

二阶混杂多智能体系统的安全二分一致性

吴佳慧¹, 朱韵茹^{1†}, 郑元世¹, 王怀柱²

(1. 西安电子科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710071; 2. 宁夏大学 智能工程与技术学院, 宁夏 中卫 755000)

摘要: 本文在合作-竞争网络下针对一类由二阶连续时间个体和离散时间个体构成的混杂多智能体系统, 研究了系统中存在恶意个体情况下的安全二分一致性问题。首先, 在假设智能体的恶意邻居数量上限已知的情况下, 基于删除邻居信息中极端值的思想, 设计了一种安全二分一致性容错算法。其次, 基于鲁棒图性质进行系统转换, 运用图论、矩阵论等分析工具得到了系统实现安全二分一致性的图条件。最后, 通过仿真实例验证了所得结果的有效性。

关键词: 混杂多智能体系统; 恶意个体; 安全二分一致性; 容错算法

引用格式: 吴佳慧, 朱韵茹, 郑元世, 等. 二阶混杂多智能体系统的安全二分一致性. 控制理论与应用, 2023, 40(10): 1821–1830

DOI: 10.7641/CTA.2022.20099

Secure bipartite consensus of second-order hybrid multi-agent systems

WU Jia-hui¹, ZHU Yun-ru^{1†}, ZHENG Yuan-shi¹, WANG Huai-zhu²

(1. School of Mechano-Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China;

2. School of Intelligent Engineering and Technology, Ningxia University, Zhongwei Ningxia 755000, China)

Abstract: This paper investigates the secure bipartite consensus problem for hybrid multi-agent systems consisting of second-order continuous-time agents and discrete-time agents under a cooperative-competitive network with malicious agents. Firstly, under the assumption that the upper bound of the number of malicious agents in each normal agent's neighborhood is known, a secure bipartite consensus fault-tolerant algorithm is designed based on the idea of deleting the extreme values received from neighbors. Secondly, the system transformation is performed based on the properties of robust graph, and a sufficient condition on network topology is obtained for the achievement of secure bipartite consensus by using graph theory and matrix theory. Finally, a numerical simulation verifies the effectiveness of the result.

Key words: hybrid multi-agent systems; malicious agents; secure bipartite consensus; fault-tolerant algorithm

Citation: WU Jiahui, ZHU Yunru, ZHENG Yuanshi, et al. Secure bipartite consensus of second-order hybrid multi-agent systems . *Control Theory & Applications*, 2023, 40(10): 1821 – 1830

1 引言

在过去的几十年里, 一致性问题作为协同控制的基本问题受到了广泛研究。一致性问题是多个智能体就某些状态量渐进地或在有限时间内趋于相同, 其在工程技术领域有着广泛的应用, 包括耦合振荡器同步^[1-2]、群集^[3-4]和编队控制^[5-6]等。然而, 智能体的自治性、异构性和开放性等特性, 使得多智能体系统往往面临着一些潜在的威胁。当一些智能体遭遇恶意攻击或者出现故障时, 将不再按照预先定义的协议运行, 这会导致系统无法收敛或收敛值超出可允许范围。因此, 设计合适的容错算法, 使系统在受到恶意攻击或发生故障时具有一定的恢复能力而仍能最终收敛到一个安全范围具有重要的意义。

一致容错算法较早可以追溯到1982年Lamport等人^[7]提出的拜占庭将军问题, 针对这个问题, 作者得出在一定的通信条件下, 若系统中有 f 个恶意个体, 想要不影响其他正常个体达成一致, 则整个系统中至少需要 $3f + 1$ 个个体, 如果使用数字签名机制, 则至少需要 $2f + 1$ 个个体。后来Dolev等人^[8]将拜占庭将军问题涉及的布尔值扩展到实数值, 用图的连通度来衡量网络拓扑, 得出系统要容忍 f 个恶意个体, 网络的连通度不能低于 $2f + 1$ 。然而传统的连通度指标不足以描述仅使用局部信息交互的网络, 于是Leblanc等人^[9]提出了鲁棒图(robust graph)概念来表征网络拓扑结构, 并使用加权MSR(mean-subsequence-reduced)算法得出了一阶离散多智能体系统实现安全一致性的网

收稿日期: 2022-02-07; 录用日期: 2022-11-14。

[†]通信作者. E-mail: zhuruu@163.com.

本文责任编辑: 左志强。

国家自然科学基金项目(61962049, 61773303), 陕西省自然科学基础研究计划项目(2022JC-46, 2022JM-343)资助。

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61962049, 61773303) and the Natural Science Basic Research Program of Shaanxi (2022JC-46, 2022JM-343).

络拓扑条件。之后,学者们针对各种具有不同动力学的多智能体系统,对W-MSR算法进行了改进,并基于鲁棒图的概念,给出了系统实现安全一致性的条件,比如一阶多智能体系统^[10-14]、二阶多智能体系统^[15-18]、切换多智能体系统^[19]和异构多智能体系统^[20]等。在文献[11]中,作者考虑了数字系统中的量化因素,针对一阶多智能体系统,提出了基于量化信息的MSR算法,得到了系统实现安全一致性的条件。在文献[12]中,作者将事件驱动机制和MSR算法相结合设计容错算法,不仅解决了一阶多智能体系统的安全一致性问题,还大大减少了系统的通信负担。文献[18]则将文献[12]的工作推广到合作-竞争网络下的二阶多智能体系统。文献[13]针对一阶离散多智能体系统,改进MSR算法,解决了系统在存在恶意个体情况下的安全分组一致性问题。文献[14]针对具有领导者的多智能体系统,在MSR算法中引入滑动窗口,解决了系统在时变网络下的领导者-跟随者安全一致性问题。

尽管关于多智能体系统安全一致性问题的研究成果已经很丰富,但上述研究都是针对仅具有合作关系的多智能体系统。然而,现实世界中往往还存在竞争关系,特别是社交网络。Altafini^[21]在2013年针对合作-竞争多智能体网络提出了二分一致性的概念。二分一致性指的是智能体最终会分为两组,分别收敛到两个相反的值。这种具有合作关系又有竞争关系的网络一般建模为符号图。随后,合作-竞争多智能体系统的二分一致问题引起了广泛研究^[22-24]。但实际上,安全二分一致性问题也非常重要的。比如商场上的两家企业,内部的合作有利于企业利益最大化,而企业之间的竞争有利于促进产业的发展。但如果有恶意个体打破了这种“二分”的稳定,不仅可能使企业失去动力,导致效益不高而倒闭,还可能导致整个产业陷入混乱。同时,目前大多数安全一致性研究中的正常个体都具有相同的动力学,然而,在现实世界的群体中,个体往往是存在差异的,比如机器蟑螂与蟑螂组成的群体^[25]、不同类机器人组成的群体等。文献[25]通过实验验证了机器蟑螂和蟑螂可通过交互最终形成集体决策,该实验结果表明可利用具有自主性的智能设备来控制生物的行为,这具有重要的理论和实践意义。因此,许多学者开始研究这种具有混杂特征的多智能体系统。Zheng等人在文献[26]中提出了一类由一阶连续时间和离散时间个体构成的混杂多智能体系统模型,设计了3种分布式协议,利用图论和矩阵论等工具给出了系统实现一致性的充要条件。随着越来越多学者们的关注,目前关于混杂多智能体系统的研究已有不少成果^[27-30]。近期,文献[31]针对具有恶意个体的一阶混杂多智能体系统,设计了安全一致性算法,给出了系统实现安全一致性的图条件。

综合以上考虑,本文研究二阶混杂多智能体系统在合作-竞争网络下的安全二分一致性问题。本文假设每个个体的邻居中至多有 f 个恶意个体,然后基于MSR算法中删掉极端信息的思想以及对个体能力差异的考虑,设计了一种混杂安全二分一致性容错算法。在该算法下,基于鲁棒图的性质,通过系统转换,将含有恶意个体的系统等价为只含有正常个体的系统。最后利用图论以及Sarymsakov矩阵的性质给出了系统实现安全二分一致性的图条件。

数学符号说明:本文中, $\mathbb{R}(\mathbb{R}^+)$, $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}^+)$ 分别代表实数(正实数), 整数(正整数); \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^{m \times n}$ 分别代表 n 维向量和 $m \times n$ 维的矩阵; 假设 S 是集合, 则 $|S|$ 表示集合 S 中元素的个数, $S_1 \setminus S_2 = \{s : s \in S_1 \cap s \notin S_2\}$ 表示属于集合 S_1 但不属于集合 S_2 的元素的集合; 令 $\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 表示对角线上元素分别为 a_1, a_2, \dots, a_n 的对角矩阵; $\text{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数; 设一集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 则 X 的凸包定义为

$$\text{Conv}X = \left\{ \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \mid \sum_{i=1}^n \mu_i = 1, \mu_i \in [0, 1] \right\}.$$

