

基于障碍Lyapunov函数的 未知控制方向非线性系统的约束鲁棒输出调节

孙伟杰, 乔雨晨, 彭云建[†]

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 本文研究一类不确定非线性系统的约束鲁棒输出调节问题. 在具有未知控制输入方向的情况下, 要求被控非线性系统的受控输出在趋近于零的同时, 被限制在给定的范围内. 文章结合障碍Lyapunov函数和Nussbaum增益技术, 进行反馈控制器的设计. 通过MATLAB仿真验证了控制算法的合理性. 同时, 与基于二次型Lyapunov函数设计的仿真结果进行对比, 表明了控制算法的有效性.

关键词: 输出调节; Lyapunov函数; 输出受限; 控制方向未知; 内模原理

引用格式: 孙伟杰, 乔雨晨, 彭云建. 基于障碍Lyapunov函数的未知控制方向非线性系统的约束鲁棒输出调节. 控制理论与应用, 2023, 40(9): 1696 – 1701

DOI: 10.7641/CTA.2022.20250

Constraint robust output regulation for nonlinear systems with unknown control direction based on a barrier Lyapunov function

SUN Wei-jie, QIAO Yu-chen, PENG Yun-jian[†]

(School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: We investigate the constraint robust output regulation problem for uncertain nonlinear systems. It is assumed that the control direction is unknown, and furthermore, the controlled output is required to be confined in some given region when it approaches zero. Based on the general output regulation framework, a feedback controller is designed by combining the barrier Lyapunov function and Nussbaum-type techniques. Simulation shows the effectiveness of the control scheme and indicates the superiority of barrier Lyapunov function design.

Key words: output regulation; Lyapunov function; output constraint; unknown control direction; internal model

Citation: SUN Weijie, QIAO Yuchen, PENG Yunjian. Constraint robust output regulation for nonlinear systems with unknown control direction based on a barrier Lyapunov function. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(9): 1696 – 1701

1 引言

输出调节问题旨在为不确定系统设计反馈控制器, 使得受控闭环系统在内部状态有界的前提下, 其输出可以在抵抗干扰的同时而渐近跟踪上给定的参考信号. 这类问题也可以称为渐近跟踪或抗干扰问题, 在控制领域得到了广泛关注^[1-5].

然而, 实际物理系统受到外界环境或自身物理结构的约束. 因而, 在对非线性系统进行反馈控制规律的设计时, 必须考虑受控系统的暂态性能. 例如, 在人机交互设计中, 需要对机器人机械手的位置进行约束, 以避免与人或周围环境的碰撞^[6-8]. 此外, 不确定系统存在控制方向未知的问题, 对控制系统的设计带来了挑战^[9]. 20世纪80年代提出的Nussbaum增益技术是处理未知控制方向的标准方法^[10].

在考虑非线性系统的约束输出问题时, 障碍Lyapunov函数 (barrier Lyapunov function, BLF) 技术得到了广泛应用^[11-13]. 与二次型Lyapunov函数 (quadratic Lyapunov function, QLF) 不同, BLF不是径向无界的, 而是在其参数接近某一有限值时趋近于无穷大^[11-12]. 这一特性使得BLF技术可应用于系统输出受到约束的非线性系统控制问题. 为了放松静态约束的要求^[11], 并降低设计保守性, 文献[13]进一步发展了时变BLF技术, 允许期望输出被限制在给定的时变范围内.

基于BLF的控制技术已被成功应用于解决具有输出约束的各类非线性系统^[14-15]. 然而, 现有的研究大多基于逆跟踪设计方法, 这种方法普遍需要依赖于跟踪参考信号的高阶差分信息^[16]. 在实际应用中, 对信号的高阶微分会引入噪声放大问题. 最近, 文献

[17–19]结合Nussbaum增益技术, 将BLF技术应用到控制方向未知的非线性系统跟踪控制问题中, 采用模糊控制和神经网络设计框架, 使跟踪误差收敛到零附近的一个紧集中. 与基于逆跟踪的方法相比, 输出调节设计框架基于内模原理^[20], 消除对高阶微分信息的依赖要求, 而且能够保证跟踪误差渐进收敛到零.

