

# 强非线性中立型随机时滞系统的间歇性反馈控制

宋公飞<sup>1,2†</sup>, 张子梦<sup>1</sup>, 李 涛<sup>1,2</sup>

(1. 南京信息工程大学 自动化学院, 江苏 南京 210044; 2. 江苏省大气环境与装备技术协同创新中心, 江苏 南京 210044)

**摘要:** 本文研究的是一类系数是强非线性的混合中立型随机时滞系统的间歇性反馈控制问题. 与现有的间歇性控制器不同, 该控制器可以随意改变有效时间域的长短, 并根据有效时间域的不同, 去接受不同的输入形式, 如: 周期性时间输入、有界非周期性时间输入、指数非周期性时间输入和全时间输入等. 最后, 利用Lyapunov函数,  $M$ -矩阵和Itô公式, 证明了其系统的指数稳定和几乎确定的稳定, 并通过算例仿真验证了该控制器的有效性和正确性.

**关键词:** 随机系统; 指数稳定; 几乎确定的稳定; 间歇性反馈控制; Lyapunov函数

**引用格式:** 宋公飞, 张子梦, 李涛. 强非线性中立型随机时滞系统的间歇性反馈控制. 控制理论与应用, 2023, 40(9): 1657 – 1664

DOI: 10.7641/CTA.2022.20221

## Intermittent feedback control for highly nonlinear neutral stochastic delay systems

SONG Gong-fei<sup>1,2†</sup>, ZHANG Zi-meng<sup>1</sup>, LI Tao<sup>1,2</sup>

(1. College of Automation, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210044, China;

2. Collaborative Innovation Center of Atmospheric Environment and Equipment Technology, Nanjing Jiangsu 210044, China)

**Abstract:** This article investigates that an intermittent feedback control is designed to stability a class of neutral stochastic delay systems. The coefficients of these neutral stochastic delay systems are highly nonlinear. Different from the existing intermittent controllers, the effective time domain of an intermittent controller can change, arbitrarily, and the admissible different input forms of intermittent control depending on the different effective time domain, such as periodic-time inputs, bounded-aperiodic-time inputs, exponential-aperiodic-time inputs, the full-time inputs and so on. Finally, using the Lyapunov function,  $M$ -matrix and Itô formula, exponentially stability and almost surely stability of the system are proved, and a numerical example is given to verify the correctness and validity of the conclusion.

**Key words:** stochastic systems; exponentially stability; almost surely stability; intermittent feedback controller; Lyapunov functions

**Citation:** SONG Gongfei, ZHANG Zimeng, LI Tao. Intermittent feedback control for highly nonlinear neutral stochastic delay systems. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(9): 1657 – 1664

## 1 引言

在实际系统中, 当系统的变化率取决于当前的状态和某些随机信号时, 可以用常微分系统来建模; 当系统的演变取决于当前和过去的状态时, 随机微分时滞系统便起到了决定性的作用; 当系统的结构和参数的突变时, 具有马尔可夫切换的混合随机系统充当了重要的角色<sup>[1-4]</sup>; 当系统的延迟参数发生在状态变量的导数中时, 更一般的中立型随机时滞系统提供了重要的工具<sup>[5-8]</sup>; 当系统的漂移和扩散系数不满足线性增长条件时, 便构成了一类强非线性随机系统模型.

稳定性和有界性的分析是研究这类系统的一个重要的分支, 并且具有重要的实际意义和应用价值, 文献[9]建立了中立型随机微分时滞方程解的存在性和唯一性, 研究了系统的稳定性, 并得到了重大突破. 之后, 文献[10-12]又研究了非线性系统的稳定性问题, 文献[13]则是对非线性随机系统的鲁棒稳定性和有界性展开了分析.

在非线性随机系统稳定性的理论研究中, 主要使用的方法为Lyapunov第二法, 即通过构造一个关于动态系统的Lyapunov函数来直接判定系统的稳定性, 基

收稿日期: 2022-03-29; 录用日期: 2022-09-16.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: gfsong@nuist.edu.cn.

本文责任编辑: 龙离军.

国家自然科学基金项目(61973170, 61973168)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61973170, 61973168).

于这一思想,文献[14]提出了在不同结构下的混合中立型随机时滞方系统的指数稳定性问题,文献[15-16]分别展开了关于强非线性中立型随机时滞系统的稳定性和指数稳定性问题的分析,但他们讨论的都是单时滞的系统.然而,许多实际的系统会具有多个时间延迟状态,因此,文献[17-18]便将他们的结果从单个延迟推广到多个延迟,并为具有多个延迟的强非线性中立型随机时滞系统获得一些新颖的稳定性和有界性标准,文献[19]证明了一类具有瞬态延迟的强非线性中立型随机时滞系统的Euler-Maruyama近似解的概率收敛性问题.另外,在现有理论研究中,还有很多学者通过设计一些控制机制去镇定这类强非线性中立型随机时滞系统,从而实现期望的观测目标.文献[20]研究了如何设计一款基于连续时间的延迟反馈控制机制,使得一类强非线性中立型随机时滞系统的状态趋于稳定.但是在某些实际情况下,即使设计的控制器是连续的,数据也只在离散的时间内才能观察到,因此,基于离散时间的反馈控制机制吸引了大量学者的关注,文献[21]便提出了基于离散时间观测反馈控制的强非线性中立型随机时滞系统的稳定性问题.由于随机系统在不同控制器的作用下具有不同的动态性质,相比起基于离散时间观测的反馈控制,间歇性控制能够帮助科研人员更加全面地掌握受控系统的动态特性,这也使得学者对间歇性控制策略的兴趣日益浓厚.

