

具有空间扩散和尺度结构的非线性害鼠模型的最优不育控制

张泰年¹, 雒志学^{2†}, 王汝军³

(1. 兰州交通大学 环境与市政工程学院, 甘肃 兰州 730070;

2. 兰州交通大学 数理学院, 甘肃 兰州 730070; 3. 河西学院 数学与统计学院, 甘肃 张掖 734000)

摘要: 本文讨论了一类具有尺度结构的非线性时变害鼠扩散模型的适定性及最优不育控制问题. 状态系统由二阶偏微分-积分方程描述, 此系统有一种重要的特殊情形, 即死亡率分为自然死亡率和额外死亡率, 系统的解关于尺度和空间位置可分离, 从而将系统分为两个子系统. 利用比较原则和不动点定理证明了变量分离型解的存在唯一性和非负有界性. 本文运用Mazur定理证明了最优策略的存在性, 导出共轭系统并借助凸集的切锥-法锥技巧给出了最优策略的必要条件, 为模型的实际应用奠定了理论基础. 最后, 采用向后差分格式和追赶法分别对子系统的解进行了数值模拟.

关键词: 空间扩散; 尺度结构; 不育控制; 可分离死亡率; 有限差分法

引用格式: 张泰年, 雒志学, 王汝军. 具有空间扩散和尺度结构的非线性害鼠模型的最优不育控制. 控制理论与应用, 2023, 40(9): 1555 – 1561

DOI: 10.7641/CTA.2022.20039

Optimal contraception control for a nonlinear vermin model with spatial diffusion and size-structure

ZHANG Tai-nian¹, LUO Zhi-xue^{2†}, WANG Ru-jun³

(1. School of Environmental and Municipal Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070, China;

2. School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070, China;

3. School of Mathematics and Statistics, Hexi University, Zhangye Gansu 734000, China)

Abstract: The paper investigates the well-posedness and optimal contraception control problem for a class of size-structured nonlinear time-varying vermin diffusion model. The state system is described by a second-order partial integro-differential equation. This system has an important particular situation, that is, the mortality rate is divided into natural mortality rate and additional mortality rate. The solution of the system is separable with respect to size and spatial position, thus dividing the system into two subsystems. The comparison principle and fixed point theorem are used to prove the existence, uniqueness, non-negativity and boundedness of the separable form of the solution. The existence of the optimal strategy is proved by Mazur's theorem. The adjoint system is derived and the necessary conditions for the optimal strategy are given by means of tangent-normal cones technique of the convex set. The results lay a theoretical foundation for the practical applications of the model. Finally, the backward difference scheme and chasing method are used to simulate the solutions of the subsystems.

Key words: spatial diffusion; size-structure; contraception control; separable mortality; finite difference method

Citation: ZHANG Tainian, LUO Zhixue, WANG Rujun. Optimal contraception control for a nonlinear vermin model with spatial diffusion and size-structure. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(9): 1555 – 1561

1 引言

近年来, 鼠害已成为恶化草地生态环境、遏制畜牧业可持续发展的生物灾害. 害鼠可以传播多种病毒性和细菌性疾病, 对人体健康造成直接危害, 对生产经

济活动造成巨大损失. 鼠类繁殖次数多、孕期短、产仔率高, 数量能在短期内急剧增加. 目前主要的防治方法有: 生物防治、化学防治、物理防治、生态防治. 此外, 不育控制是国际上兴起的控制害鼠新技术之一,

收稿日期: 2022-01-14; 录用日期: 2022-08-17.

†通信作者. E-mail: luozhixue2009@126.com; Tel.: +86 13919493189.

本文责任编辑: 张焕水.

国家自然科学基金项目(11561041), 甘肃省自然科学基金项目(23JRRG0006), 河西学院校长基金创新团队项目(CXTD2023006)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11561041), the Natural Science Foundation of Gansu Provincial (23JRRG0006) and the Faculty Research Grants Awarded by Principal's Funds (CXTD2023006).

主要通过减少繁殖以控制其数量. 这种技术比传统的治理方法更能达到防治的目的, 还具有操作安全和不易对环境造成污染等特点. 于是, 利用不育技术防治害鼠引起不少学者的关注^[1-3].

个体尺度是描述种群动力学行为的重要参数之一, 例如, 要描述植物或鱼类的动力学行为, 个体尺度比年龄更好地模拟种群演化. 种群的扩散与其空间分布密度息息相关, 诸多学者对具有扩散的年龄结构种群系统的最优控制进行了研究, 取得了较为丰富的成果^[4-11], 其中, 专著[4]研究具有扩散的线性和非线性系统的最优控制问题, 且非线性系统更贴近实际状况. 文献[7]讨论了依赖年龄和空间扩散的 n 维食物链模型的最优收获策略. 另一方面, 对于尺度结构的种群系统, 目前对扩散的情形研究较少, 这里简介近年几项研究成果. 文献[12]首次提出具有空间扩散的线性尺度结构种群模型. 文献[13]研究一类具有空间扩散和尺度结构竞争种群系统的最优收获问题. 受上述工作的启发, 本文考虑如下的最优化问题:

$$\min \int_Q [g_1(p^\alpha(s, t, x) - \bar{p}(s, t, x)) + \alpha(s, t)p^\alpha(s, t, x)] dx ds dt, \quad (1)$$

其中: $p^\alpha(s, t, x)$ 是下列系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(g(s, t)p)}{\partial s} - k\Delta p = \\ -\mu_0(s, t)p - \\ \mu_1(P(t, x))p - \delta_1\alpha(s, t)p, \quad (s, t, x) \in Q, \\ \frac{\partial p}{\partial v}(s, t, x) = 0, \quad (s, t, x) \in \Sigma, \\ g(0, t)p(0, t, x) = \\ \int_0^l \beta(s, t)m(s, t) \times \\ [1 - \delta_2\alpha(s, t)]p(s, t, x)ds, \quad (t, x) \in Q_1, \\ p(s, 0, x) = u_0(s)q_0(x), \quad (s, x) \in Q_2, \\ P(t, x) = \int_0^l p(s, t, x)ds, \quad (t, x) \in Q_1 \end{cases} \quad (2)$$