2 预备知识

2.1 图论

用 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 代表符号有向图, 其中: $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示节点集, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示边集, $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示权重邻接矩阵。如果 $(j, i) \notin \mathcal{E}$, 则认为节点 i 无法收到节点 j 的信息, 即 $a_{ij} = 0$, 否则认为节点 i 可以收到节点 j 的信息, 即 $a_{ij} \neq 0$ 。此外, $a_{ij} > 0$ 表示节点 i 与节点 j 是合作关系, $a_{ij} < 0$ 表示节点 i 与节点 j 是竞争关系, $a_{ii} > 0$ 表示节点 i 有自环。本文假定对 $\forall i, j \in \mathcal{V}$, 始终有 $a_{ij}a_{ji} \geq 0$ 。令 $\mathcal{N}_i = \{j : (j, i) \in \mathcal{E}\}$ 表示节点 i 的邻居集。在有向图中, 节点 i_1 到节点 i_k 的路径是指由不同节点构成的一条有向边序列 $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$, 其中 $i_j \in \mathcal{V}$ 。如果图 \mathcal{G} 中存在一个节点到其他节点都有路径, 则称该图有有向生成树。

假设 $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ 代表图 \mathcal{G} 的顶点集, $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ 代表图 \mathcal{G} 的边集。对于一个 $n \times n$ 的矩阵 A , 令 $\mathcal{G}(A)$ 表示与矩阵 A 相关联的有向图, 其中当且仅当 $a_{ij} \neq 0$ 有 $(j, i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}(A))$ 。如果一矩阵 $A = [a_{ij}]$ 的所有元素非负且行和都为1, 则称其为行随机矩阵。

定义 1 (结构平衡)^[21] 给定一符号有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$, 如果其节点集 \mathcal{V} 可以划分为两个子集 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ ($\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}, \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$), 对于 $\forall i, j \in \mathcal{V}_u$ ($u \in \{1, 2\}$) 有 $a_{ij} \geq 0$, 而对 $\forall i \in \mathcal{V}_u, j \in \mathcal{V}_q$ ($u, q \in \{1, 2\}, u \neq q$) 有 $a_{ij} \leq 0$, 则称图 \mathcal{G} 是结构平衡的。

引理 1^[21] 符号有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 是结构平衡的当且仅当存在一个对角矩阵 $P = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ ($\sigma_i \in \{\pm 1\}$) 使得 $P^{-1}AP$ 的所有元素都非负, 即

$$\sigma_i \sigma_j a_{ij} \geq 0.$$

定义 2 (r -鲁棒图)^[9] 给定一有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$, 对于 \mathcal{V} 的任意两个非空不相交子集 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, 若至少有一个集合 \mathcal{V}_p ($p \in \{1, 2\}$) 存在至少一个节点 i , 其在自身集合外部有 r 个邻居节点, 即 $|\mathcal{N}_i \setminus \mathcal{V}_p| \geq r$, 则称图 \mathcal{G} 是 r -鲁棒图.

定义 3 (Sarymsakov 矩阵)^[17] 给定一行随机矩阵 A , 对任意子集 $\mathcal{V}_1 \in \mathcal{V}(\mathcal{G}(A))$, 定义集合

$$\mathcal{J}_A(\mathcal{V}_1) = \{j : \text{对于某个 } i \in \mathcal{V}_1 \text{ 有 } a_{ij} > 0\}.$$

任意给定一对非空不相交的子集 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathcal{V}(\mathcal{G}(A))$, 若 1) $\mathcal{J}_A(\mathcal{V}_1) \cap \mathcal{J}_A(\mathcal{V}_2) \neq \emptyset$ 和 2) $\mathcal{J}_A(\mathcal{V}_1) \cap \mathcal{J}_A(\mathcal{V}_2) = \emptyset$ 且 $|\mathcal{J}_A(\mathcal{V}_1) \cup \mathcal{J}_A(\mathcal{V}_2)| > |\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2|$ 这两个条件中至少有一条成立, 则称矩阵 A 是 Sarymsakov 矩阵.

引理 2^[17] 对于任意 Sarymsakov 矩阵 A , 其关联图 $\mathcal{G}(A)$ 有有向生成树. 此外, 如果 $\mathcal{G}(A)$ 有有向生成树, 并且在每个顶点上都有自环, 则 A 为 Sarymsakov 矩阵.

引理 3^[17] 给定一个由行随机矩阵构成的紧集 A , 其中 A_{i_1}, A_{i_2}, \dots 是 A 中元素构成的任一矩阵序列. 若存在一个整数 $\alpha \geq 1$ 对每个 $k \geq \alpha$ 和 $\forall A_{i_j} \in A$, $1 \leq j \leq k$ 都有矩阵 $A_{i_k} A_{i_{k-1}} \cdots A_{i_1}$ 是 Sarymsakov 矩阵, 则存在一列向量 y 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{i_k} A_{i_{k-1}} \cdots A_{i_1} = 1y^T$.

引理 4^[27] 令 $F(x) = e^{hx}$, $G(x) = \frac{e^{hx} - 1}{x}$, $H(x) = x - xe^{hx}$, 其中 $h > 0$ 是一个常数, 则 $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调递增的.

2.2 问题描述

本文研究由 n 个智能体构成的混杂多智能体系统, 其通信拓扑用符号有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 刻画, 一个节点表示一个智能体. 网络中的节点分为两类: 正常节点和恶意节点, 并令 \mathcal{V}_N 表示正常节点集, \mathcal{V}_M 表示恶意节点集, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_N \cup \mathcal{V}_M$, $\mathcal{V}_N \cap \mathcal{V}_M = \emptyset$. 考虑到智能体的多样性, 本文假定系统中正常智能体有些具有连续时间动力学, 有些具有离散时间动力学, 令 $\mathcal{V}_c = \{1, 2, \dots, n_1\}$ 为具有二阶连续时间动力学的正常节点集, $\mathcal{V}_d = \{n_1, n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$ 为具有二阶离散时间动力学的正常节点集, $\mathcal{V}_N = \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_d$. 正常节点的动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t), \end{cases} \quad i \in \mathcal{V}_c, \quad (1a)$$

$$\begin{cases} x_i(t_{k+1}) = x_i(t_k) + hv_i(t_k), \\ v_i(t_{k+1}) = v_i(t_k) + hu_i(t_k), \end{cases} \quad i \in \mathcal{V}_d, \quad (1b)$$

其中: $x_i, v_i, u_i \in \mathbb{R}$ 分别为智能体 i 的位置、速度和控制输入; $t_k = kh$, $h > 0$ 为采样周期.

本文假设每个正常节点的邻居集合中最多有 f 个恶意节点, 即对 $\forall i \in \mathcal{V}_N$ 有 $|\mathcal{N}_i \cap \mathcal{V}_M| \leq f$, 且恶意节点可以不按照上述动力学模型更新状态, 而是以任意的改变自身的状态值.

注 1 需要注意, 本文主要考虑智能体之间都是通过感知或广播通信的方式进行交互. 因此, 恶意节点在同一时刻给不同的邻居发送的是相同的值. 此外, 为了防止暴露自己是恶意节点, 本文中的恶意节点都会在规定的交互时刻给邻居发送信息.

定义 4 (安全二分一致性) 如果二阶混杂多智能体系统(1)在任意给定的初始条件下满足如下两个条件:

1) 有效性: 对任意 $i \in \mathcal{V}_N$, $t \geq 0$, 存在一个区间 Ω 满足 $x_i(t) \in \Omega$;

2) 二分一致性:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_i(t_k)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_j(t_k)|, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} v_i(t_k) = 0, \end{cases} \quad i, j \in \mathcal{V}_N, \quad (2a)$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_j(t)|, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0. \end{cases} \quad i, j \in \mathcal{V}_c, \quad (2b)$$

则称系统(1)达成了安全二分一致性.