间歇性控制是一种中断反馈控制,控制信号是间歇性的实现,它填补了连续控制和脉冲控制的两个极端之间的空白,整合了连续控制和脉冲控制的优点.与连续控制相比,间歇性控制可以延长控制器的工作寿命,有效地节约能源.与脉冲控制相比,间歇性控制在实践中不必立即改变状态,易于实现.因此,间歇性控制激起了大量学者的研究兴趣.文献[22]研究了如何通过周期间歇性控制去镇定一类具有延迟和Lévy噪声的随机时变耦合系统;文献[23]主要讨论了如何设计一个基于离散时间状态观测的周期间歇性反馈控制率,使得混合随机微分系统变得稳定;文献[24]验证了通过周期间歇性控制可以镇定一类高非线性随机耦合系统,并为解决这个问题建立了一种新的不等式;文献[25]的主题是展示了一种新的间歇性控制方法,用于研究一类反应-扩散神经系统的有限时间同步问题.但是,对于一类高非线性中立型随机时滞系统,如何设计一个间歇性反馈控制策略来使其稳定,目前还没有普遍的结果.本文便是设计一种间歇性反馈控制策略,该策略为强非线性中立型随机时滞系统的稳定性提供了一种解决方案.

在本文中,作者提出了一种间歇性反馈控制率,去镇定一类更一般的强非线性混合中立型随机时滞系统,所考虑系统的系数不仅不需要满足全局Lipschitz

条件,而且不需要满足线性增长条件.特别的是,所设计的间歇性控制输入形式涵盖了一些常见的情况,如周期性时间输入和有界非周期性时间输入等,还涵盖了一些特殊的情况,如全时间输入和指数非周期性时间输入等.另外,作者解决了中立项、强非线性系数和新的间歇性反馈控制策略在计算上所带来的困难,并成功使用Lyapunov函数的方法,严格证明了在间歇性控制策略的作用下所考虑的系统满足指数稳定和几乎确定的稳定.

## 2 模型描述与预备知识

假设 $B(t) = (B_1(t) \cdots B_m(t))^T$ 是定义在概率空间上的 $m$ 维布朗运动.如果 $A$ 是一个向量或矩阵,那么它的转置是 $A^T$ .如果 $x \in \mathbb{R}^n$ , $|x|$ 是欧几里得范数.如果 $A$ 是矩阵, $|A| = \sqrt{\text{trace}(A^T A)}$ 是它的迹范数.对于 $\tau > 0$ ,用 $C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ 表示从 $[- \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 具有范数 $|\varphi| = \sup_{-\tau \leq u \leq 0} |\varphi(u)|$ . $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ 表示在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S \times \mathbb{R}_+$ 上关于 $x$ 连续两次可微,关于 $t$ 一次可微的非负函数. $E$ 是关于概率测度 $P$ 的期望.如果 $a$ 和 $b$ 是实数,则 $a \vee b = \max\{a, b\}$ 且 $a \wedge b = \min\{a, b\}$ .当 $t \geq 0$ 时, $r(t)$ 表示在概率空间上取值于有限状态空间 $S = \{1, 2, \dots, N\}$ 的一个右连续的马尔科夫链,它的生成元 $\Gamma = (\gamma_{ij})_{M \times N}$ 满足

$$P\{r(t + \Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j, \end{cases}$$

其中: $\Delta > 0$ ;若 $i \neq j$ ,则 $\gamma_{ij} \geq 0$ 是从 $i$ 到 $j$ 的转换率,且 $\gamma_{ij} = -\sum_{i \neq j} \gamma_{ij}$ .假设马尔可夫链 $r(t)$ 与布朗运动 $B(t)$ 是相互独立的, $r(t)$ 在 $\mathbb{R}_+ (= [0, \infty))$ 的任何有限子区间上有限数量的跳跃,且几乎每一个样本路径是右连续的分段函数.

本文考虑如下形式的一个 $n$ 维混合中立型随机时滞系统:

$$\begin{aligned} d[x(t) - H(x(t - \delta), r(t), t)] = \\ M(x(t), x(t - \delta), r(t), t) dt + \\ N(x(t), x(t - \delta), r(t), t) dB(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $\delta$ 表示延迟的时间, $M$ 和 $N$ 分别表示为漂移和扩散系数,当 $t \geq 0$ 时,其初始函数为

$$\begin{cases} \{x(t) : -\delta \leq t \leq 0\} = \xi \in C([- \delta, 0]; \mathbb{R}^n), \\ r(0) = i_0 \in S, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $M(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , $N(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , $H(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 均为Borel可测函数.本文将在漂移部分设计一个间歇性反馈控制器 $u(x(t))$ ,使得受控系统的状态趋于稳定.为了描述间歇性控制输入的有效时间域,将定义以下符号.

让 $\mathcal{S}$ 表示一个在区间 $[0, \infty)$ 上的非衰减发散序列 $\mathcal{S} := \{\tau_{k-1}\}, k \in N$ , 且 $\omega_s := \inf_{k \in N} (\tau_{2k} - \tau_{2k-1}) / (\tau_{2k} - \tau_{2k-2}) > 0$ , 其中:  $\tau_k - \tau_{k-1} \notin (0, \varepsilon), \tau_0 = 0, \varepsilon$  为一个足够小的常数. 让 $T(S)$ 表示一个集合 $T(S) := \bigcup_{k \in N} [\tau_{2k-1}, \tau_{2k}), S \in \mathcal{S}, \mathcal{T}$  表示另一个集合 $\mathcal{T} := \{T(S) : S \in \mathcal{S}\}$ . 当且仅当 $T(S) = T$ 时,  $T \in \mathcal{T}$ 为间歇性控制输入的有效时间域, 任意的 $S \in \mathcal{S}$ 被称为 $T \in \mathcal{T}$ 的生成序列, 且有效时域 $T$ 可能会有许多个生成序列, 例如:  $T = [0, \infty)$ . 对于有效时间域 $T \in \mathcal{T}$ , 定义其比率指数 $\omega_T := \sup_{S \in \mathcal{S}} \{\omega_S : T(S) = T\}$ , 并让 $S_T$ 表示 $S$ 的生成序列的集合, 且不为空集. 为了实现控制目标, 文本提出了间歇性控制输入, 形式如下:

$$u(x, t) = -k\eta_T x(t), \quad (3)$$

其中: 当 $t \in T$ 时,  $\eta_T(t) = 1$ ; 当 $t \in [0, \infty) \setminus T$ 时,  $\eta_T(t) = 0$ . 将控制输入应用到系统(1), 则系统有如下形式:

$$\begin{aligned} d[x(t) - H(x(t-\delta)), r(t), t] = \\ [M(x(t), x(t-\delta), r(t), t) + u(x, t)]dt + \\ N(x(t), x(t-\delta), r(t), t)dB(t), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $u: \mathbb{R}^n \times S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为Borel可测函数. 文献[26]中说明了混合中立型随机时滞系统的全局唯一解的存在的条件是系统的漂移和扩散系数是满足局部Lipschitz条件和线性增长条件的, 但本文采用的是多项式增长条件, 而非非线性增长条件, 因此, 还需要作出如下假设.