的解; 控制变量 $\alpha \in \mathcal{U} = \{h \in L^2(Q_3); 0 \leq h(s, t) \leq L \text{ a.e. } (s, t) \in Q_3\}$, 这里 $L > 0$ 表示害鼠个体误食雌性不育剂的最大量. $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 1, 2, 3)$ 是一个具有充分光滑边界 $\partial\Omega$ 的非空有界区域, v 是 $\partial\Omega$ 处的外法单位向量. $Q = (0, l) \times (0, T) \times \Omega$, $\Sigma = (0, l) \times (0, T) \times \partial\Omega$, $Q_1 = (0, T) \times \Omega$, $Q_2 = (0, l) \times \Omega$, $Q_3 = (0, l) \times (0, T)$. $p(s, t, x)$ 表示害鼠位于 x 处在 t 时刻尺度为 s 的个体密度; k 表示害鼠在 Ω 内的扩散率; $g(s, t)$ 表示害鼠个体尺度的增长率; $\beta(s, t)$ 表示个体的出生率; $m(s, t)$ 表示雌性个体比例; $P(t, x)$ 表示 t 时刻在空间 x 处害鼠的总数量; $\alpha(s, t)$ 表示害鼠个体误食雌性不育剂的平均量, $\delta_2\alpha(s, t)$ 表示雌性个体的不育率. 可分离死亡率 μ 的结构为

$$\mu(s, t, P) = \mu_0(s, t) + \mu_1(P(t, x)) + \delta_1\alpha(s, t),$$

其中: $\mu_0(s, t)$ 表示个体的自然死亡率; $\mu_1(P(t, x))$ 表示个体因种内竞争导致的额外死亡率; $\delta_1\alpha(s, t)$ 表示个体因误食不育剂导致的额外死亡率.

在式(1)中 $\bar{p}(s, t, x) \in L^\infty(Q)$ 表示某一给定的理想分布; $g_1(p^\alpha(s, t, x) - \bar{p}(s, t, x))$ 表示受控状态与理想分布的接近程度; 函数 $\alpha(s, t)p^\alpha(s, t, x)$ 表示害鼠个体所食雌性不育剂的量.

本文做如下基本假设:

1) $\beta(s, t) \in L^\infty(Q_3)$, $0 \leq \beta(s, t) \leq \bar{\beta}$, 其中 $\bar{\beta} \in \mathbb{R}_+$;

2) $\mu_0(s, t) \in L_{loc}^1([0, l] \times [0, T])$, $\mu_0(s, t) \geq 0$ a.e. $(s, t) \in Q_3$. $\mu_1 \in L_{loc}^\infty([0, l] \times [0, T] \times \bar{\Omega})$ 且局部利普希茨连续. $0 \leq \bar{\mu}(s, t) \leq \mu_1$, $\bar{\mu} \in L_{loc}^\infty([0, l] \times [0, T])$, $\int_0^l \bar{\mu}(s, t + s - l)ds = +\infty$;

3) $g(s, t)$ 是有界的连续函数, 且关于 s 满足局部利普希茨条件. 对任意 $(s, t) \in Q_3$, $g(s, t) > 0$, 且对任意 $t \in [0, T]$, 有 $g(l, t) = 0$, $g(0, t) = 1$;

4) $u_0 \in L^2(0, l)$, $u_0(s) \geq 0$ a.e. $s \in (0, l)$, $q_0 \in L^2(\Omega)$, $q_0(x) \geq 0$ a.e. $x \in \Omega$;

5) $0 \leq \delta_i\alpha(s, t) < 1$, $0 < m(s, t) < 1$, $(s, t) \in Q_3 (i = 1, 2)$;

6) $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是非负连续凸函数, 且 g_1' 有界.

2 状态系统的适定性

状态系统(2)属于“可分离”模型类, 定义可分离形式解为

$$p(s, t, x) = u(s, t)q(t, x), \quad (s, t, x) \in Q,$$

其中: $u(s, t)$ 是下列线性系统(3)的解

$$\begin{cases} \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} + \frac{\partial(g(s, t)u(s, t))}{\partial s} = \\ -\mu_0(s, t)u(s, t) - \delta_1\alpha(s, t)u(s, t), \quad (s, t) \in Q_3, \\ g(0, t)u(0, t) = \int_0^l \beta(s, t)m(s, t) \times \\ [1 - \delta_2\alpha(s, t)]u(s, t)ds, \\ t \in (0, T), \\ u(s, 0) = u_0(s), \quad s \in (0, l), \end{cases} \quad (3)$$

$q(t, x)$ 是下列非线性系统(4)的解

$$\begin{cases} q_t(t, x) + \mu_1(U(t)q(t, x))q(t, x) - \\ k\Delta q(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_1, \\ \frac{\partial q}{\partial v}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega, \\ q(0, x) = q_0(x), \quad x \in \Omega, \\ U(t) = \int_0^l u(s, t)ds, \quad t \in (0, T). \end{cases} \quad (4)$$

定义 1 初值问题 $s'(t) = g(s, t)$, $s(t_0) = s_0$ 的唯一解 $s = \varphi(t; t_0, s_0, x_0)$ 称为系统(2)通过点 (t_0, s_0, x_0) 的特征曲线. 特别地, 记 $z(t) = \varphi(t; 0, 0, x_0)$ 为系统(2)过点 $(0, 0, x_0)$ 的特征曲线.