2.3 安全二分一致性容错算法

为了节省通信成本, 本文假定智能体之间的交互只发生在离散时刻 t_k 处, 并且考虑到实际应用中智能体的软硬件配置可能不同, 假设有些连续时间智能体可实时获得自身信息, 有些只在采样时刻获得自身信息. 此外, 由于网络中存在恶意节点, 且正常节点只知道自己的邻居中至多有 f 个恶意节点, 为了减轻恶意节点的影响, 正常节点在更新之前需要对邻居信息进行筛查. 因此, 本文借鉴文献[9]中的 W-MSR 算法思想, 为正常节点设计了如下安全二分一致性容错算法:

步骤 1 节点 $i \in \mathcal{V}_N$ 在每个采样时刻 t_k 处收集邻居的信息 $\text{sgn } a_{ij} x_j(t_k) + \frac{k_2}{k_1} \text{sgn } a_{ij} v_j(t_k)$, 并将其升序排列, 形成序列 $\mathcal{I}_i(t_k)$.

步骤 2 从序列 $\mathcal{I}_i(t_k)$ 中去掉严格比 $x_i(t_k) + \frac{k_2}{k_1} v_i(t_k)$ 大的最大的 f 个值, 若这样的值不足 f 个, 则将这些比 $x_i(t_k) + \frac{k_2}{k_1} v_i(t_k)$ 大的值都去掉; 从序列 $\mathcal{I}_i(t_k)$ 中去掉严格比 $x_i(t_k) + \frac{k_2}{k_1} v_i(t_k)$ 小的最小的 f 个值, 同样, 若这样的值不足 f 个, 则将这些比 $x_i(t_k) + \frac{k_2}{k_1} v_i(t_k)$ 小的值都去掉. 令 $\mathcal{B}_i(t_k)$ 为剩下值对应节点构成的集合.

步骤3 节点*i*使用如下协议更新:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(t) = k_1 \sum_{j \in \mathcal{B}_i(t_k)} |a_{ij}| (\operatorname{sgn} a_{ij} x_j(t_k) - x_i(t_k)) + \\ \quad k_2 \sum_{j \in \mathcal{B}_i(t_k)} |a_{ij}| (\operatorname{sgn} a_{ij} v_j(t_k) - v_i(t_k)) - \\ \quad k_0 v_i(t_k), \quad i \in \mathcal{V}_c^1, t \in (t_k, t_{k+1}], \\ u_i(t) = k_1 \sum_{j \in \mathcal{B}_i(t_k)} |a_{ij}| (\operatorname{sgn} a_{ij} x_j(t_k) - x_i(t_k)) + \\ \quad k_2 \sum_{j \in \mathcal{B}_i(t_k)} |a_{ij}| (\operatorname{sgn} a_{ij} v_j(t_k) - v_i(t_k)) - \\ \quad k_0 v_i(t_k), \quad i \in \mathcal{V}_c^2, t \in (t_k, t_{k+1}], \\ u_i(t_k) = k_1 \sum_{j \in \mathcal{B}_i(t_k)} |a_{ij}| (\operatorname{sgn} a_{ij} x_j(t_k) - x_i(t_k)) + \\ \quad k_2 \sum_{j \in \mathcal{B}_i(t_k)} |a_{ij}| (\operatorname{sgn} a_{ij} v_j(t_k) - v_i(t_k)) - \\ \quad k_0 v_i(t_k), \quad i \in \mathcal{V}_d, \end{array} \right. \quad (3)$$

其中: \mathcal{V}_c^1 为只能在采样时刻获得自身信息的连续时间智能体集合, \mathcal{V}_c^2 为可实时获得自身信息的连续时间智能体集合, $\mathcal{V}_c^1 \cup \mathcal{V}_c^2 = \mathcal{V}_c$, $\mathcal{V}_c^1 \cap \mathcal{V}_c^2 = \emptyset$; $|a_{ij}|$ 表示边权重的绝对值; $k_0 > 0$ 是速度阻尼增益; $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ 分别是位置和速度的耦合系数.

3 主要结果

由于在容错算法的步骤2中去掉的是可疑信息而非一定是恶意节点的信息, 即 $\mathcal{B}_i(t_k)$ 中仍有可能存在恶意节点, 故无法直接利用传统分析系统矩阵的方法进行分析. 为了可以使用矩阵论工具分析系统的安全二分一致性, 本文先给出以下引理.

引理5 对于多智能体系统(1), 如果其通信拓扑 \mathcal{G} 是 $(2f+1)$ -鲁棒图, 则在安全二分一致性容错算法下, 存在 $n_1 + n_2$ 阶权重矩阵 $\bar{\mathcal{A}}(t_k) = [\bar{a}_{ij}(t_k)]$ 使得协议(3)和如下协议等价:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(t) = k_1 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\operatorname{sgn}(\bar{a}_{ij}(t_k)) x_j(t_k) - \\ \quad x_i(t_k)) + k_2 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\operatorname{sgn}(\bar{a}_{ij}(t_k)) \times \\ \quad v_j(t_k) - v_i(t_k)) - k_0 v_i(t_k), \\ \quad i \in \mathcal{V}_c^1, t \in (t_k, t_{k+1}], \\ u_i(t) = k_1 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\operatorname{sgn}(\bar{a}_{ij}(t_k)) x_j(t_k) - \\ \quad x_i(t_k)) + k_2 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\operatorname{sgn}(\bar{a}_{ij}(t_k)) \times \\ \quad v_j(t_k) - v_i(t_k)) - k_0 v_i(t_k), \\ \quad i \in \mathcal{V}_c^2, t \in (t_k, t_{k+1}], \\ u_i(t_k) = k_1 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\operatorname{sgn}(\bar{a}_{ij}(t_k)) x_j(t_k) - \\ \quad x_i(t_k)) + k_2 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\operatorname{sgn}(\bar{a}_{ij}(t_k)) \times \\ \quad v_j(t_k) - v_i(t_k)) - k_0 v_i(t_k), \quad i \in \mathcal{V}_d, \end{array} \right. \quad (4)$$

其中 $\mathcal{Q}_i(t_k) = \{j : \bar{a}_{ij}(t_k) \neq 0\}$ 且 $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}}(t_k))$ 具有有向生成树.

证 由 \mathcal{G} 是 $(2f+1)$ -鲁棒图可知每个节点至少有 $2f+1$ 个邻居. 根据安全二分一致性容错算法的步骤2可知, 在采样时刻 t_k 处, 正常节点 *i* 至多会去掉 $2f$ 个邻居信息, 因此至少有一个邻居的信息被留下用于更新, 即 $\mathcal{B}_i(t_k) \neq \emptyset$. 首先, 对于 $j \in \mathcal{V}_N \setminus \mathcal{B}_i(t_k)$, 令 $\bar{a}_{ij}(t_k) = 0$, 对于 $j \in \mathcal{B}_i(t_k) \cap \mathcal{V}_N$, 令 $\bar{a}_{ij}(t_k) = a_{ij}(t_k)$. 其次, 如果 $\mathcal{B}_i(t_k)$ 中存在恶意节点, 即 $\exists j \in \mathcal{B}_i(t_k) \cap \mathcal{V}_M$, 则由安全二分一致性容错算法可知, 一定存在一个正常节点 $p \in \mathcal{N}_i$, 使得 *i* 所获得的 *j* 节点的信息 $\operatorname{sgn} a_{ij} x_j(t_k) + \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sgn} a_{ij} v_j(t_k)$ 位于自身信息 $x_i(t_k) + \frac{k_2}{k_1} v_i(t_k)$ 和所获得的 *p* 节点的信息 $\operatorname{sgn} a_{ip} x_p(t_k) + \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sgn} a_{ip} v_p(t_k)$ 所构成的区间内, 即存在 $0 \leq \mu \leq 1$ 使得

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} a_{ij} x_j(t_k) + \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sgn} a_{ij} v_j(t_k) = \\ \mu (\operatorname{sgn} a_{ip} x_p(t_k) + \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sgn} a_{ip} v_p(t_k)) + \\ (1-\mu)(x_i(t_k) + \frac{k_2}{k_1} v_i(t_k)), \end{aligned} \quad (5)$$

因此, 对 $\bar{a}_{ip}(t_k)$ 进行再次更新. 令

$$\begin{aligned} |\bar{a}_{ip}(t_k)| &= |\bar{a}_{ip}(t_k)| + \mu |a_{ij}(t_k)|, \\ \operatorname{sgn}(\bar{a}_{ip}(t_k)) &= \operatorname{sgn}(a_{ip}(t_k)). \end{aligned}$$

按照以上方法更新完毕后, 节点 *i* 的新邻居集可定义为 $\mathcal{Q}_i(t_k) = \{j : \bar{a}_{ij}(t_k) \neq 0\}$, 显然 $\mathcal{Q}_i(t_k) \in \mathcal{N}_i \cap \mathcal{V}_N$. 再令 $\bar{a}_{ii}(t_k) = 1 - \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)|$, 则可以得到一个新的邻接矩阵 $\bar{\mathcal{A}}(t_k) = [\bar{a}_{ij}(t_k)]_{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$. 根据上述操作, 易知协议(4)与协议(3)等价且 $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}}(t_k))$ 中无恶意节点. 下面证明 $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}}(t_k))$ 具有有向生成树.