**假设1** 对任意的 $h > 0$ , 假设存在一个常数 $K_h$ , 使得对任意的 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ , 其中 $|x_1| \vee |y_1| \vee |x_2| \vee |y_2| \leq h$ 和 $(i, t) \in S \times \mathbb{R}^n$ , 有如下关系式成立:

$$\begin{aligned} |M(x_1, y_1, i, t) - M(x_2, y_2, i, t)| \vee \\ |N(x_1, y_1, i, t) - N(x_2, y_2, i, t)| \leq \\ K_h(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|). \end{aligned}$$

**假设2** 假设存在一个 $D > 0, q_1 \geq 1, q_2 \geq 1$ , 对于任意的 $x, y, i, t \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S \times \mathbb{R}_+$ , 满足如下关系式:

$$\begin{aligned} M(x, y, i, t) \leq D(|x| + |x|^{q_1} + |y| + |y|^{q_1}), \\ N(x, y, i, t) \leq D(|x| + |x|^{q_2} + |y| + |y|^{q_2}). \end{aligned}$$

**假设3** 假设存在一个常数 $\kappa \in (0, 1)$ , 使得对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ , 且 $H(0) = 0$ , 有如下关系式成立:

$$|H(x_1) - H(x_2)| \leq \kappa|x_1 - x_2|.$$

### 3 主要结论

本节将使用Lyapunov泛函的方法来研究系统的稳定性. 为了讨论方便, 本文记 $x(t) - H(x(t-\delta)) =$

$\tilde{x}(t)$ , 定义 $\bar{x}_t := \{x(t+s) : -2\delta \leq s \leq 0\}, \bar{r}_t := \{r(t+s) : -2\delta \leq s \leq 0\}$ . 由于本文所考虑的系统为强非线性随机系统, 为了得到其系统解的稳定性定理, 在漂移和扩散系数上强加几个新的条件是必要的.

**假设4** 假设存在非负数 $b$ , 使得

$$|x - H(y)|^T u(x(t)) \leq -b|x|^2.$$

**假设5** 假设存在非负数 $q > p \geq 2, \alpha_{i1} \in \mathbb{R}, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}_+, j = 2, 3, 4, i \in S$ , 使得

$$\begin{aligned} |x - H(y)|M + \frac{p-1}{2}|N|^2 \leq \\ \alpha_{i1}|x - H(y)|^2 + \alpha_{i2}|y|^2 - \\ \alpha_{i3}|x - H(y)|^{q-p+2} + \alpha_{i4}|y|^{q-p+2}. \end{aligned}$$

假设

$$\begin{cases} A := -2\text{diag}\{\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{N1}\} - \Gamma, \\ (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)^T = A^{-1}(1, 1, \dots, 1)^T, \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $A$ 是非奇异的 $M$ -矩阵, 所有的 $\theta_i, \forall i \in S$ 均为正数. 对于函数 $V(x, y, i, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , 定义一个函数 $\mathcal{L}V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , 如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, y, i, t) = \\ V_t(x - H(x(t-\delta)), i, t) + \\ V_x^T(x - H(x(t-\delta)), i, t)M(x, y, i, t) + \\ \frac{1}{2} \text{tr}\{N^T(x, y, i, t)V_{xx}(x - H(x(t-\delta)), i, t) \times \\ N(x, y, i, t)\} + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}V(x - H(x(t-\delta)), j, t). \end{aligned}$$

### 3.1 指数稳定

**引理1** [27] 建立一些典型的不等式.

1) 当 $\theta > 0, p \geq 1, a, b \geq 0$ 时, 则有

$$(a+b)^p \leq (1+\theta)^{p-1}a^p + (1+\theta^{-1})^{p-1}b^p. \quad (6)$$

2) 当 $p \geq 1$ 时, 则有

$$\begin{aligned} (1-\kappa)^{p-1}(|x|^p - \kappa|y|^p) \leq |x - H(y)|^p \leq \\ (1+\kappa)^{p-1}(|x|^p + \kappa|y|^p). \end{aligned} \quad (7)$$

**定理1** 当上述假设都成立时, 并有

$$\gamma_4 < \frac{q(1-\kappa)^q}{(q-p+2) + (p-2)(1-\kappa)^q} \gamma_3, \quad B > \frac{2S_1}{\omega_T S_2}.$$

对于任何给定的初始数据(2), 受控系统(4)的状态具有如下性质:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \log E|x(t)|^p < 0,$$

可知系统为指数稳定.

**证** 固定初始数据 $\gamma \in C([- \Phi, 0]; \mathbb{R}_n)$ 和 $r_0 \in S$ . 设 $k_0 > 0$ 是足够大的整数, 可以使得 $\|\varphi\| := \sup_{-\delta \leq s \leq 0} \varphi(s) < k_0$ . 对于 $k > k_0$ 的每个整数, 设置停止

时间  $\sigma_k = \inf \{t \geq 0 : |x(t)| \geq k\}$ , 可以看到  $\sigma_k$  随着  $k$  的增加而增加, 即  $k \rightarrow \infty$  时,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \infty$ , 设置  $\inf \emptyset = \infty$  ( $\emptyset$  通常表示空集). 本文选取的李雅普诺夫函数的形式如下:

$$\begin{aligned} V(x, y, i, t) &= \theta_i |\tilde{x}|^p, \\ C_1 |\tilde{x}|^p &\leq V(x, y, i, t) \leq C_2 |\tilde{x}|^p, \end{aligned}$$

其中  $C_1, C_2$  均为正数.

此外, 对于  $\forall (x, y, i, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S \times [-2\tau, 0]$ , 都有:  $M(x, y, i, s) = M(x, y, i, 0)$ ,  $N(x, y, i, s) = N(x, y, i, 0)$ .

