

图3是系统(24)在切换信号为Markov过程时单次实验下的状态轨迹, 其中绿色的线段代表Markov切换信号, 图4是100次独立实验下的状态轨迹. 从图3-4可以看出Markov切换系统(24)是SiISS.

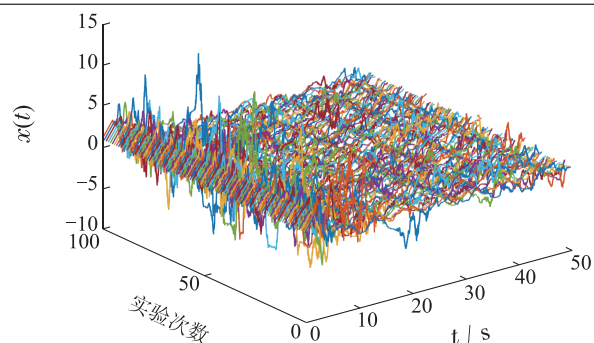


图2 100次实验下的时滞半Markov切换随机系统状态轨迹

Fig. 2 The state trajectories of the time-delay system with semi-Markovian switching under 100 times simulations

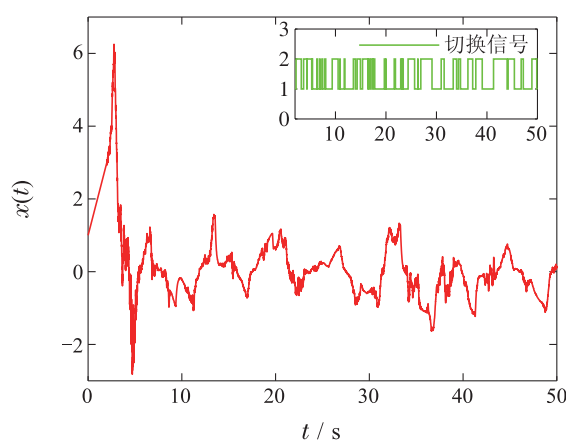


图3 时滞Markov切换随机系统状态轨迹

Fig. 3 The state trajectories of the time-delay system with Markovian switching

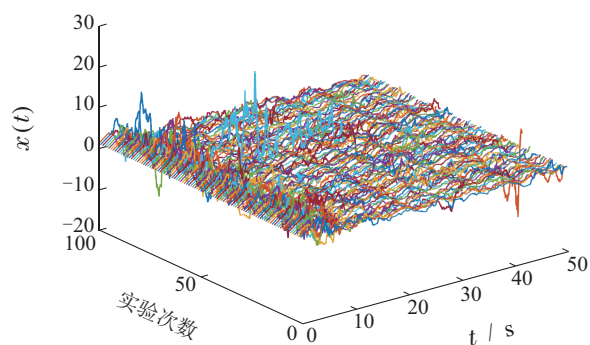


图4 100次实验下的时滞Markov切换随机系统状态轨迹

Fig. 4 The state trajectories of the time-delay system with Markovian switching under 100 times simulations

5 结论

本文针对时滞半Markov切换随机系统, 提出了一种基于时变驻留时间条件的iMLRFs方法, 建立了系统随机输入-状态稳定性以及随机积分输入-状态稳定性判据. 通过引入导数时变且不定多个Lyapunov函数, 放松了子系统稳定性要求, 甚至允许了不稳定子系统的存在. 时变驻留时间条件的提出为切换次数与驻留时间之间建立了一种时变关系, 从而摆脱了

半Markov过程不可约的约束条件,并放松了切换次数估计对Lyapunov函数选取的限制.最后给出算例验证方法的有效性.

参考文献:

- [1] ITÔ K, MCKEAN H P. *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. New York: Springer, 1965.
- [2] KRASOVSKII N N, LIDSKII E A. Analytical design of controllers in systems with random attributes. *Automation and Remote Control*, 1961, 22(1/3): 1021 – 1025.
- [3] ROGERS L C G, WILLIAMS D. *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 1: Foundations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [4] MAO X R, YUAN C G. *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching*. London: Imperial College Press, 2006.
- [5] SHI P, LI F B. A survey on Markovian jump systems: modeling and design. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2015, 13(1): 1 – 16.
- [6] CIARDO G, MARIE R A, SERICOLA B, et al. Performability analysis using semi-Markov reward processes. *IEEE Transactions on Computers*, 1990, 39(10): 1251 – 1264.
- [7] JANSSEN J, MANCA R. *Applied Semi-markov Processes*. New York: Springer, 2006.
- [8] BARBU V S, LIMNIOU N. *Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications: Their use in Reliability and DNA Analysis*. New York: Springer, 2008.
- [9] HUANG J, SHI Y. Stochastic stability and robust stabilization of semi-Markov jump linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23(18): 2028 – 2043.
- [10] LIN W J, HE Y, ZHANG C K, et al. Reachable set estimation for discrete-time Markovian jump neural networks with generally incomplete transition probabilities. *IEEE Transaction on Cybernetics*, 2021, 51(3): 1311 – 1321.
- [11] LIN Wenjuan, HE yong. Event-triggered fault detection filter design for semi-Markov jump neural networks with time delays. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(9): 1341 – 1350.
(林文娟, 何勇. 时滞半Markov跳变神经网络系统的事件驱动故障检测滤波器设计. 控制理论与应用, 2021, 38(9): 1341 – 1350.)
- [12] SCHIOLER H, SIMONSEN M, LETH J. Stochastic stability of systems with semi-Markovian switching. *Automatica*, 2014, 50(11): 2961 – 2964.
- [13] WANG B, ZHU Q X. Stability analysis of semi-Markov switched stochastic systems. *Automatica*, 2018, 94: 72 – 80.
- [14] WANG B, ZHU Q. A note on sufficient conditions of almost sure exponential stability for semi-Markovian jump stochastic systems. *IEEE Access*, 2019, 7: 49466 – 49473.
- [15] WU X, SHI P, TANG Y, et al. Stability analysis of semi-Markov jump stochastic nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, DOI 10.1109/TAC.2021.3071650.
- [16] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(4): 435 – 443.
- [17] LIU Tengfei, JIANG Zhongping. Cyclic-small-gain method for distributed nonlinear control. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 890 – 900.
(刘腾飞, 姜钟平. 分布式非线性控制的回路小增益方法. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 890 – 900.)
- [18] JIANG Z P, LIU T F. Small-gain theory for stability and control of dynamical networks: A survey. *Annual Reviews in Control*, 2018, 46: 58 – 79.
- [19] LI X Y, MAO X R. The improved laSalle-type theorems for stochastic differential delay equations. *Stochastic Analysis and Applications*, 2012, 30(4): 568 – 589.
- [20] NING C Y, HE Y, WU M, et al. Improved Razumikhin-type theorem for input-to-state stability of nonlinear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(7): 1983 – 1988.
- [21] NING C Y, HE Y, WU M, et al. Indefinite derivative Lyapunov-Krasovskii functional method for input to state stability of nonlinear systems with time-delay. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 270: 534 – 542.
- [22] ZHOU B, EGOROV A V. Razumikhin and Krasovskii stability theorems for time-varying time-delay systems. *Automatica*, 2016, 71: 281 – 291.
- [23] ZHOU B, LUO W W. Improved Razumikhin and Krasovskii stability criteria for time-varying stochastic time-delay systems. *Automatica*, 2018, 89: 382 – 391.
- [24] ZHANG M, ZHU Q X. Stability analysis for switched stochastic delayed systems under asynchronous switching: a relaxed switching signal. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(18): 8278 – 8298.
- [25] CHEN H, SHI P, LIM C C. A new unified input-to-state stability criterion for impulsive stochastic delay systems with Markovian switching. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(1): 159 – 181.
- [26] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475 – 482.
- [27] CHATTERJEE D, LIBERZON D. On stability of randomly switched nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(12): 2390 – 2394.
- [28] LETH J, SCHIOLER H, GHOLAMI M, et al. Stochastic stability of markovianly switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(8): 2048 – 2054.
- [29] WANG B, ZHU Q X. Stability analysis of Markov switched stochastic differential equations with both stable and unstable subsystems. *Systems & Control Letters*, 2017, 105: 55 – 61.
- [30] WU X, TANG Y, CAO J, et al. Stability analysis for continuous-time switched systems with stochastic switching signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(9): 3083 – 3090.
- [31] LONG L J. Integral ISS for switched nonlinear time-varying systems using indefinite multiple Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(1): 404 – 411.
- [32] LIU Q, HE Y, NING C Y. Indefinite multiple Lyapunov functions of pth moment input-to-state stability and pth moment integral input-to-state stability for the nonlinear time-varying stochastic systems with Markovian switching. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31(11): 5343 – 5359.
- [33] ITO H. A complete characterization of integral input-to-state stability and its small-gain theorem for stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(7): 3039 – 3052.
- [34] MAZENC F, MALISOFF M. Trajectory based approach for the stability analysis of nonlinear systems with time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(6): 1716 – 1721.
- [35] MAZENC F, MALISOFF M, NICULESCU S I. Stability and control design for time-varying systems with time-varying delays using a trajectory-based approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2017, 55(1): 533 – 556.

作者简介:

刘 乾 博士研究生, 目前研究方向为随机系统分析与控制、切换系统分析与控制, E-mail: qliu96@cug.edu.cn;

何 勇 教授, 博士, 目前研究方向为时滞系统鲁棒控制、网络控制和过程控制, E-mail: heyong08@cug.edu.cn;

宁重阳 副教授, 博士, 目前研究方向为脉冲系统分析与控制、切换系统分析与控制, E-mail: cyning@csuft.edu.cn.