令 $\mathcal{H}(t_k) = [[\bar{a}_{ij}(t_k)]]$, 易知 $\mathcal{H}(t_k)$ 是行随机矩阵. 因为权重的正负不影响网络的结构, 故如果 $\mathcal{G}(\mathcal{H}(t_k))$ 有生成树, 则 $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}}(t_k))$ 也有生成树. 考虑 \mathcal{V}_N 中任意一对非空不相交的子集 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, 由 $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ 是 $(2f+1)$ -鲁棒图可知, 至少存在一个节点 $i \in \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ 在图 $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ 中有 $2f+1$ 个邻居来自自身集合外部. 不失一般性, 假设 $i \in \mathcal{V}_1$ 有 $2f+1$ 个邻居来自 \mathcal{V}_1 外部. 由于在安全二分一致性容错算法的步骤2中, 节点 *i* 最多删除 $2f$ 个邻居的信息, 因此节点 *i* 至少保留一个来自集合 \mathcal{V}_1 外部的邻居信息, 记此邻居节点为 *j*. 由前面的分析可知, 节点 *j* 要么是正常节点, 要么节点 *j* 的信息值可以用节点 *i* 的信息值和一个正常节点 $p \in \mathcal{N}_i \setminus \mathcal{V}_1$ 的信息值的凸组合表示. 因此, 在 $\mathcal{G}(\mathcal{H}(t_k))$ 中节点 *i* 至少有一个邻居节点 *p* 来自集合 \mathcal{V}_1 的外部.

注意到 $\bar{a}_{ll}(t_k) > 0, \forall l \in \mathcal{V}_N$, 所以, 对于 $\forall j \in \mathcal{V}_s$ 有 $j \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_s), s \in \{1, 2\}$, 因此 $p \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_1)$ 且 $|\mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_1)| \geq |\mathcal{V}_1| + 1$. 若 $p \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_2)$, 则

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_1) \cap \mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_2) \neq \emptyset.$$

若 $p \notin \mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_2)$ 且 $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_1) \cap \mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_2) = \emptyset$, 则

$|\mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_2)| \geq |\mathcal{V}_2|$, 从而 $|\mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_1) \cup \mathcal{F}_{\mathcal{H}(t_k)}(\mathcal{V}_2)| \geq |\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2| + 1$. 根据定义 3 可得 $\mathcal{H}(t_k)$ 是 Sarymsakov 矩阵, 再根据引理 2 可知 $\mathcal{G}(\mathcal{H}(t_k))$ 具有有向生成树, 因此 $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}}(t_k))$ 具有有向生成树. 证毕.

令 $d_i^{t_k} = \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)|$, $d_{\max} = \max_{i \in \mathcal{V}_N, k \geq 0} d_i^{t_k}$. 下面给出本文的主要结果.

定理 1 对于多智能体系统(1), 假定其通信拓扑 \mathcal{G} 是结构平衡的且 $k_0 > \frac{k_1}{k_2}, h < \min\{\frac{k_1}{k_2}, \frac{1}{k_0 + k_2 d_{\max}}\}$. 若 \mathcal{G} 是 $(2f + 1)$ -鲁棒图, 则系统(1)在协议(3)下可以达成安全二分一致性.

证 由引理 5 的证明过程可知, 安全二分一致性容错算法中未被去掉的恶意节点的状态值可以等价为其他两个正常节点状态值的凸组合, 而这一过程并不涉及正常节点之间边权的正负符号变换, 故不改变正常智能体之间的“合作”或“竞争”关系, 因此 $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}}(t_k))$ 在任意采样时刻都是结构平衡的, 由引理 1 可知在任意 t_k 时都存在一个对角矩阵 $\mathcal{P} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ 有 $\sigma_i \sigma_j \bar{a}_{ij}(t_k) = |\bar{a}_{ij}(t_k)|$. 令 $\hat{x}_i(t) = \sigma_i x_i(t)$, $\hat{v}_i(t) = \sigma_i v_i(t)$. 则对于 $i \in \mathcal{V}_c^1, t \in (t_k, t_{k+1}]$, 结合式(1a)和式(4)可得

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t) = & \\ & \hat{x}_i(t_k) + (t - t_k) \hat{v}_i(t_k) + \\ & \frac{(t - t_k)^2}{2} (k_1 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{x}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k))) + \\ & k_2 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{v}_j(t_k) - \hat{v}_i(t_k)) - k_0 \hat{v}_i(t_k), \end{aligned} \quad (6)$$

以及

$$\begin{aligned} \hat{v}_i(t) = & \\ & \hat{v}_i(t_k) + (t - t_k) (k_1 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{x}_j(t_k) - \\ & \hat{x}_i(t_k)) + k_2 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{v}_j(t_k) - \hat{v}_i(t_k)) - \\ & k_0 \hat{v}_i(t_k)). \end{aligned} \quad (7)$$

则当 $t = t_{k+1}$ 时有

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t_{k+1}) = & \\ & \hat{x}_i(t_k) + h \hat{v}_i(t_k) + \frac{h^2}{2} (k_1 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{x}_j(t_k) - \\ & \hat{x}_i(t_k)) + k_2 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{v}_j(t_k) - \hat{v}_i(t_k)) - \end{aligned}$$

$$k_0 \hat{v}_i(t_k)), \quad (8)$$

以及

$$\begin{aligned} \hat{v}_i(t_{k+1}) = & \\ & \hat{v}_i(t_k) + h (k_1 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{x}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)) + \\ & k_2 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{v}_j(t_k) - \hat{v}_i(t_k)) - k_0 \hat{v}_i(t_k)). \end{aligned} \quad (9)$$

对于 $i \in \mathcal{V}_c^2, t \in (t_k, t_{k+1}]$ 有

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{x}}_i(t) = \dot{\hat{v}}_i(t) = & \\ & k_1 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{x}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)) + \\ & k_2 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{v}_j(t_k) - \dot{\hat{x}}_i(t_k)) - k_0 \dot{\hat{x}}_i(t), \end{aligned} \quad (10)$$

即

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{x}}_i(t) + (k_0 + k_2 d_i^{t_k}) \dot{\hat{x}}_i(t) + (k_1 d_i^{t_k}) \hat{x}_i(t) = & \\ \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (k_1 \hat{x}_j(t_k) + k_2 \hat{v}_j(t_k)). \end{aligned} \quad (11)$$

易知 $d_i^{t_k} \neq 0$, 故该微分方程的解如下:

$$\begin{cases} \hat{x}_i(t) = c_1 e^{r_1(t-t_k)} + c_2 e^{r_2(t-t_k)} + c_0, \\ \hat{v}_i(t) = c_1 r_1 e^{r_1(t-t_k)} + c_2 r_2 e^{r_2(t-t_k)}, \end{cases} \quad (12)$$

其中:

$$r_1 = \frac{-(k_0 + k_2 d_i^{t_k}) + \sqrt{(k_0 + k_2 d_i^{t_k})^2 - 4k_1 d_i^{t_k}}}{2},$$

$$r_2 = \frac{-(k_0 + k_2 d_i^{t_k}) - \sqrt{(k_0 + k_2 d_i^{t_k})^2 - 4k_1 d_i^{t_k}}}{2},$$

$$c_0 = \frac{\sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (k_1 \hat{x}_j(t_k) + k_2 \hat{v}_j(t_k))}{k_1 d_i^{t_k}},$$

$$c_1 = \frac{r_2 \hat{x}_i(t_k) - \hat{v}_i(t_k) - r_2 c_0}{r_2 - r_1},$$

$$c_2 = \frac{r_1 \hat{x}_i(t_k) - \hat{v}_i(t_k) - r_1 c_0}{r_1 - r_2},$$

$$r_1 + r_2 = -(k_0 + k_2 d_i^{t_k}), \quad r_1 r_2 = k_1 d_i^{t_k}, \quad r_2 < r_1 < 0.$$