再对  $V(x, y, i, t)$  使用伊藤公式, 可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, y, i, t) &\leq \\ p\theta_i |\tilde{x}|^{p-2} \tilde{x}^T M &+ p\theta_i |\tilde{x}|^{p-2} \tilde{x}^T u + \\ \frac{p\theta_i}{2} |\tilde{x}|^{p-2} |N|^2 &+ \frac{\theta_i p(p-2)}{2} |\tilde{x}|^{p-2} |N|^2 + \\ \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \theta_j |\tilde{x}|^p. \end{aligned} \quad (8)$$

当  $t \geq 0$  且  $k \geq k_0$  时, 根据假设4-5可以得出

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, y, i, t) &\leq \\ p\theta_i |\tilde{x}|^{p-2} (\tilde{x}^T M &+ \tilde{x}^T u + \frac{p-1}{2} |N|^2) + \\ \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \theta_j |\tilde{x}|^p &\leq \\ p\theta_i |\tilde{x}|^{p-2} (\alpha_{i1} |\tilde{x}|^2 &+ \alpha_{i2} |y|^2 - \alpha_{i3} |\tilde{x}|^{q-p+2} + \\ \alpha_{i4} |y|^{q-p+2} - \eta_T b |\tilde{x}|^2) &+ \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \theta_j |\tilde{x}|^p. \end{aligned} \quad (9)$$

令  $B := \max(\theta_i b_i)$ ,  $\gamma_2 := \max(\theta_i \alpha_{i2})$ ,  $\gamma_3 := \min(p\theta_i \alpha_{i3})$ ,  $\gamma_4 := \max(p\theta_i \alpha_{i4})$ , 并由  $\theta_i$  的定义和式(5)可以得出

$$p\theta_i \alpha_{i1} + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \theta_j = -1, \quad \forall i \in S,$$

将上式代入式(9)可知

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, y, i, t) &\leq \\ -[\eta_T p B - p\theta_i \alpha_{i1} - \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \theta_j - (p-2)\gamma_2] |\tilde{x}|^p &+ \\ 2\gamma_2 |y|^p - (\gamma_3 - \frac{p-2}{q} \gamma_4) |\tilde{x}|^q &+ \frac{q-p+2}{q} \gamma_4 |y|^q \leq \\ -[\eta_T p B + 1 - (p-2)\gamma_2] |\tilde{x}|^p &+ 2\gamma_2 |y|^p - \\ (\gamma_3 - \frac{p-2}{q} \gamma_4) |\tilde{x}|^q &+ \frac{q-p+2}{q} \gamma_4 |y|^q. \end{aligned}$$

令  $\beta_1 := \eta_T p B + 1 - (p-2)\gamma_2$ ,  $\beta_2 := 2\gamma_2$ ,  $\beta_3 := \gamma_3 - \frac{p-2}{q} \gamma_4$ ,  $\beta_4 := \frac{q-p+2}{q} \gamma_4$ , 由引理1知

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, y, i, t) &\leq \\ -\beta_1 (1-\kappa)^{p-1} (|x|^p - \kappa |y|^p) &+ \beta_2 |y|^p - \end{aligned}$$

$$\beta_3 (1-\kappa)^{q-1} (|x|^q - \kappa |y|^q) + \beta_4 |y|^q.$$

设置停时  $\sigma_k$ , 使用广义Itô公式可知

$$\begin{aligned} EV(x, y, i, t) &= \\ EV(x_0, y_0, r_0) &+ E \int_0^{t \wedge \sigma_k} \mathcal{L}V(x, y, i, s) ds \leq \\ EV(x_0, y_0, r_0) - \beta_1 (1-\kappa)^{p-1} E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |x|^p ds &+ \\ [\beta_1 (1-\kappa)^{p-1} \kappa + \beta_2] E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |y|^p ds - \\ \beta_3 (1-\kappa)^{q-1} E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |x|^q ds &+ \\ [\beta_3 (1-\kappa)^{q-1} \kappa + \beta_4] E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |y|^q ds. \end{aligned} \quad (10)$$

由于

$$\begin{aligned} E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |x(s-\delta)|^p ds &\leq \\ E \int_{-\delta}^0 |x(s)|^p ds &+ E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |x(s)|^p ds, \end{aligned}$$

将上式代入式(10)可知

$$\begin{aligned} C_1 E |\tilde{x}_{t \wedge \sigma_k}|^p &\leq \\ C_4 + [\beta_2 - \beta_1 (1-\kappa)^p] E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |x(s)|^p ds &+ \\ [\beta_4 - \beta_3 (1-\kappa)^q] E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |x(s)|^q ds, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} C_4 &:= \\ C_2 \{2^{p-1} (1+\kappa)^p E \|\xi\|^p &+ 2^{q-1} (1+\kappa)^q E \|\xi\|^q\} + \\ (\beta_2 + \beta_1 (1-\kappa)^{p-1} \kappa) E \int_{-\delta}^0 |x(s)|^p ds &+ \\ [\beta_4 + \beta_3 (1-\kappa)^{q-1} \kappa] E \int_{-\delta}^0 |x(s)|^q ds. \end{aligned}$$

由定理1, 可知  $\beta_4 < \beta_3 (1-\kappa)^q$ , 则有

$$\begin{aligned} C_1 E |\tilde{x}_{t \wedge \sigma_k}|^p &\leq \\ C_4 + [\beta_2 - \beta_1 (1-\kappa)^p] E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |x(s)|^p ds. \end{aligned} \quad (11)$$

又因为

$$\begin{aligned} (1-k)^{p-1} E |x(t \wedge \sigma_k)|^p &\leq \\ E |\tilde{x}(t \wedge \sigma_k)|^p &+ k(1-k)^{p-1} E |x(t \wedge \sigma_k - \delta)|^p, \end{aligned}$$

将上式代入式(11)可知

$$\begin{aligned} C_1 (1-\kappa)^{p-1} \sup_{0 \leq s < t} E |x(t \wedge \sigma_k)|^p &\leq \\ C_4 + [\beta_2 - \beta_1 (1-\kappa)^p] E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |x(s)|^p ds &+ \\ \kappa (1-\kappa)^{p-1} \sup_{0 \leq s < t} E |x(t \wedge \sigma_k - \delta)|^p &\leq \\ C_5 + [\beta_2 - \beta_1 (1-\kappa)^p] E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |x(s)|^p ds &+ \\ \kappa (1-\kappa)^{p-1} \sup_{0 \leq s < t} E |x(t \wedge \sigma_k)|^p, \end{aligned}$$