定义2 若函数 $p \in L^2(Q)$ 沿着每条特征曲线 φ 都绝对连续, 且满足

$$\begin{cases} D_{\varphi} p(s, t, x) - k \Delta p = \\ - [\mu_0(s, t) + \mu_1(P(t, x)) + \delta_1 \alpha(s, t) \\ + g_s(s, t)] p(s, t, x), \\ \frac{\partial p}{\partial v}(s, t, x) = 0, \\ g(0, t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(\varphi(t + \varepsilon; t, \cdot, 0), t + \varepsilon, \cdot) = \\ \int_0^l \beta(s, t) m(s, t) [1 - \delta_2 \alpha(s, t)] p(s, t, x) ds, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(s + \varepsilon, \varepsilon, \cdot) = u_0(s) q_0(\cdot), \\ P(t, x) = \int_0^l p(s, t, x) ds, \end{cases}$$

则称 p 为系统(2)的解. 这里 $D_{\varphi} p(s, t, x)$ 表示 p 沿特征曲线 φ 的方向导数, 即

$$D_{\varphi} p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{p(\varphi(t + \varepsilon; t, s, x), t + \varepsilon, x) - p(s, t, x)}{\varepsilon}.$$

定理1 对任意的 $\alpha \in \mathcal{U}$, 则子系统(3)–(4)有唯一的非负有界解 $(u(s, t), q(t, x))$.

证 首先证明系统(3)有唯一的非负有界解. 不失一般性, 假设 $\alpha(s, t) \equiv 0$. 对于系统(3), 在 sot 平面上任意固定点 (s, t) , 当 $s \leq z(t)$ 时, 定义其初始时刻 $\tau = \tau(s, t)$, 则 $\varphi(t; \tau, 0) = s \Leftrightarrow \varphi(\tau; t, s) = 0$. 当 $s > z(t)$ 时, 定义其初始尺度 $\eta = \eta(s, t)$, 类似的有 $\varphi(t; 0, \eta) = s \Leftrightarrow \varphi(0; t, s) = \eta$. 从而利用特征曲线法, 系统(3)的解可写为

$$u(s, t) = \begin{cases} u(0, \varphi^{-1}(0; t, s)) \exp\{-\int_{\tau}^t \mu_0(\varphi(r; t, s), r) + \\ g_s(\varphi(r; t, s), r) dr\}, & s \leq z(t), \\ u_0(\varphi(0; t, s)) \exp\{-\int_0^t \mu_0(\varphi(r; t, s) + \\ g_s(\varphi(r; t, s), r) dr\}, & s > z(t). \end{cases}$$

记

$$\Pi(s, t) =: \exp\{-\int_0^s \frac{\mu_0(\sigma, \varphi^{-1}(\sigma; t, s))}{g(\sigma, \varphi^{-1}(\sigma; t, s))} d\sigma\},$$

$$E(s, t) =: \exp\{-\int_0^t \mu_0(\varphi(r; t, s), r) + g_s(\varphi(r; t, s), r) dr\}.$$

对 $s \leq z(t)$ 的情况做积分变换. 令 $\sigma = \varphi(r; t, s)$, $r = \varphi^{-1}(\sigma; t, s)$, $dr = \frac{1}{g(\sigma, \varphi^{-1}(\sigma; t, s))} d\sigma$, 则

$$u(s, t) = \begin{cases} \frac{g(0, \tau) u(0, \tau)}{g(s, t)} \Pi(s, t), & s \leq z(t), \\ u_0(\varphi(0; t, s)) E(s, t), & s > z(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中: $\tau = t - z^{-1}(s)$, $T > z^{-1}(l)$. 当 $T \leq z^{-1}(l)$ 时同法处理.

令 $b(t) = g(0, t) u(0, t)$, 则

$$b(t) = \int_0^{z(t)} \beta(s, t) m(s, t) [1 - \delta_2 \alpha(s, t)] \times \frac{b(t - z^{-1}(s))}{g(s, t)} \Pi(s, t) ds + \int_{z(t)}^l \beta(s, t) m(s, t) [1 - \delta_2 \alpha(s, t)] \times u_0(\eta) E(s, t) ds.$$

令 $\delta = z^{-1}(s)$, 对上述第1式做积分变换, 可得

$$b(t) = \int_0^t \beta(z(\delta), t) m(z(\delta), t) [1 - \delta_2 \alpha(z(\delta), t)] \times \hat{\Pi}(s, t) b(t - \delta) d\delta + \int_{z(t)}^l \beta(s, t) m(s, t) \times [1 - \delta_2 \alpha(s, t)] u_0(\eta) E(s, t) ds,$$

其中

$$\hat{\Pi}(s, t) = \exp\{-\int_0^{z(\delta)} \frac{\mu_0(\sigma, \varphi^{-1}(\sigma; t, s))}{g(\sigma, \varphi^{-1}(\sigma; t, s))} d\sigma\},$$

则 $b(t)$ 满足如下积分方程:

$$b(t) = \int_0^t K(t, z(\delta); \alpha) b(t - \delta) d\delta + F^{\alpha}(t), \quad (6)$$

其中:

$$K(t, z(\delta); \alpha) = \begin{cases} \beta(z(\delta), t) [1 - \delta_2 \alpha(z(\delta), t)] \times \\ \hat{\Pi}(s, t) m(z(\delta), t), & 0 \leq z(\delta) \leq l, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$F^{\alpha}(t) = \int_{z(t)}^l \beta(s, t) m(s, t) [1 - \delta_2 \alpha(s, t)] \times u_0(\eta) E(s, t) ds.$$

由假设知, $K(t, z(\delta); \alpha) \geq 0$, $F^{\alpha}(t) \geq 0$ 且 $F^{\alpha}(t) \in L^{\infty}(0, T)$, $K(t, z(\delta); \alpha) \in L^{\infty}(Q_3)$.