则当 $t = t_{k+1}$ 时有

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t_{k+1}) = & c_1 e^{r_1 h} + c_2 e^{r_2 h} + c_0 = \\ & \hat{x}_i(t_k) + p_1^{t_k} \hat{v}_i(t_k) + k_2 p_2^{t_k} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| \hat{v}_j(t_k) + \\ & k_1 p_2^{t_k} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{x}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)), \end{aligned} \quad (13)$$

以及

$$\begin{aligned} \hat{v}_i(t_{k+1}) = & c_1 r_1 e^{r_1 h} + c_2 r_2 e^{r_2 h} = \\ & \hat{v}_i(t_k) + k_2 p_1^{t_k} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| \hat{v}_j(t_k) + \\ & k_1 p_1^{t_k} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{x}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)) + p_3^{t_k} \hat{v}_i(t_k). \end{aligned} \quad (14)$$

其中:

$$p_1^{t_k} = \frac{e^{r_1 h} - e^{r_2 h}}{r_1 - r_2},$$

$$p_2^{t_k} = \frac{(r_2 e^{r_1 h} - r_1 e^{r_2 h}) - (r_2 - r_1)}{(r_1 - r_2) r_1 r_2} =$$

$$\frac{e^{r_1 h} - 1}{r_1} - \frac{e^{r_2 h} - 1}{r_2},$$

$$p_3^{t_k} = \frac{(r_1 e^{r_1 h} - r_2 e^{r_2 h}) - (r_1 - r_2)}{(r_1 - r_2)} = \frac{(r_2 - r_2 e^{r_2 h}) - (r_1 - r_1 e^{r_1 h})}{r_1 - r_2},$$

因为 $r_1 > r_2$, 故由引理4可知 $p_1^{t_k} > 0$, $p_2^{t_k} > 0$, $p_3^{t_k} < 0$. 对于 $i \in \mathcal{V}_d$, 由式(1b)和式(4)可知

$$\hat{x}_i(t_{k+1}) = \hat{x}_i(t_k) + h\hat{v}_i(t_k), \quad (15)$$

以及

$$\hat{v}_i(t_{k+1}) =$$

$$\hat{v}_i(t_k) + h(k_1 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{x}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)) + k_2 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{v}_j(t_k) - \hat{v}_i(t_k)) - k_0 \hat{v}_i(t_k)). \quad (16)$$

下面引入新的变量 $\hat{y}_i(t_k) = \hat{x}_i(t_k) + \frac{k_2}{k_1} \hat{v}_i(t_k)$, 则

$\hat{v}_i(t_k) = \frac{k_1}{k_2} (\hat{y}_i(t_k) - \hat{x}_i(t_k))$. 对于 $i \in \mathcal{V}_c^1$, 根据式(8)–(9)有

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t_{k+1}) = & \\ & \hat{x}_i(t_k) + p_4^{t_k} (\hat{y}_i(t_k) - \hat{x}_i(t_k)) + \\ & \frac{k_1 h^2}{2} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{y}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)), \end{aligned} \quad (17)$$

以及

$$\hat{y}_i(t_{k+1}) =$$

$$\begin{aligned} & \hat{y}_i(t_k) + p_5^{t_k} (\hat{x}_i(t_k) - \hat{y}_i(t_k)) + \\ & \left(\frac{k_1 h^2}{2} + k_2 h\right) \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{y}_j(t_k) - \hat{y}_i(t_k)), \end{aligned} \quad (18)$$

其中:

$$p_4^{t_k} = -\frac{(k_0 k_1 + k_1 k_2 d_i^{t_k}) h^2}{2 k_2} + \frac{k_1 h}{k_2},$$

$$p_5^{t_k} = \frac{k_0 k_1 h^2}{2 k_2} + \frac{(k_0 k_2 - k_1) h}{k_2}.$$

因为 $h < \min\{\frac{k_1}{k_2}, \frac{1}{k_0 + k_2 d_{\max}}\}$, $k_0 > \frac{k_1}{k_2}$, 所以 $p_4^{t_k} > 0$, $p_5^{t_k} > 0$. 令 $f(h) = p_4^{t_k} + \frac{k_1 h^2}{2} d_i^{t_k} - 1$, $g(h) = p_5^{t_k} + \left(\frac{k_1 h^2}{2} + k_2 h\right) d_i^k - 1$. 对于 $f(h)$, 若 $f(h) = 0$ 则有

$$f(h) = -\frac{k_0 k_1}{2 k_2} h^2 + \frac{k_1}{k_2} h - 1 = 0, \quad (19)$$

其中: $\Delta = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \frac{2 k_0 k_1}{k_2} = \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_1}{k_2} - 2 k_0\right) < 0$, 因

此有 $f(h) < 0$, 即 $p_4^{t_k} + \frac{k_1 h^2}{2} d_i^{t_k} < 1$. 对于 $g(h)$ 有

$$\begin{aligned} g(h) = & \\ & \frac{k_1 (k_0 + k_2 d_i^{t_k})}{2 k_2} h^2 + (k_0 + k_2 d_i^{t_k} - \frac{k_1}{k_2}) h - 1 \leqslant \\ & \frac{k_1 (k_0 + k_2 d_{\max})}{2 k_2} h^2 + (k_0 + k_2 d_{\max} - \frac{k_1}{k_2}) h - 1 \leqslant \\ & \frac{k_1}{2 k_2} \frac{2}{h} h^2 + \left(\frac{1}{h} - \frac{k_1}{k_2}\right) h - 1 = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

因此有 $p_5^{t_k} + \left(\frac{k_1 h^2}{2} + k_2 h\right) d_i^k < 1$. 故可得

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t_{k+1}), \hat{y}_i(t_{k+1}) \in \\ \text{Conv}\{\hat{x}_i(t_k), \hat{y}_j(t_k) | j \in \mathcal{Q}_i(t_k) \cup \{i\}\}. \end{aligned}$$

对 $i \in \mathcal{V}_c^2$, 根据式(13)–(14) 有

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t_{k+1}) = & \\ & \hat{x}_i(t_k) + \frac{k_1}{k_2} p_1^{t_k} (\hat{y}_i(t_k) - \hat{x}_i(t_k)) + \\ & k_1 p_2^{t_k} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{y}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)), \end{aligned} \quad (21)$$

以及

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(t_{k+1}) = & \\ & \hat{y}_i(t_k) + (k_1 p_2^{t_k} + k_2 p_1^{t_k}) \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{y}_j(t_k) - \\ & \hat{y}_i(t_k)) + \left(-\frac{k_1 p_1^{t_k}}{k_2} - p_3^{t_k} - (k_1 p_2^{t_k} + k_2 p_1^{t_k}) d_i^{t_k}\right) \\ & (k_1 p_2^{t_k} d_i^{t_k}) (\hat{x}_i(t_k) - \hat{y}_i(t_k)). \end{aligned} \quad (22)$$

易知 $\frac{k_1}{k_2} p_1^{t_k} > 0$, $k_1 p_2^{t_k} |\bar{a}_{ij}(t_k)| > 0$, $(k_1 p_2^{t_k} + k_2 p_1^{t_k}) \times$

$|\bar{a}_{ij}(t_k)| > 0$, 且有

$$\begin{aligned} & -\frac{k_1 p_1^{t_k}}{k_2} - p_3^{t_k} - (k_1 p_2^{t_k} + k_2 p_1^{t_k}) d_i^{t_k} = \\ & \left(-\frac{k_1}{k_2} + k_0\right) p_1^{t_k} > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

再根据上式又可得

$$\begin{aligned} & \frac{k_1}{k_2} p_1^{t_k} + k_1 p_2^{t_k} d_i^{t_k} = \\ & (k_0 - \frac{k_1}{k_2}) p_1^{t_k} + \left(2 \frac{k_1}{k_2} - k_0\right) p_1^{t_k} + k_1 p_2^{t_k} d_i^{t_k} = \\ & \frac{k_1}{k_2} p_1^{t_k} - p_3^{t_k} - (k_1 p_2^{t_k} + k_2 p_1^{t_k}) d_i^{t_k} = \\ & \left(2 \frac{k_1}{k_2} - k_0\right) p_1^{t_k} + k_1 p_2^{t_k} d_i^{t_k} = \\ & -p_3^{t_k} - (k_2 d_i^{t_k} + k_0 - \frac{k_1}{k_2}) p_1^{t_k} = \end{aligned}$$

$$1 + \frac{(r_2 + k_2 d_i^{t_k} + k_0 - \frac{k_1}{k_2}) e^{r_2 h}}{r_1 - r_2} - \frac{(r_1 + k_2 d_i^{t_k} + k_0 - \frac{k_1}{k_2}) e^{r_1 h}}{r_1 - r_2} < 1, \quad (24)$$