其中  $C_5 = C_4 + C_1 (1-\kappa)^{p-1} \kappa \sup_{-\delta \leq s \leq 0} E |x(s)|^p$ . 经

计算可知

$$C_1(1-\kappa)^p \sup_{0 \leq s < t} E|x(t \wedge \sigma_k)|^p \leq \\ C_5 + [\beta_2 - \beta_1(1-\kappa)^p] E \int_0^{t \wedge \sigma_k} |x(s)|^p ds.$$

当  $k \rightarrow \infty$ , 可知  $\sigma_k \rightarrow \infty$ , 可以得到

$$E|x(t)|^p \leq \\ \frac{C_5}{C_1(1-\kappa)^p} + \\ \left[ \frac{\beta_2 - \beta_1(1-\kappa)^p}{C_1(1-\kappa)^p} \right] E \int_0^t |x(s)|^p ds \leq \\ C_6 + [S_1 - \eta_T BS_2] E \int_0^t |x(s)|^p ds,$$

其中:

$$C_6 := \frac{C_5}{C_1(1-\kappa)^p}, S_2 := \frac{p}{C_1}, \\ S_1 := \frac{2\gamma_2}{C_1(1-\kappa)^p} + \frac{(p-2)\gamma_2 - 1}{C_1}.$$

由 Gronwall 不等式可知

$$E|x(t)|^p \leq C_6 e^{\int_0^t [S_1 - \eta_T BS_2] ds}.$$

当  $t \in [\tau_{2k}, \tau_{2k+1}]$ ,  $\eta_T = 0$  时

$$\int_0^t [S_1 - \eta_T BS_2] ds = [S_1 - \eta_T BS_2] t \leq \\ S_1(t - \tau_{2k}) + [S_1 - B\omega_T S_2] \tau_{2k} \leq [2S_1 - B\omega_T S_2] t.$$

当  $t \in [\tau_{2k+1}, \tau_{2k+2}]$ ,  $\eta_T = 1$  时

$$\int_0^t [S_1 - \eta_T BS_2] ds = [S_1 - \eta_T BS_2] t \leq \\ S_1(t - \tau_{2k}) - BS_2(t - \tau_{2k+1}) + \\ [S_1 - B\omega_T S_2] \tau_{2k} \leq \\ S_1(t - \tau_{2k}) + [S_1 - B\omega_T S_2] t \leq [2S_1 - B\omega_T S_2] t.$$

综上可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \log E|x(t)|^p < 2S_1 - B\omega_T S_2.$$

由定理1的条件可知

$$2S_1 - B\omega_T S_2 < 0.$$

证毕.

### 3.2 几乎确定的稳定

**引理 2**<sup>[28]</sup> 构造系统(4)的 Lyapunov 函数  $V(x, y, i, t) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ , 有如下求导法则:

$$dV(x, y, i, t) = \mathcal{L}V(x, y, i, t)dt + \\ V_x(x, y, i, t)N(x, y, i, t)dB(t).$$

其中

$$\mathcal{L}V(x, y, i, t) = \\ V_t(x, y, i, t) + V_x(x, y, i, t)M(x, y, i, t) +$$

$$\frac{1}{2} \text{trace}(N^T(x, y, i, t)V_{xx}(x, y, i, t)N(x, y, i, t)) + \\ \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} V(x, y, j, t).$$

**定理 2** 当上述假设和定理1都成立时, 如果该系统为几乎确定的稳定, 那么对于任意的初始值(2), 系统(4)的状态都满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E|x(t)| = 0.$$

**证** 根据初始数据(2)和引理2可知

$$d(\theta_i |\tilde{x}(t)|^p) = d(\theta_i |\tilde{x}(t)|^2)^{\frac{p}{2}} = \\ \{p\theta_i (\tilde{x}(t))^2\}^{\frac{p}{2}-1} \tilde{x}(t)^T [M(x, y, i, t) + u(x, i, t)] + \\ \frac{1}{2} \text{trace} N^T(x, y, i, t) \times \\ [p\theta_i (p-2) |\tilde{x}(t)|^{p-4} \tilde{x}(t) \tilde{x}(t)^T + \\ p\theta_i |\tilde{x}(t)|^{p-2}] N(x, y, i, t) + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \theta_i |\tilde{x}(t)|^p \} dt + \\ p\theta_i |\tilde{x}(t)|^{p-2} \tilde{x}(t)^T N(x, y, i, t) dB(t).$$

对其在  $t_0 \sim t$  上积分, 知

$$C_1 |\tilde{x}(t)|^p = \\ \int_{t_0}^t \{p\theta_i |\tilde{x}(s)|^{p-2} \{\tilde{x}(s)^T M(x, y, i, s) + \\ \frac{p-1}{2} |N(x, y, i, s)|^2 + \tilde{x}(s)^T u(x, i, s) + \\ \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \theta_i |\tilde{x}(s)|^p\} \} ds + C_2 |\tilde{x}_0|^p + M(t) \leq \\ pC_2 \sup_{t_0 \leq s \leq t} |\tilde{x}(s)|^{p-2} \int_{t_0}^t \{\tilde{x}(s)^T M(x, y, i, s) + \\ \frac{p-1}{2} |N(x, y, i, s)|^2 + \tilde{x}(s)^T u(x, i, s) + \\ \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \theta_i |\tilde{x}(s)|^p\} ds + C_2 |\tilde{x}_0|^p + M(t),$$

其中:  $M(t) := \int_{t_0}^t p\theta_i |\tilde{x}(s)|^p \frac{\tilde{x}(s)^T N(x, y, i, s)}{|\tilde{x}(s)|^2} dB(s)$ ,  $M(t_0) = 0$ .