对式(6)做积分变换, 得到

$$b(t) = \int_0^t K(t - r, z(t - r); \alpha) b(r) dr + F^{\alpha}(t).$$

对任意的 $\alpha \in \mathcal{U}$, 定义算子 $\mathcal{A}^{\alpha}: L^{\infty}(0, T) \rightarrow L^{\infty}(0, T)$, 则

$$(\mathcal{A}^{\alpha} \rho)(t) = \int_0^t K(t - r, z(t - r); \alpha) \rho(r) dr + F^{\alpha}(t) \text{ a.e. } t \in (0, T).$$

在空间 $L^{\infty}(0, T)$ 上定义等价范数如下:

$$\|\rho\| = \text{Ess sup}_{t \in (0, T)} (e^{-\lambda t} |\rho(t)|).$$

对于任意的 $\rho_1, \rho_2 \in L^{\infty}(0, T)$ 有

$$\|(\mathcal{A}^{\alpha} \rho_1)(t) - (\mathcal{A}^{\alpha} \rho_2)(t)\| = \text{Ess sup}_{t \in (0, T)} (e^{-\lambda t} |(\mathcal{A}^{\alpha} \rho_1)(t) - (\mathcal{A}^{\alpha} \rho_2)(t)|) =$$

$$\text{Ess sup}_{t \in (0, T)} (e^{-\lambda t} |\int_0^t K(t - r, z(t - r); \alpha) \times (\rho_1(r) - \rho_2(r)) dr|) \leq$$

$$\text{Ess sup}_{t \in (0, T)} (e^{-\lambda t} \|K\|_{L^\infty(Q_3)} \int_0^t e^{\lambda r} e^{-\lambda r} \times$$

$$|\rho_1(r) - \rho_2(r)| dr) \leq \frac{1}{\lambda} \|K\|_{L^\infty(Q_3)} \|\rho_1(r) - \rho_2(r)\|.$$

当 $\lambda > \|K\|_{L^\infty(Q_3)}$ 时, $\mathcal{A}^\alpha$ 为 $(L^\infty(0, T), \|\cdot\|)$ 上的压缩算子. 根据 Banach 不动点定理知, 算子 $\mathcal{A}^\alpha$ 有唯一的不动点, 即式(6)有唯一解 $b(t) \in L^\infty(0, T)$.

进一步, 根据 Banach 不动点定理, 式(6)的解是如下迭代序列的极限:

$$\begin{cases} b_0(t) = F^\alpha(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ b_{n+1}(t) = F^\alpha(t) + \int_0^l K(t, z(\delta); \alpha) \times \\ \quad b(t - \delta) ds, & t \in \mathbb{R}_+, n \in N. \end{cases}$$

由 $K(t, z(\delta); \alpha) \geq 0$ a.e. $(z(\delta), t) \in Q_3$, $F^\alpha(t) \geq 0$ a.e. $t \in (0, T)$, 则 $b_n \geq 0$, 其极限 $b(t) \geq 0$. 因此对任意的 $\alpha \in \mathcal{U}$, 系统(3)有唯一非负解 $u^\alpha \in L^\infty(Q_3)$.

由式(5)可得

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} &= \int_0^{z(t)} u(s, t) ds + \int_{z(t)}^l u(s, t) ds \leq \\ &\int_0^{z(t)} \frac{1}{g(s, t)} g(0, t - z^{-1}(s)) \times \\ &u(0, t - z^{-1}(s)) ds + \int_{z(t)}^l u_0(s) ds = \\ &\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_0^l \beta(s, r) m(s, r) \times \\ &[1 - \delta_2 \alpha(s, r)] u(s, r) ds dr \leq \\ &\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \bar{\beta} \int_0^t \|u(\cdot, r)\|_{L^2(\Omega)} dr. \end{aligned}$$

根据 Bellman 引理, 得到

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} e^{\bar{\beta} T} =: M.$$

接下来证明系统(4)有唯一的非负有界解. 对任意的 $y \in L^2(Q_1; \mathbb{R}_+)$, 考虑如下系统:

$$\begin{cases} q_t(t, x) + \mu_1(U(t)y(t, x))q(t, x) - \\ k\Delta q(t, x) = 0, & (t, x) \in Q_1, \\ \frac{\partial q}{\partial v}(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega, \\ q(0, x) = q_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (7)$$

由定理 4.1.3^[4] 知, 式(7)有唯一非负解 $q^y \in L^2(Q_1; \mathbb{R}_+)$. 根据比较原理知, $q^y(t, x) \leq \bar{q}(t, x)$, 其中 $\bar{q}(t, x)$ 为系统(4)相应于 $\mu_1 = 0$ 的解.

对任意的 $(y_1, y_2) \in L^2(Q_1; \mathbb{R}_+^2)$, 其相应的解为 (q_1, q_2) . 令 $w = q_1 - q_2$, 则 w 满足下列系统:

$$\begin{cases} w_t(t, x) - k\Delta w(t, x) + \mu_1(U(t)y_1)w(t, x) = \\ [\mu_1(U(t)y_2) - \mu_1(U(t)y_1)]q_2, \\ \quad (t, x) \in Q_1, \\ \frac{\partial w}{\partial v}(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega, \\ w(0, x) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (8)$$

在系统(8)中的第一式两端同乘以 $w(t, x)$ 并在 Q_1 上积分, 可得

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_\Omega (ww_\tau - kw\Delta w + \mu_1(U(\tau)y_1)w^2) dx d\tau = \\ &\int_0^t \int_\Omega w dw dx + k \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx d\tau + \\ &\int_0^t \int_\Omega \mu_1(U(\tau)y_1)w^2 dx d\tau \geq \frac{1}{2} \int_\Omega w^2(t, x) dx, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_\Omega [\mu_1(U(\tau)y_2) - \mu_1(U(\tau)y_1)] q_2 w dx d\tau \leq \\ &\frac{1}{2} \|\bar{q}\| \int_0^t \int_\Omega (|\mu_1(U(\tau)y_2) - \mu_1(U(\tau)y_1)|^2 + \\ &|w|^2) dx d\tau \leq \\ &\frac{1}{2} \|\bar{q}\| L_\mu^2 M^2 \int_0^t \|(y_1 - y_2)(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \\ &\frac{1}{2} \|\bar{q}\| \int_0^t \|w(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c_1 \int_0^t \|(y_1 - y_2)(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \\ &c_2 \int_0^t \|w(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau, \end{aligned}$$

由 Bellman 引理, 得到

$$\|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \|(y_1 - y_2)(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau, \quad (9)$$

其中常数 $c = c_1 e^{c_2 T}$.