以及

$$\begin{aligned} & (k_1 p_2^{t_k} + k_2 p_1^{t_k}) d_i^{t_k} - \frac{k_1 p_1^{t_k}}{k_2} - p_3^{t_k} - \\ & (k_1 p_2^{t_k} + k_2 p_1^{t_k}) d_i^{t_k} = \\ & \frac{(r_2 + \frac{k_1}{k_2}) e^{r_2 h} - (r_1 + \frac{k_1}{k_2}) e^{r_1 h}}{r_1 - r_2} + 1 < 1. \end{aligned} \quad (25)$$

故

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t_{k+1}), \hat{y}_i(t_{k+1}) \in \\ \text{Conv}\{\hat{x}(t_k), \hat{y}_j(t_k) | j \in \mathcal{Q}_i(t_k) \cup \{i\}\}. \end{aligned}$$

对于 $i \in \mathcal{V}_d$, 根据式(15)–(16)有

$$\hat{x}_i(t_{k+1}) = \hat{x}_i(t_k) + \frac{k_1 h}{k_2} (\hat{y}_i(t_k) - \hat{x}_i(t_k)), \quad (26)$$

以及

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(t_{k+1}) = \hat{y}_i(t_k) + (k_0 h - \frac{k_1}{k_2} h) (\hat{x}_i(t_k) - \hat{y}_i(t_k)) + \\ k_2 h \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{y}_j(t_k) - \hat{y}_i(t_k)). \end{aligned} \quad (27)$$

易知 $\frac{k_1 h}{k_2} < 1$, $k_0 h - \frac{k_1}{k_2} h > 0$ 及 $k_0 h - \frac{k_1}{k_2} h + k_2 h d_i^{t_k} < (k_0 + k_2 d_{\max} - \frac{k_1}{k_2}) h < 1$. 故可得 $\hat{x}_i(t_{k+1}) \in \text{Conv}\{\hat{x}_i(t_k), \hat{y}_i(t_k)\}$, $\hat{y}_i(t_{k+1}) \in \text{Conv}\{\hat{x}_i(t_k), \hat{y}_j(t_k) | j \in \mathcal{Q}_i(t_k) \cup \{i\}\}$.

令 $\hat{X} = [\hat{X}_c^T \ \hat{Y}_c^T \ \hat{X}_d^T \ \hat{Y}_d^T]^T$, 其中 $\hat{X}_c = [\hat{x}_1 \ \dots \ \hat{x}_{n_1}]^T$, $\hat{Y}_c = [\hat{y}_1 \ \dots \ \hat{y}_{n_1}]^T$, $\hat{X}_d = [\hat{x}_{n_1+1} \ \dots \ \hat{x}_{n_1+n_2}]^T$, $\hat{Y}_d = [\hat{y}_{n_1+1} \ \dots \ \hat{y}_{n_1+n_2}]^T$, 则可得式(17)–(18)(21)–(22)(26)–(27)的矩阵紧凑形式

$$\hat{X}(t_{k+1}) = \hat{\mathcal{W}}(t_k) \hat{X}(t_k). \quad (28)$$

由前面的分析易知矩阵 $\hat{\mathcal{W}}(t_k)$ 是行随机矩阵.

在系统(28)中, 通过将状态 \hat{x}_i 和 \hat{v}_i 结合在一起引入了一个新的状态变量 \hat{y}_i . 假设 \hat{y}_i 对应的节点序号为 i' , 则系统(28)对应的图 $\mathcal{G}(\hat{\mathcal{W}}(t_k))$ 中的节点集 $\mathcal{V}(\mathcal{G}(\hat{\mathcal{W}}(t_k))) = \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}'_c \cup \mathcal{V}_d \cup \mathcal{V}'_d$, $\mathcal{V}'_c = \{1', \dots, n'_1\}$, $\mathcal{V}'_d = \{(n_1 + 1)', \dots, (n_1 + n_2)'\}$. 此外, 边集 $\mathcal{E}(\mathcal{G}(\hat{\mathcal{W}}(t_k)))$ 有以下结论:

- 1) 对于任意 $i \in \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_d$, 都有 $(i, i'), (i', i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}(\hat{\mathcal{W}}(t_k)))$;
- 2) 对于任意 $i \in \mathcal{V}_c$, 若 $(j, i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}}(t_k)))$, 则 $(j', i), (j', i') \in \mathcal{E}(\mathcal{G}(\hat{\mathcal{W}}(t_k)))$;
- 3) 对于任意 $i \in \mathcal{V}_d$, 若 $(j, i) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}}(t_k)))$, 则 $(j', i') \in \mathcal{E}(\mathcal{G}(\hat{\mathcal{W}}(t_k)))$.

由引理5可知 $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}}(t_k))$ 有生成树, 即存在一个根节点 i 到其他节点都有路径. 假设在图 $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}}(t_k))$ 中, 节点 i 到 \mathcal{V}_N 中的节点 j 的路径为 $(i, j_1), (j_1, j_2), \dots, (j_s, j)$, 则根据图 $\mathcal{G}(\hat{\mathcal{W}}(t_k))$ 与图 $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{A}}(t_k))$ 中的边的关系, 可知在图 $\mathcal{G}(\hat{\mathcal{W}}(t_k))$ 中, 节点 i 到节点 j 存在路径 $(i, i'), (i', j_1'), (j_1', j_2'), \dots, (j_s', j'), (j', j)$. 很明显, 节点 i 到节点 i' 以及节点 i 到节点 j' 也存在路径. 因此 $\mathcal{G}(\hat{\mathcal{W}}(t_k))$ 也具有生成树.

根据引理2可知 $\hat{\mathcal{W}}(t_k)$ 是 Sarymsakov 矩阵. 由于 $\hat{X}(t_k) = \hat{\mathcal{W}}(t_{k-1}) \hat{\mathcal{W}}(t_{k-2}) \cdots \hat{\mathcal{W}}(t_0) \hat{X}(t_0)$, 而 Sarymsakov 矩阵在矩阵乘法下是封闭的^[32], 因此对任意 $k \geq 0$ 都有 $\hat{\mathcal{W}}(t_{k-1}) \hat{\mathcal{W}}(t_{k-2}) \cdots \hat{\mathcal{W}}(t_0)$ 是 Sarymsakov 矩阵, 由引理3可得系统(28)能达成一致, 即对 $\forall i, j \in \mathcal{V}_N$ 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t_k) - \hat{x}_j(t_k)| = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t_k) - \hat{y}_i(t_k)| = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{v}_i(t_k) = 0$. 下面分析连续时间动力学智能体在非采样点处的收敛情况. 对于 $i, j \in \mathcal{V}_c$, $t \in (t_k, t_{k+1}]$ 有

$$\begin{aligned} & |\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)| \leqslant \\ & |\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(t_k)| + |\hat{x}_i(t_k) - \hat{x}_j(t_k)| + \\ & |\hat{x}_j(t_k) - \hat{x}_j(t)|, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & |\hat{v}_i(t) - \hat{v}_j(t)| \leqslant \\ & |\hat{v}_i(t) - \hat{v}_i(t_k)| + |\hat{v}_i(t_k) - \hat{v}_j(t_k)| + \\ & |\hat{v}_j(t_k) - \hat{v}_j(t)|. \end{aligned} \quad (30)$$

若 $i \in \mathcal{V}_c^1$, 由式(6)–(7)可知

$$\begin{aligned} & |\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(t_k)| \leqslant \\ & h |\hat{v}_i(t_k)| + \frac{h^2}{2} (k_0 |\hat{v}_i(t_k)| + \\ & k_1 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |a_{ij}(t_k)| |\hat{x}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)| + \\ & k_2 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |a_{ij}(t_k)| |\hat{v}_j(t_k) - \hat{v}_i(t_k)|), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & |\hat{v}_i(t) - \hat{v}_i(t_k)| \leqslant \\ & h (k_0 |\hat{v}_i(t_k)| + k_1 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| |\hat{x}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)| + \\ & k_2 \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| |\hat{v}_j(t_k) - \hat{v}_i(t_k)|). \end{aligned} \quad (32)$$