通过定理1的求解, 可以得到

$$|x(t)|^p \leq \\ \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} |\tilde{x}(s)|^p \right\} [S_1 - \eta_T BS_2] t + C_6 + M(t).$$

两边同时取期望, 可得

$$E|x(t)|^p \leq C_6 + E \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} |\tilde{x}(s)|^p \right\} [S_1 - \eta_T BS_2] t.$$

当  $t \in [\tau_{2k}, \tau_{2k+2}]$  时, 可知

$$E|x(t)|^p \leq \\ C_6 + E \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} |\tilde{x}(s)|^p \right\} [2S_1 - B\omega_T S_2] t \leq \\ C_6 + E \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} |\tilde{x}(s)|^p \right\} [2S_1 - B\omega_T S_2] \tau_{2k+2} =$$

$$C_6 + \lambda E\left\{\sup_{t_0 \leq s \leq t} |\tilde{x}(s)|^p\right\},$$

其中  $\lambda := [2S_1 - B\omega_T S_2] \tau_{2k+2}$ .

通过马尔可夫不等式, 可求得

$$P\{|x(t)| > \varsigma\} \leq \frac{E|x(t)|^p}{\varsigma^p} \leq \frac{C_6}{(1-\lambda)\varsigma^p},$$

其中  $\varsigma \in \mathbb{R}_+$ . 由于  $2S_1 - B\omega_T S_2 < 0$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $k \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \rightarrow -\infty$ , 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{|x(t)| \geq \varsigma\} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_6}{(1-\lambda)\varsigma^p} = 0,$$

则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{|x(t)| \geq \varsigma\} \leq P\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \geq \varsigma\} = 0,$$

进而可解得

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| < \varsigma\} = 1.$$

因为  $\varsigma$  为任意大于0的数, 可知

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0\} = 1,$$

即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0.$$

证毕.

#### 4 例子

本文将引用一些例子去证明上述所得的结论. 考虑一类中立型随机时滞系统, 其形式如下:

$$\begin{aligned} d[x(t) - H(x(t-\delta), r(t), t)] = \\ M(x(t), x(t-\delta), r(t), t) dt + \\ N(x(t), x(t-\delta), r(t), t) dB(t). \end{aligned}$$

其中:  $r(t)$  是状态空间  $S = \{1, 2\}$  上的带有生成元  $\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  的一个右连续马尔可夫链,  $H(y) = 0.1y$ , 漂移系数  $M$  和扩散系数  $N$  分别由下式给出:

$$\begin{aligned} M(x, y, 1, t) &= -0.5x + 0.1y^3 - 6x^5, \\ M(x, y, 2, t) &= -x + 2y^3 - 4x^5, \\ N(x, y, 1, t) &= N(x, y, 2, t) = 0.5y^2. \end{aligned}$$

设置  $\delta = 2$ , 当  $t \in [-1, 0]$  时, 其初始数据为  $x(t) = 2 + \sin t$ ,  $r(0) = 2$ , 其马尔可夫链的样本路径和系统1的状态绘制如图1所示.

为了应用本文所建立的定理, 则需要验证本文中强加的假设. 本文选取了  $q = 6$ ,  $p = 2$ , 通过Young不等式可知

$$|x - H(y)|M(x, y, i, t) + \frac{p-1}{2}|N(x, y, i, t)|^2 \leq$$

$$\begin{cases} -0.5125|x - H(y)|^2 + 0.975|y|^2 - \\ 223.9875|x - H(y)|^6 + 0.1|y|^6, & i = 1. \\ -0.55|x - H(y)|^2 + 0.5125|y|^2 - \\ 148.8334|x - H(y)|^6 + 0.5624|y|^6, & i = 2. \end{cases}$$

可以得出

$$A = \begin{bmatrix} -0.5125 & 0 \\ 0 & -0.55 \end{bmatrix},$$

由此可得  $\theta_1 = 0.9531$ ,  $\theta_2 = 0.9301$ . 从而可解得  $B = 9.6$ ,  $C_1 = 0.93$ ,  $C_2 = 0.96$ ,  $\gamma_2 = 0.9292$ ,  $\gamma_3 = 276.83$ ,  $\gamma_4 = 1.046$ ,  $S_1 = 1.3917$ ,  $S_2 = 2.1505$ .

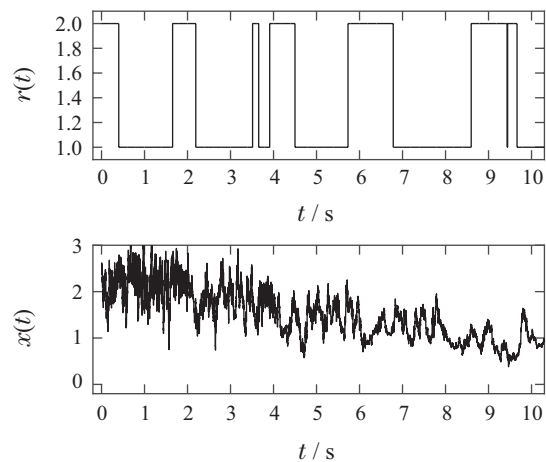


图1 当  $\delta = 2$  时, 系统(1)的计算仿真

Fig. 1 Computer simulation of the system (1) with  $\delta = 2$

为了镇定此类强非线性中立型随机时滞系统, 本文选择了如下所示的间歇控制器:

$$u(x, t) = -10\eta_T x(t),$$

其中: 当  $t \in T$  时,  $\eta_T(t) = 1$ ; 当  $t \in [0, \infty) \setminus T$  时,  $\eta_T(t) = 0$ . 考虑到了一般情况下的仿真, 本文又把间歇性控制输入中的有效时域  $T$  分为以下几种情况:

- 1) 全时域:  $T_{\text{ft}} := [0, \infty)$ ;
- 2) 周期时域:  $T_{\text{pt}} := [0.2\epsilon - 0.1, 0.2\epsilon]$ ;
- 3) 有界非周期时域:  
 $T_{\text{bat}} := [0.2\epsilon - 0.1 - 0.04p_\epsilon, 0.2k]$ ;
- 4) 指数非周期时域:  
 $T_{\text{eat}} := [0.1 \times 2^{2\epsilon-2}, 0.1 \times 2^{2\epsilon-1}]$ ;

其中:  $\epsilon \in N$ ,  $p_\epsilon \in [0, 1]$  是个伪随机数. 对于以上这些情况, 可选取它们的比率指数分别为  $\omega_{T_{\text{ft}}} = 1$ ,  $\omega_{T_{\text{pt}}} = \omega_{T_{\text{eat}}} = 0.5$ ,  $\omega_{T_{\text{bat}}} \in [0.5, 0.7]$ , 对于控制输入中的常数  $b$ , 选择  $b = 10$ . 经过计算可知, 对于  $T$  的所有情况, 均满足定理1中给出的条件  $B > \frac{2S_1}{\omega_T S_2}$ . 为了进行仿真实验, 本文对初始值进行设置, 当  $t \in (-1, 0)$  时,  $r(0) = 2$ ,  $x(t) = 2 + \sin t$ . 在选择下进行案例模拟

后,得到了模拟结果,如图2~5所示,说明仿真结果支持了理论结果.