令 $\mathcal{B} = \{y \in L^2(Q_1) : 0 \leq y(t, x) \leq \bar{q}(t, x), \forall (t, x) \in Q_1\}$, 定义映射 $\mathcal{F} : L_+^2(Q_1) \rightarrow L_+^2(Q_1)$, $(\mathcal{F}y)(t, x) = q^y$ 和等价范数如下:

$$\|y\|_* = \left(\int_0^t \|y(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-4c\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

由式(9)可得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}y_1 - \mathcal{F}y_2\|_*^2 &= \|q_1 - q_2\|_*^2 = \\ &\int_0^T \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-4ct} dt \leq \\ &c \int_0^T e^{-4ct} \int_0^t \|(y_1 - y_2)(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau dt \leq \\ &\int_0^T \|(y_1 - y_2)(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_\tau^T c e^{-4ct} dt d\tau \leq \\ &\frac{1}{4} \int_0^T \|(y_1 - y_2)(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-4c\tau} d\tau \leq \\ &\frac{1}{4} \|y_1 - y_2\|_*^2. \end{aligned}$$

因此, 映射 $\mathcal{F}$ 是空间 $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_*)$ 上的压缩映射. 根据 Banach 不动点定理知, 映射 $\mathcal{F}$ 存在唯一的不动点. 即 $q(t, x)$ 为系统(4)的唯一解. 令 $M_1 = \text{Ess sup} |\bar{q}(t, x)|$, 则有 $0 \leq q(t, x) \leq M_1$ a.e. $(t, x) \in Q_1$. 综合以上分析, 子系统(3)–(4)有唯一的非负有界解 $(u(s, t), q(t, x))$.

证毕.

3 最优策略的存在性

定理 2 最优控制问题(1)至少存在一个最优解.

证 定义 $J(\alpha) = \int_Q [g_1(p^\alpha(s, t, x) - \bar{p}(s, t, x)) + \alpha(s, t)p^\alpha(s, t, x)] dx ds dt$, 令 $d = \inf_{\alpha \in \mathcal{U}} J(\alpha)$. 由定理 1 及假设 6) 知, $0 \leq J(\alpha) < +\infty, \forall \alpha \in \mathcal{U}$. 因此 $d \in [0, +\infty)$. 取极小化序列 $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$, 使得

$$d \leq J(\alpha_n) < d + \frac{1}{n}. \quad (10)$$

由定理 1 知 $\{p^{\alpha_n}\}$ 有界, 故存在其子序列 (仍记为 $\{p^{\alpha_n}\}$), 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 $L^2(Q)$ 中, $p^{\alpha_n} \rightharpoonup p^*$. 根据 Mazur 定理知, 存在序列 $\{\tilde{p}_n\}$ 满足

$$\tilde{p}_n(s, t, x) = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n p^{\alpha_i}(s, t, x), \quad (11)$$

其中: $\lambda_i^n \geq 0, \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n = 1, k_n \geq n+1$.

令 $P^\alpha(t, x) = \int_0^l p^\alpha(s, t, x) ds$, 根据文献 [4] 中引理 5.1.1 知, 存在 $\{\alpha_n\}$ 的子列 (仍记为 $\{\alpha_n\}$), 使得

在 $L^2(Q_1)$ 中, $P^{\alpha_n} \rightarrow P^*$,

$$P^{\alpha_n}(t, x) \rightarrow P^*(t, x) \text{ a.e. } (t, x) \in Q_1. \quad (12)$$

定义控制函数序列 $\tilde{\alpha}_n$ 如下:

$$\tilde{\alpha}_n = \begin{cases} \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \alpha_i(s, t) p^{\alpha_i}}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n p^{\alpha_i}}, & \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n p^{\alpha_i} \neq 0, \\ 0, & \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n p^{\alpha_i} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

显然 $\tilde{\alpha}_n \in \mathcal{U}$. 由于在空间 $L^2(Q)$ 中, $p^{\alpha_n} \rightharpoonup p^*$, 故在空间 $L^2(Q_1)$ 中, $\int_0^l p^{\alpha_n}(s, \cdot, \cdot) ds \rightharpoonup \int_0^l p^*(s, \cdot, \cdot) ds$, 所以 $P^*(t, x) = \int_0^l p^*(s, t, x) ds$ a.e. $(t, x) \in Q_1$. 根据有界序列的弱紧性知, 存在子序列 $\{\tilde{\alpha}_n\}$ 使得在空间 $L^2(Q_3)$ 中, $\tilde{\alpha}_n \rightharpoonup \alpha^*$. 显然 $\tilde{p}_n$ 是下列系统的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial t} + \frac{\partial(g(s, t)\tilde{p}_n)}{\partial s} - k\Delta \tilde{p}_n = \\ -\mu_0(s, t)\tilde{p}_n - \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \mu_1(P^{\alpha_i}(t, x))p^{\alpha_i} \\ -\delta_1 \tilde{\alpha}_n(s, t)\tilde{p}_n, \\ \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial v}(s, t, x) = 0, \\ g(0, t)\tilde{p}_n(0, t, x) = \\ \int_0^l \beta(s, t)m(s, t) \times [1 - \delta_2 \tilde{\alpha}_n(s, t)]\tilde{p}_n(s, t, x) ds, \\ \tilde{p}_n(s, 0, x) = u_0(s)q_0(x), \\ \tilde{P}^{\alpha_i}(t, x) = \int_0^l \tilde{p}^{\alpha_i}(s, t, x) ds, \end{cases} \quad (14)$$