若 $i \in \mathcal{V}_c^2$, 由式(12)可知

$$\begin{aligned} & |\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(t_k)| = \\ & |c_1 e^{r_1(t-t_k)} + c_2 e^{r_2(t-t_k)} + c_0 - \hat{x}_i(t_k)| = \\ & \left| \frac{e^{r_1(t-t_k)} - e^{r_2(t-t_k)}}{r_1 - r_2} \hat{v}_i(t_k) + \right. \\ & \left. \frac{e^{r_1(t-t_k)} - 1}{r_1} - \frac{e^{r_2(t-t_k)} - 1}{r_2} \right. \times \\ & \left. \frac{r_1}{r_1 - r_2} \right. \\ & \left. \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| \hat{v}_j(t_k) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & k_1 \frac{\frac{e^{r_1(t-t_k)} - 1}{r_1} - \frac{e^{r_2(t-t_k)} - 1}{r_2}}{r_1 - r_2} \times \\ & \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{x}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & |\hat{v}_i(t) - \hat{v}_i(t_k)| = \\ & |c_1 r_1 e^{r_1(t-t_k)} + c_2 r_2 e^{r_2(t-t_k)} - \hat{v}_i(t_k)| = \\ & \left| \frac{(r_2 - r_2 e^{r_2(t-t_k)}) - (r_1 - r_1 e^{r_1(t-t_k)})}{r_1 - r_2} \right| \hat{v}_i(t_k) + \\ & k_2 \frac{e^{r_1(t-t_k)} - e^{r_2(t-t_k)}}{r_1 - r_2} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| \hat{v}_j(t_k) + \\ & k_1 \frac{e^{r_1(t-t_k)} - e^{r_2(t-t_k)}}{r_1 - r_2} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{x}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k))|. \end{aligned} \quad (34)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $k \rightarrow \infty$, 则可得

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(t_k)| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{v}_i(t) - \hat{v}_i(t_k)| = 0. \end{cases} \quad (35)$$

因此, 对 $i, j \in \mathcal{V}_c$ 有

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{v}_i(t) = 0. \end{cases} \quad (36)$$

又因为 $\hat{x}_i(t) = \sigma_i x_i(t)$, $\hat{v}_i(t) = \sigma_i v_i(t)$, $\sigma_i \in \{1, -1\}$, 故最终可得, 对 $i, j \in \mathcal{V}_N$ 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i(t_k)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_j(t_k)|$, $\lim_{k \rightarrow \infty} v_i(t_k) = 0$. 对 $i \in \mathcal{V}_c$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_j(t)|$, $\lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0$, 满足定义4中的二分一致性.

下面证明安全二分一致性的有效性. 首先, 分析所有正常节点在采样点处的情况. 令 $m(t_k) = \min_{i \in \mathcal{V}_N} \{\hat{x}_i(t_k), \hat{y}_i(t_k)\}$, $M(t_k) = \max_{i \in \mathcal{V}_N} \{\hat{x}_i(t_k), \hat{y}_i(t_k)\}$, 由于 $\hat{W}(t_k)$ 是行随机矩阵, 对 $\forall i \in \mathcal{V}_N$, 有 $\hat{x}_i(t_{k+1}) \in \text{Conv}\{\hat{x}_j(t_k), \hat{y}_j(t_k) | j \in \mathcal{V}_N\}$, 因此可知 $\hat{x}_i(t_{k+1}) \in [m(t_k), M(t_k)]$. 以此类推, 可得对 $\forall k \geq 0$ 有 $\hat{x}_i(t_k) \in [m(0), M(0)]$. 接下来再分析连续时间动力学正常节点在非采样点处的情况. 节点 $i \in \mathcal{V}_c^1$ 和节点 $i \in \mathcal{V}_c^2$ 在非采样点 $t \in (t_k, t_{k+1})$ 处的位置状态更新方程分别如式(6)和式(12)所示. 将 $\hat{v}_i(t_k) = \frac{k_1}{k_2}(\hat{y}_i(t_k) - \hat{x}_i(t_k))$ 代入式(6)和式(12)分别可以得到

$$\begin{aligned} & \hat{x}_i(t) = \\ & \hat{x}_i(t_k) + \tilde{p}_4^{t_k} (\hat{y}_i(t_k) - \hat{x}_i(t_k)) + \\ & \frac{k_1(t-t_k)^2}{2} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{y}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \hat{x}_i(t_k) + \frac{k_1}{k_2} \tilde{p}_1^{t_k} (\hat{y}_i(t_k) - \hat{x}_i(t_k)) + \\ & k_2 \tilde{p}_2^{t_k} \sum_{j \in \mathcal{Q}_i(t_k)} |\bar{a}_{ij}(t_k)| (\hat{y}_j(t_k) - \hat{x}_i(t_k)), \end{aligned} \quad (38)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_4^{t_k} &= -\frac{(k_0 k_1 + k_1 k_2 d_i^{t_k})(t - t_k)^2}{2k_2} + \frac{k_1(t - t_k)}{k_2}, \\ \tilde{p}_1^{t_k} &= \frac{e^{r_1(t-t_k)} - e^{r_2(t-t_k)}}{r_1 - r_2}, \\ \tilde{p}_2^{t_k} &= \frac{\frac{e^{r_1(t-t_k)} - 1}{r_1} - \frac{e^{r_2(t-t_k)} - 1}{r_2}}{r_1 - r_2}. \end{aligned}$$

因为 $t - t_k < h$, 结合前面对式(18)和式(22)的系数的分析, 可以得到对 $\forall i \in \mathcal{V}_N, t \in (t_k, t_{k+1})$ 有 $\hat{x}_i(t) \in \text{Conv}\{x_i(t_k), y_j(t_k) | j \in \mathcal{V}_N\}$, 进一步有 $\hat{x}_i(t) \in [m(0), M(0)]$. 令 $S = \max_{i \in \mathcal{V}_N} \{|x_i(t_0)|, |x_i(t_0) + \frac{k_2}{k_1} v_i(t_0)|\}$, 则对 $\forall i \in \mathcal{V}_N, t \geq 0$ 有 $x_i(t) \in [-S, S]$, 满足定义4中的有效性. 证毕.

4 仿真实例

考虑由6个智能体构成的多智能体系统, 其对应的通信拓扑如图1所示. 其中节点2, 4, 6代表二阶连续时间动力学智能体, 节点3, 5代表二阶离散时间动力学智能体, 这些智能体按照协议(3)进行更新, 节点1代表恶意智能体, 假设其更新规则为 $x_1(t) = 30 \sin(0.1t)$, $v_1(t) = -4$. 各智能体的初始位置状态按照节点序号分别设置为14, 45, 36, -65, -20, 45, 初始速度状态分别设置为-8, 3, -10, 4, 5, -1. 图中实线表示合作关系, 虚线表示竞争关系. 这些智能体可以划分成两组, 分别为 $\mathcal{V}_1 = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{V}_2 = \{4, 5, 6\}$, 组内智能体是合作关系, 组间智能体是竞争关系, 即该符号有向图是结构平衡的. 此外, 根据鲁棒图的定义, 易验证图1为3-鲁棒图. 协议的增益参数设置为 $k_0 = 0.04$, $k_1 = 0.005$, $k_2 = 0.2$, 采样间隔设置为 $h = 4$. 根据定理1可知, 系统在上述条件下可以达成安全二分一致性.