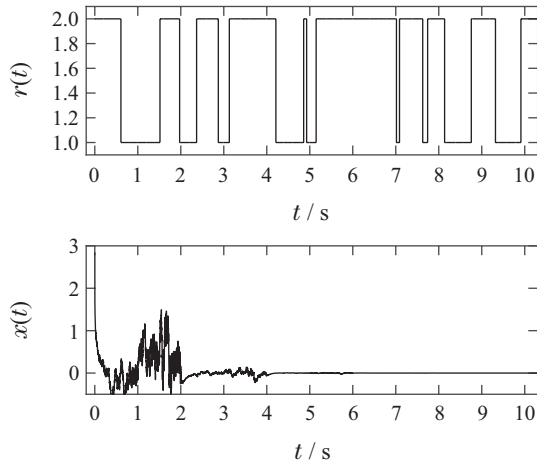


图2 当 $\delta = 2, T = T_{ft}$ 时,受控系统(4)的计算仿真  
Fig. 2 Computer simulation of the controlled system (4) with  $\delta = 2$  and  $T = T_{ft}$

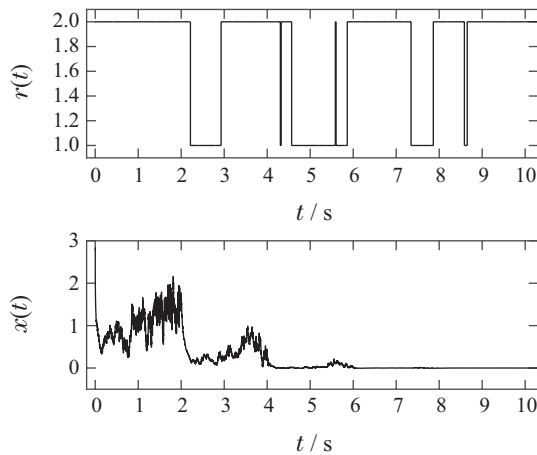


图3 当 $\delta = 2, T = T_{pt}$ 时,受控系统(4)的计算仿真  
Fig. 3 Computer simulation of the controlled system (4) with  $\delta = 2$  and  $T = T_{pt}$

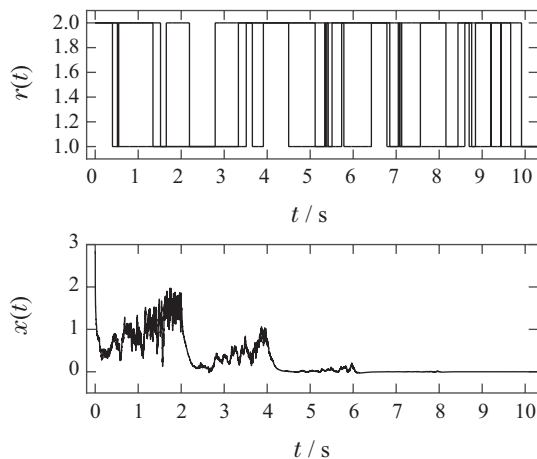


图4 当 $\delta = 2, T = T_{bat}$ 时,受控系统(4)的计算仿真  
Fig. 4 Computer simulation of the controlled system (4) with  $\delta = 2$  and  $T = T_{bat}$

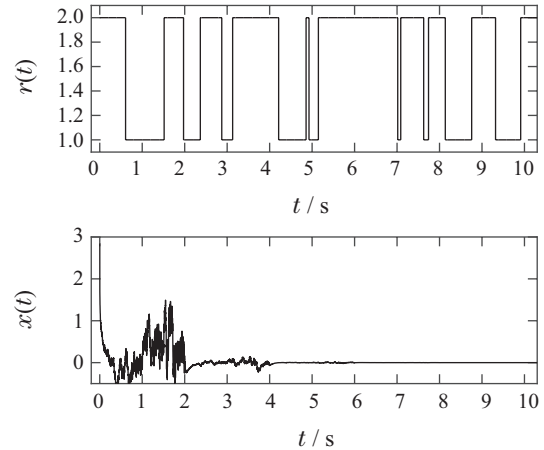


图5 当 $\delta = 2, T = T_{eat}$ 时,受控系统(4)的计算仿真  
Fig. 5 Computer simulation of the controlled system (4) with  $\delta = 2$  and  $T = T_{eat}$

同样地,对于一个不稳定的强非线性中立型随机时滞系统,文献[20]设计了一个连续的控制策略去镇定此类系统,镇定的结果如图6所示.

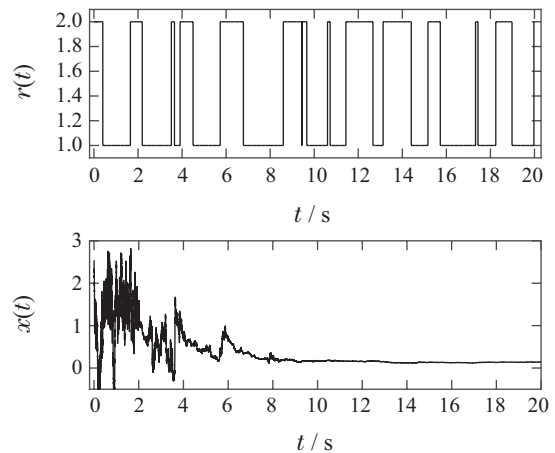


图6 强非线性中立型随机时滞系统在连续控制器作用下的计算仿真  
Fig. 6 Computer simulation of highly nonlinear neutral stochastic delay systems with continuous controllers

从图6中容易看到,此类不稳定的系统在连续控制策略的作用下,第10 s后,系统才逐渐趋于稳定,而在本文设计的间歇控制策略的作用下,系统从第6 s开始,就基本稳定了.由此可见,本文设计的间歇控制混合策略不仅能够节约控制成本,延长控制器的工作寿命,同时也提高了系统的收敛速度.