由式(12)得

$$\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \mu_1(P^{\alpha_i})p^{\alpha_i} \rightarrow \mu_1(P^*)p^* \text{ a.e. } (s, t, x) \in Q.$$

对系统(14)取极限, 得到系统(2)对应于 α^* 的解 p^* , 即 $p^* = p^{\alpha^*}$. 由式(10)知

$$d \leq \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n J(\alpha_i) \leq d + \frac{1}{n},$$

从而当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n J(\alpha_i) \rightarrow d$.

另一方面, 由假设 (A_6) 以及式(11)(13)可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n J(\alpha_i) = \\ & \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \int_Q [g_1(p^{\alpha_i} - \bar{p}) + \alpha_i(s, t)p^{\alpha_i}] dx ds dt \geq \\ & \int_Q [g_1(\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n p^{\alpha_i} - \bar{p}) + \\ & \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \alpha_i(s, t)p^{\alpha_i}}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n p^{\alpha_i}} \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n p^{\alpha_i}] dx ds dt = \\ & \int_Q [g_1(\tilde{p}_n - \bar{p}) + \tilde{\alpha}_n(s, t)\tilde{p}_n] dx ds dt \rightarrow \\ & \int_Q [g_1(p^* - \bar{p}) + \alpha^*(s, t)p^*] dx ds dt = \\ & J(\alpha^*), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此, $J(\alpha^*) = d = \inf_{\alpha \in \mathcal{U}} J(\alpha)$. 证毕.

4 最优性条件

定理 3 若 (α^*, p^{α^*}) 是最优控制问题(1)的最优解, p^{α^*} 是系统(2)相应于 α^* 的解, 则最优策略 α^* 有如下结构:

$$\alpha^* = \begin{cases} 0, & \delta_2 \beta m \xi(0, t, x) + \delta_1 \xi(s, t, x) < 1, \\ L, & \delta_2 \beta m \xi(0, t, x) + \delta_1 \xi(s, t, x) > 1, \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\xi(s, t, x)$ 为下列共轭系统(16)的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} + g(s, t) \frac{\partial \xi}{\partial s} + k \Delta \xi = \\ [\mu_0(s, t) + \delta_1 \alpha^*(s, t) + \mu_1(P^{\alpha^*}(t, x))] \xi - \\ g'_1(p^{\alpha^*} - \bar{p}) - \alpha^*(s, t) + \int_0^l \mu'_1(P^{\alpha^*}(t, x)) p^{\alpha^*} \xi dx - \\ \beta(s, t)m(s, t)[1 - \delta_2 \alpha^*(s, t)] \xi(0, t, x), \\ \frac{\partial \xi}{\partial v}(s, t, x) = 0, \\ \xi(s, T, x) = 0, \quad \xi(l, t, x) = 0, \\ P^{\alpha^*}(t, x) = \int_0^l p^*(s, t, x) ds. \end{cases} \quad (16)$$

证 对任意 $\nu \in \mathcal{T}_U(\alpha^*)$ (集合 $\mathcal{U}$ 在 α^* 处的切锥), 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 有 $\alpha^\varepsilon := \alpha^* + \varepsilon \nu$. 令 p^{α^ε} 为系统(2)相

应于 $\alpha = \alpha^\varepsilon$ 的解. 由 α^* 的最优性知

$$\int_Q [g_1(p^{\alpha^*} - \bar{p}) + \alpha^*(s, t)p^{\alpha^*}] dx ds dt \leq \int_Q [g_1(p^{\alpha^\varepsilon} - \bar{p}) + \alpha^\varepsilon(s, t)p^{\alpha^\varepsilon}] dx ds dt, \quad (17)$$

将式(17)两边同时除以 ε , 并令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 可得

$$\int_Q [g'_1(p^{\alpha^*} - \bar{p}) + \alpha^*(s, t)] z dx ds dt + \int_Q \nu(s, t)p^{\alpha^*} dx ds dt \geq 0, \quad (18)$$

其中 $z(s, t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{p^{\alpha^\varepsilon}(s, t, x) - p^{\alpha^*}(s, t, x)}{\varepsilon}$ 满足下列系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial(g(s, t)z)}{\partial s} - k\Delta z = \\ -[\mu_0(s, t) + \mu_1(P^{\alpha^*}(t, x)) + \delta_1\alpha^*(s, t)]z - \\ \delta_1\nu(s, t)p^{\alpha^*} - \mu'_1(P^{\alpha^*}(t, x))Z(t, x)p^{\alpha^*}, \\ \frac{\partial z}{\partial v}(s, t, x) = 0, \\ g(0, t)z(0, t, x) = \\ \int_0^l \beta(s, t)m(s, t)[(1 - \delta_2\alpha^*(s, t))z - \\ \delta_2\nu(s, t)p^{\alpha^*}] ds, \\ z(s, 0, x) = 0, \\ Z(t, x) = \int_0^l z(s, t, x) ds, \\ P^{\alpha^*}(t, x) = \int_0^l p^{\alpha^*}(s, t, x) ds. \end{cases} \quad (19)$$

在系统(19)的第1式两边同乘以 $\xi(s, t, x)$, 然后在区域 Q 上积分, 得到

$$\int_Q [g'_1(p^{\alpha^*} - \bar{p}) + \alpha^*(s, t)] z dx ds dt = - \int_Q p^{\alpha^*} \nu [\delta_2\beta m \xi(0, t, x) + \delta_1\xi] dx ds dt, \quad (20)$$

将式(20)代入式(18)有

$$\int_Q [\delta_2\beta(s, t)m(s, t)\xi(0, t, x) + \delta_1\xi(s, t, x) - 1] \times p^{\alpha^*}(s, t, x)\nu(s, t) dx ds dt \leq 0,$$

从而 $[\delta_2\beta(s, t)m(s, t)\xi(0, t, x) + \delta_1\xi(s, t, x) - 1] \times p^{\alpha^*}(s, t, x) \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\alpha^*)$ (表示 $\mathcal{U}$ 在 α^* 处的法锥), 再利用法锥性质^[14], 结论成立. 证毕.