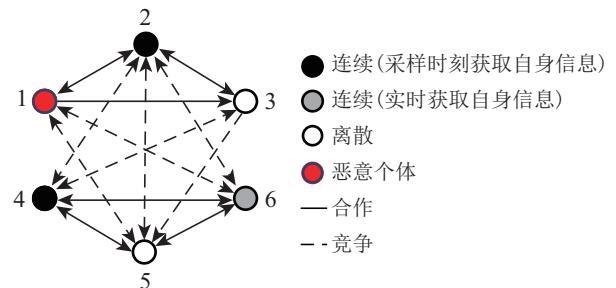


图 1 3-鲁棒图

Fig. 1 3-robust graph

通过数值仿真得到各智能体的位置和速度状态轨迹分别如图2-3所示. 从图中可以看出, 即使恶意节点

1不遵循协议(3)而按照自己的协议更新, 其他正常节点仍能实现安全二分一致性。

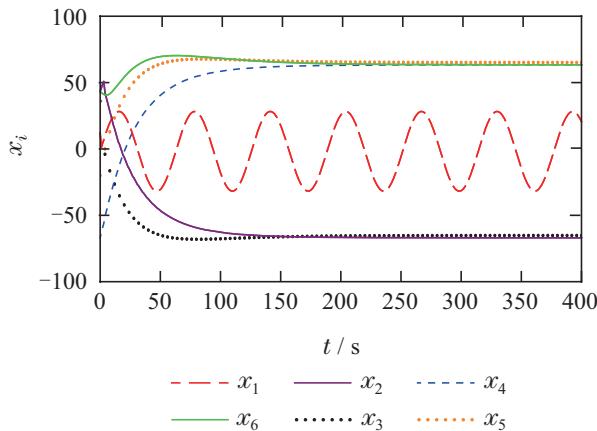


图2 1-局部恶意模型攻击下各智能体的位置状态轨迹
Fig. 2 The position state trajectories of agents under 1-local attack model

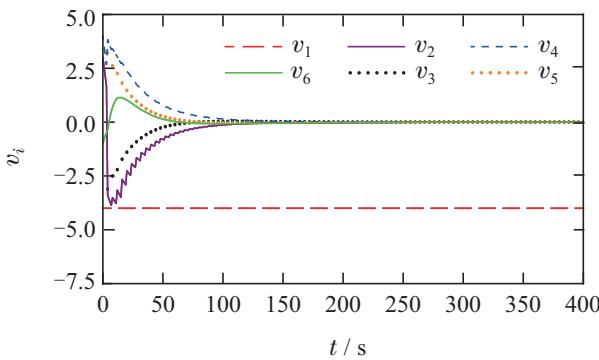


图3 1-局部恶意模型攻击下各智能体的速度状态轨迹
Fig. 3 The velocity state trajectories of agents under 1-local attack model

5 总结

本文针对合作-竞争网络下的二阶混杂多智能体系统的安全二分一致性问题, 给出了一种混杂分布式协议。在每个正常节点的邻居集中含有不超过 f 个恶意节点的情况下, 设计了一种容错算法, 并结合鲁棒图的性质, 将含有恶意节点的网络等价成只有正常节点的网络, 最后利用矩阵理论工具进行分析, 得出了在合适的控制增益下, 当网络是结构平衡的且满足 $(2f+1)$ -鲁棒图, 二阶混杂多智能体系统可以实现安全二分一致。

参考文献:

- [1] REN W. Synchronization of coupled harmonic oscillators with local interaction. *Automatica*, 2008, 44(12): 3195–3200.
- [2] WEI B, XIAO F, SHI Y. Synchronization in kuramoto oscillator networks with sampled-data up dating law. *IEEE Transaction on Cybernetics*, 2019, 50(6): 2380–2388.
- [3] YU Hui, WANG Yongji, CHENG Lei. Flocking motion control of flock in directed networks. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(1): 79–83.
- [4] SAIF O, FANTONI I, ZAVALA-RIO A. Distributed integral control of multiple UAVs: Precise flocking and navigation. *IET Control Theory & Applications*, 2019, 13(13): 2008–2017.
- [5] HE S, WANG M, DAI S L, et al. Leader-follower formation control of usvs with prescribed performance and collision avoidance. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, 15 (1): 572–581.
- [6] JIN T, LIU Z, ZHOU H, et al. Scale-based cluster formation for multi-agent systems with mismatched disturbances. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(13): 7393–7410.
- [7] LAMPORT L, SHOSTAK R, PEASE M. The byzantine generals problem. *Transactions on Programming Languages and Systems*, 1982, 4(3): 382–401.
- [8] DOLEV D, LYNCH N A, PINTER S S, et al. Reaching approximate agreement in the presence of faults. *Journal of the ACM*, 1986, 33(3): 499–516.
- [9] LEBLANC H J, ZHANG H, KOUTSOUKOS X, et al. Resilient asymptotic consensus in robust networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2013, 31(4): 766–781.
- [10] WU Yiming, DING Jiajun, HE Xiongxiong, et al. Secure consensus control for multi-agent systems under communication delay. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(8): 1039–1045.
(伍益明, 丁佳骏, 何熊熊, 等. 通信时延下多智能体系统的安全一致性控制. 控制理论与应用, 2016, 33(8): 1039–1045.)
- [11] DIBAJI S M, ISHII H, TEMPO R. Resilient randomized quantized consensus. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(8): 2508–2522.
- [12] WANG Y, ISHII H. Resilient consensus through event-based communication. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2019, 7(1): 471–482.
- [13] ÖKSÜZ H Y, AKAR M. Resilient group consensus in the presence of Byzantine agents. *International Journal of Control*, 2019, 94(3): 807–822.
- [14] USEVITCH J, PANAGOU D. Resilient leader-follower consensus to arbitrary reference values in time-varying graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(4): 1755–1762.
- [15] DIBAJI S M, ISHII H. Consensus of second-order multi-agent systems in the presence of locally bounded faults. *Systems & Control Letters*, 2015, 79: 23–29.
- [16] DIBAJI S M, ISHII H. Resilient consensus of second-order agent networks: Asynchronous update rules with delays. *Automatica*, 2017, 81: 123–132.
- [17] YAN J, WEN C, LIU X, et al. Resilient impulsive control for second-order consensus under malicious nodes. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, 68(6): 1962–1966.
- [18] WU J H, ZHU Y R, ZHENG Y S, et al. Resilient bipartite consensus of second-order multiagent systems with event-triggered communication. *IEEE Systems Journal*, 2021, 17(1): 146–153.
- [19] SHANG Y. Resilient consensus of switched multi-agent systems. *Systems & Control Letters*, 2018, 122: 12–18.
- [20] ZHU Y, ZHENG Y, LIU J, et al. Sampled-data based resilient consensus of heterogeneous multi-agent systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(17): 7370–7381.
- [21] ALTAFINI. Consensus problems on networks with antagonistic interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(4): 935–946.
- [22] ZHU Y, LI S, MA J, et al. Bipartite consensus in networks of agents with antagonistic interactions and quantization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2018, 65(12): 2012–2016.

(俞辉, 王永骥, 程磊. 基于有向网络的智能群体群集运动控制. 控制理论与应用, 2007, 24(1): 79–83.)

- [23] LU J, WANG Y, SHI X, et al. Finite-time bipartite consensus for multiagent systems under detail-balanced antagonistic interactions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 51(6): 3867 – 3875.
- [24] NING B, HAN Q, ZUO Z. Bipartite consensus tracking for second-order multiagent systems: A time-varying function-based preset-time approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 66(6): 2739 – 2745.
- [25] HALLOY J, SEMPO G, CAPRARO G, et al. Social integration of robots into groups of cockroaches to control self-organized choices. *Science*, 2007, 318(5853): 1155 – 1158.
- [26] ZHENG Y, MA J, WANG L. Consensus of hybrid multi-agent systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(4): 1359 – 1365.
- [27] ZHENG Y S, ZHAO Q, MA J Y, et al. Second-order consensus of hybrid multi-agent systems. *Systems & Control Letters*, 2019, 125: 51 – 58.
- [28] WANG X, SU H S. Consensus of hybrid multi-agent systems by event-triggered/self-triggered strategy. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 359: 490 – 501.
- [29] ZHAO Q, ZHENG Y, ZHU Y. Consensus of hybrid multi-agent systems with heterogeneous dynamics. *International Journal of Control*, 2019, 93(12): 2848 – 2858.
- [30] CHEN Shimeng, WANG Mingyu. Leader-follower consensus of hybrid multi-agent systems with disturbances. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(7): 1583 – 1588.
(陈世明, 王明雨. 带扰动混杂多智能体系统领导-跟随一致性. 控制理论与应用, 2020, 37(7): 1583 – 1588.)
- [31] SHANG Y. Consensus of hybrid multi-agent systems with malicious nodes. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, 67(4): 685 – 689.
- [32] XIA W, LIU J, CAO M, et al. Generalized sarymsakov matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(8): 3085 – 3100.

作者简介:

- 吴佳慧 硕士研究生, 目前研究方向为多智能体系统的安全一致性, E-mail: 1742242992@qq.com;
- 朱韵茹 博士, 副教授, 目前研究方向为多智能体系统的分布式协调和控制, E-mail: zhuuruu@163.com;
- 郑元世 博士, 教授, 目前研究方向为复杂系统的分析与控制, E-mail: zhengyuansi2005@163.com;
- 王怀柱 硕士, 教授, 目前研究方向为多智能体系统、机器鱼和计算机网络的分析与应用, E-mail: wanghz78@qq.com.