## 5 结论

本文是针对一类强非线性中立型随机时滞系统提供了一种新颖的间歇控制方案,它是一种混合性的控制策略,可以随意改变有效时间域的长短,并根据有效时间域的不同,去接受不同的输入形式,也可以使用两种或多种控制策略,去镇定此类不稳定的系统.最后,在不同的假设下,作者利用一些随机分析方法,

动力学性质,  $M$ -矩阵和Itô公式, 证明了所设计的方案可以保证闭环系统的指数稳定和几乎确定的稳定.

## 参考文献:

- [1] MAO X. Exponential stability of stochastic delay interval systems with markovian switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(10): 1604 – 1612.
- [2] MAO X. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching. *Stochastic Process and Their Applications*, 1999, 79(1): 45 – 67.
- [3] YANG S, WEN Y, QIAO B, et al. Fault detection filter design for nonlinear singular systems with Markovian jump parameters. *IEEE Systems Journal*, 2021, 15(3): 4168 – 4176.
- [4] MAO X, SHEN Y, YUAN C. Almost surely asymptotic stability of neutral stochastic differential delay equations with markovian switching. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2008, 118(8): 1385 – 1406.
- [5] LI Tao, ZHANG Hexin, SUN Peng. New robust stability criteria for uncertain neutral-type systems with discrete and distributed delay. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(11): 1537 – 1542.  
(李涛, 张合新, 孙鹏. 含离散与分布时滞的不确定中立型系统鲁棒稳定性新判据. 控制理论与应用, 2010, 27(11): 1537 – 1542.)
- [6] MAZENC F. Stability analysis of time-varying neutral time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 60(2): 540 – 546.
- [7] QIAN Wei, SUN Youxian. New robust stability criterion for uncertain neutral systems with time-varying delay. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(3): 358 – 362.  
(钱伟, 孙优贤. 中立型变时滞系统的鲁棒稳定性. 控制理论与应用, 2010, 27(3): 358 – 362.)
- [8] LI M, DENG F. Almost sure stability with general decay rate of neutral stochastic delayed hybrid systems with Lévy noise. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2017, 24: 171 – 185.
- [9] KOLMANOVSKIĬ V B, NOSOV V R. *Stability and Periodic Modes of Control Systems with Aftereffect*. Moscow: Nauka Publishers, 1981.
- [10] MILOŠEVIĆ M. Almost sure exponential stability of solutions to highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and the euler-maruyama approximation. *Mathematical and Computer Modelling*, 2013, 57(3/4): 887 – 899.
- [11] FEI W, HU L, MAO X, et al. Generalized criteria on delay-dependent stability of highly nonlinear hybrid stochastic systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(5): 1201 – 1215.
- [12] ZHANG T, CHEN H, YUAN C, et al. On the asymptotic behavior of highly nonlinear hybrid stochastic delay differential equations. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 2019, 24(10): 5355 – 5375.
- [13] FEI W, HU L, MAO X, et al. Structured robust stability and boundedness of nonlinear hybrid delay systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2018, 56(4): 2662 – 2689.
- [14] WU A, YOU S, MAO W, et al. On exponential stability of hybrid neutral stochastic differential delay equations with different structures. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2021, 39: 100971.
- [15] SHEN M, FEI W, MAO X, et al. Stability of highly nonlinear neutral stochastic differential delay equations. *Systems & Control Letters*, 2018, 115: 1 – 8.
- [16] HU Y, ZONG X, SHE J. Exponential stability of highly nonlinear neutral stochastic differential delay equations. *The 37th Chinese Control Conference (CCC)*. Wuhan, China: IEEE, 2018: 1564 – 1569.
- [17] SHEN M, FEI C, FEI W, et al. Boundedness and stability of highly nonlinear hybrid neutral stochastic systems with multiple delays. *Science China Information Sciences*, 2019, 62(10): 202205.
- [18] SONG R, WANG B, ZHU Q. Delay-dependent stability of nonlinear hybrid neutral stochastic differential equations with multiple delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31(1): 250 – 267.
- [19] MILOŠEVIĆ M. Highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and the euler-maruyama method. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, 54(9/10): 2235 – 2251.
- [20] SHEN M, FEI C, FEI W, et al. Stabilisation by delay feedback control for highly nonlinear neutral stochastic differential equations. *Systems & Control Letters*, 2020, 137: 104645.
- [21] MEI C, FEI C, SHEN M, et al. Discrete feedback control for highly nonlinear neutral stochastic delay differential equations with markovian switching. *Information Sciences*, 2022, 592: 123 – 136.
- [22] ZHOU H, SONG J, LI W. Stabilization of stochastic time-varying coupled systems with delays and Lévy noise on networks based on aperiodically intermittent control. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2020, 91: 103576.
- [23] JIANG Y, HU L, LU J, et al. Stabilization of hybrid systems by intermittent feedback controls based on discrete-time observations with a time delay. *IET Control Theory & Applications*, 2021, 15(16): 2039 – 2052.
- [24] LIU Y, LIU J, LI W. Stabilization of highly nonlinear stochastic coupled systems via periodically intermittent control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 66(10): 4799 – 4806.
- [25] CHEN S, SONG G, ZHENG B, et al. Finite-time synchronization of coupled reaction-diffusion neural systems via intermittent control. *Automatica*, 2019, 109: 108564.
- [26] MAO X. *Stochastic Differential Equations and Applications*. Chichester: Horwood Publishing, 2007.
- [27] WU X, TANG Y, ZHANG W. Stability analysis of stochastic delayed systems with an application to multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(12): 4143 – 4149.
- [28] MAO X, YUAN C. *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching*. London, UK: Imperial College Press, 2006.

## 作者简介:

宋公飞 副教授, 目前研究方向为非线性随机系统、量化控制、机器人控制, E-mail: gfsong@nuist.edu.cn;

张子梦 硕士研究生, 目前研究方向为非线性随机系统、量化控制, E-mail: 20201249173@nuist.edu.cn;

李涛 教授, 目前研究方向为智能控制, E-mail: litaojia@nuist.edu.cn.