5 数值模拟

对于系统(3), 将区域 $\bar{Q}_3 = [0, l] \times [0, T]$ 划分为 $J \times N$ 的网格, 空间步长为 $\frac{l}{J} = 0.01$, 时间步长为 $\frac{T}{N} = 0.01$. 类似地, 其中系统(4)取 $l = \pi$, 这样模拟出的效果更好. 本文采用向后差分格式和追赶法, 利用MATLAB编程计算分别绘出自然出生率(图1)、自然死亡率(图2)、系统(3)-(4)数值解的三维图形(见

图3-4). 选取如下参数:

$$\begin{aligned} \beta(s, t) &= 20s^2(1-s)(1+\sin\pi t), \\ \mu_0(s, t) &= e^{-5s}(1-s)^{-1.4}(2+\cos\pi t), \\ g(s, t) &= 1-s, \quad m(s, t) = 0.5, \\ u_0(s) &= e^s, \quad q_0(x) = x, \quad T = 1, \quad l = 1, \\ \mu_1 &= 0.1, \quad k = 1, \quad \alpha(s, t) = 0. \end{aligned}$$

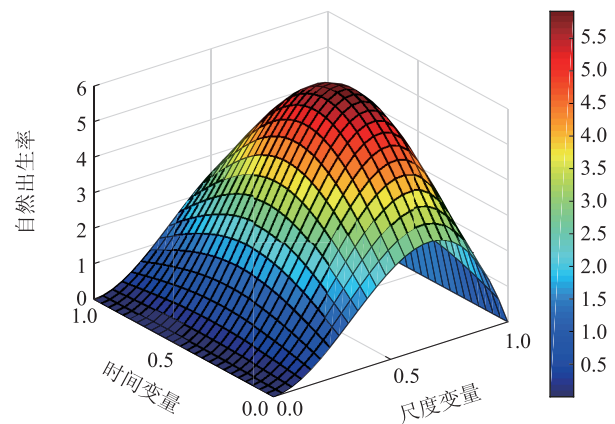


图1 自然出生率

Fig.1 Natural fertility

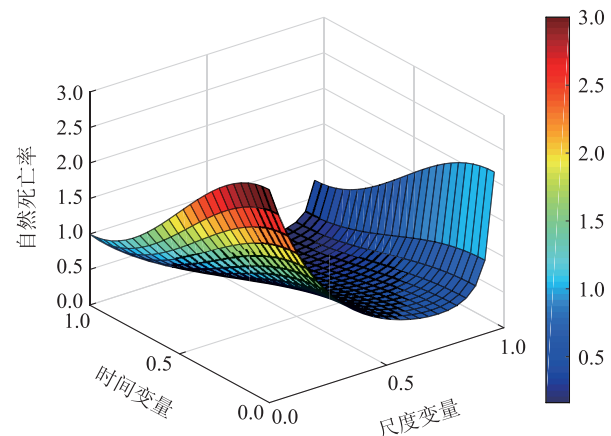


图2 自然死亡率

Fig.2 Natural mortality

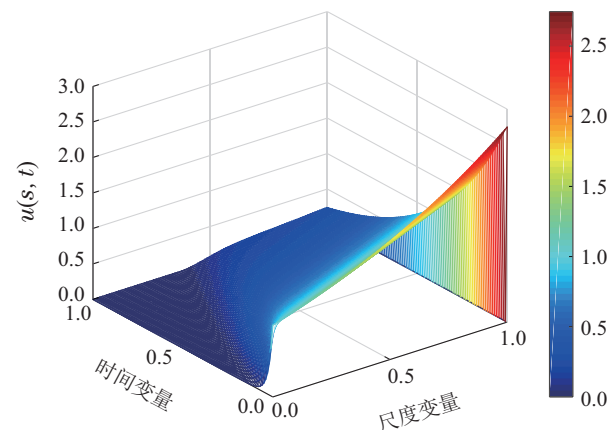


图3 系统(3)的数值解

Fig.3 The numerical solution of system (3)

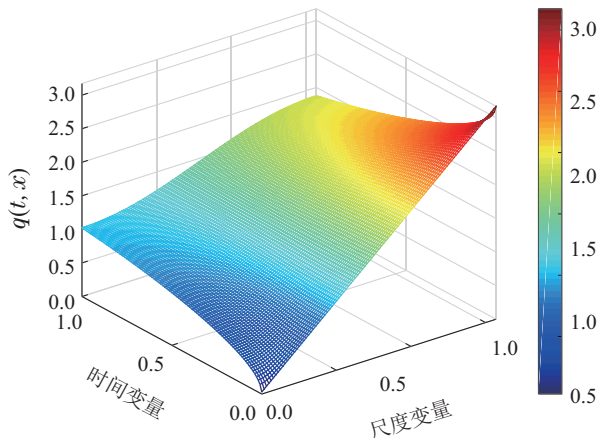


图4 系统(4)的数值解

Fig.4 The numerical solution of system (4)

对于自然出生率和死亡率的变化趋势, 由图1–2可知, 当害鼠达到中等尺度时其出生率最高, 当尺度达到其最大或者最小时其死亡率最高, 这符合实际情形, 因此参数 $\beta(s, t)$ 和 $\mu_0(s, t)$ 的选取合理. 在模拟过程中还发现, 随着时间的增加, $\beta(s, t)$ 和 $\mu_0(s, t)$ 呈现周期性变化.

6 结论

系统(2)的解关于尺度和空间位置可分离, 在一组并不苛刻的假设条件下, 定理1表明存在唯一的非负有界解. 接着, 第3节和第4节分别给出了最优策略的存在性和必要性条件. 最后, 通过数值模拟主要验证了第2节理论结果的正确性. 在实际应用时, 结合状态系统(2)和共轭系统(16)计算出最优状态、最优指标和 $J(\alpha^*)$. 由定理3得到以下结论: 当 $\delta_2\beta(s, t)m(s, t)\xi(0, t, x) + \delta_1\xi(s, t, x) < 1$ 时, 即害鼠的有效繁殖率较低时, 不需要投放雌性不育剂; 当 $\delta_2\beta(s, t)m(s, t)\xi(0, t, x) + \delta_1\xi(s, t, x) > 1$ 时, 即害鼠的有效繁殖率较高时, 对害鼠种群进行干预控制其出生率, 需要投放雌性不育剂, 且投放量 L 为最优.

容易验证, 当 $g(s, t) \equiv 1, \forall (s, t) \in Q_3$ 时, 本文讨论的内容即为具有扩散的年龄结构种群系统的相应结果.

参考文献:

- [1] LIU Hanwu, ZHOU Li, LIU Wei, et al. Theoretical model of ochotona curzonina control via contraception. *Chinese Journal of Ecology*, 2008, 27(7): 1238 – 1243.
(刘汉武, 周立, 刘伟, 等. 利用不育技术防治高原鼠兔的理论模型. 生态学杂志, 2008, 27(7): 1238 – 1243.)
- [2] SHI Dazhao, GUO Yongwang, SU Hongtian. A progress of rodent and its control in the agriculture and animal husbandry. *Chinese Journal of Vector Biology and Control*, 2009, 20(6): 499 – 501.
(施大钊, 郭永旺, 苏红田. 农牧业鼠害及控制进展. 中国媒介生物学及控制杂志, 2009, 20(6): 499 – 501.)

- [3] LÜ Jiang, ZHANG Fengqin, LIU Hanwu, et al. Dynamic model of bandicoot population with competitive reproductive interference under virus-vectored immunocontraception control. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2013, 30(2): 263 – 270.
(吕江, 张凤琴, 刘汉武, 等. 具有竞争性繁殖干扰的不育控制害鼠种群模型. 工程数学学报, 2013, 30(2): 263 – 270.)
- [4] ANITA S. *Analysis and Control of Age-Dependent Population Dynamics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [5] ZHAO Chun, WANG Miansen, ZHAO Ping. The well posedness and the optimal harvesting for a class of population dynamics. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2005, 25(1): 1 – 12.
(赵春, 王绵森, 赵平. 一类种群系统的适定性及最优收获问题. 系统科学与数学, 2005, 25(1): 1 – 12.)
- [6] LUO Zhixue, LI Muchun. Optimal control for linear population dynamics with age-dependence spatial structure and diffusion. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2006, 23(4): 641 – 646.
(雒志学, 李沐春. 具有扩散和年龄结构种群动力系统的最优控制. 工程数学学报, 2006, 23(4): 641 – 646.)
- [7] LUO Z X. Optimal harvesting problem for an age-dependent n-dimensional food chain diffusion model. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 186: 1742 – 1752.
- [8] LUO Z X. Optimal harvesting problem for an age-dependent n-dimensional competing system with diffusion. *International Journal of Biomathematics*, 2008, 1(2): 133 – 145.
- [9] WU Xiulan, FU Jun. Optimal control for age-dependent predator-prey population dynamics with diffusion. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2010, 48(4): 545 – 550.
(吴秀兰, 付军. 具有年龄结构和空间扩散的捕食与被捕食种群系统的最优控制. 吉林大学学报(理学版), 2010, 48(4): 545 – 550.)
- [10] LIU Jiangbi, LUO Zhixue. Optimal control for a nonlinear diffusion system with age-dependent. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2016, 51(5): 136 – 142.
(刘江璧, 雒志学. 具有年龄结构非线性扩散系统的最优控制. 山东大学学报(理学版), 2016, 51(5): 136 – 142.)
- [11] YUN Xiaoju, WANG Zhanping. Optimal control for age-structured nonlinear time-varying population diffusion system in a polluted environment. *Mathematica Applicata*, 2018, 31(3): 621 – 630.
(袁晓菊, 王战平. 污染环境中具有年龄结构的非线性时变种群扩散系统的最优控制. 应用数学, 2018, 31(3): 621 – 630.)
- [12] KATO N. Linear size-structured population models with spacial diffusion and optimal harvesting problems. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2014, 9(4): 122 – 130.
- [13] LI Na, LUO Zhixue. Optimal control for competing species with size-structure and diffusion. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2021, 56(12): 1 – 9.
(李娜, 雒志学. 基于扩散和尺度结构竞争种群模型的最优控制. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(12): 1 – 9.)
- [14] BARBU V, IANNELLI M. Optimal control of population dynamics. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1999, 102(1): 1 – 14.

作者简介:

张泰年 博士研究生, 目前研究方向为数学生态学以及最优控制理论, E-mail: tn_zhang91@163.com;

雒志学 教授, 目前研究方向为生物数学以及最优控制理论, E-mail: luozhixue2009@163.com;

王汝军 副教授, 目前研究方向为算子理论以及数值计算, E-mail: wangrujun711@163.com.