文献[3–4]利用Nussbaum增益技术研究了非线性输出反馈系统控制方向未知时的输出调节问题. 文献[5, 21]考虑了外部系统含有未知参数的情况. 以上研究成果都未考虑被控系统的输出约束. 基于文献[13]的BLF技术, 文献[22]研究了一类非线性系统的约束输出调节问题, 但其要求系统的控制输入方向已知. 因此, 文章将结合BLF方法和Nussbaum增益技术, 讨论一类非线性系统控制方向未知时的约束鲁棒输出调节问题, 使得系统的跟踪误差能渐近趋近于零, 而且一直保持在给定的限制区域内.

本文基于解决鲁棒输出调节问题的一般框架^[20]: 首先, 将非线性系统的约束鲁棒输出调节问题转化为增广系统的约束鲁棒稳定问题; 然后, 将BLF方法与Nussbaum增益技术相结合, 解决增广系统的约束鲁棒稳定问题; 最后, 选用Lorenz系统进行数值仿真, 验证反馈控制器的合理性, 并与基于QLF设计的仿真结果进行对比, 表明反馈控制器的有效性.

2 问题描述及预备知识

考虑如下的一类非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, y, v, w), \\ \dot{y} = g(z, y, v, w) + b(w)u, \\ e = y - y_r, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $z \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ 和 $e \in \mathbb{R}$ 分别表示非线性系统的状态、输出和输出跟踪误差, $u \in \mathbb{R}$ 代表系统的控制输入, $w \in \mathbf{W} \subset \mathbb{R}^{n_w}$ 表示系统中的不确定参数, $v \in \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^{n_v}$ 表示外部系统信号. 给定的目标输出参考信号 $y_r \in \mathbb{R}$ 由如下的线性外部系统提供:

$$\begin{cases} \dot{v} = A(\sigma)v \\ y_r = q(v, w). \end{cases} \quad (2)$$

系统(1)中的所有函数都是充分光滑的. 同时, 系统的控制输入增益 $b(w) \neq 0$, 但符号未知. 对于已知的 $\sigma \in \mathbf{S} \subset \mathbb{R}^l$, 系统(2)中矩阵 $A(\sigma)$ 的所有特征值互异, 并且实部都为零. 因此, 外部系统(2)能够产生有限个阶跃函数和正弦函数的组合, 其幅值和相位由外部系统的初始条件决定.

本文研究的问题描述如下: 对系统(1)建立如下形式的动态输出反馈控制律:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = M\eta + Nu, \\ u = F(\eta, k, e), \\ \dot{k} = \rho(\eta, k, e), \end{cases} \quad (3)$$

使得非线性系统(1)和控制器(3)组成的闭环系统状态有界, 跟踪误差 e 渐近趋于零, 并且输出 $y(t)$ 满足 $|y(t)| \leq k_c(t)$, $\forall t \geq 0$, 其中: (M, N) 是一对待定矩阵, $F(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ 是 η, k, e 的待设计函数, $k_c(t)$ 是一个与时间有关的给定约束.

注1 在控制器(3)中: η 表示内模状态^[2], u 为系统(1)的控制输入, k 为高增益参数. 由于考虑的外部系统(2)是线性的, 因此内模 η 的动态行为是线性的.

如果 $t \geq 0$, $w \in \mathbf{W} \subset \mathbb{R}^{n_w}$, $v(t) \in \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^{n_v}$, 那么存在一个与期望输出 $y_r(t)$ 有关的函数 $\bar{y}_r(t)$, 并且满足 $\bar{y}_r(t) \geq |y_r(t)|$. 定义函数 $k_b(t) = k_c(t) - \bar{y}_r(t)$. 如果 $\forall t \geq 0$, $|e(t)| < k_b(t)$ 得到满足, 则有

$$|y_r(t)| \leq \bar{y}_r(t) < k_c(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (4)$$

通过上述变换, 可以将系统的输出约束转化为系统的输出跟踪误差约束, 其中 $k_b(t)$ 是跟踪误差的约束函数. 通过引入 $\bar{y}_r(t)$, 将被控系统的输出约束问题转化为跟踪误差约束问题. 根据文献[20]中提出的输出调节设计框架, 引进如下标准假设:

假设1 存在一个满足 $z(0, w, \sigma) = 0$ 的充分光滑函数 $z(v, w, \sigma) : \mathbb{R}^{n_v} \times \mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$, 且

$$\frac{\partial z(v, w, \sigma)}{\partial v} A(\sigma)v = f(z(v, w, \sigma), q(v, w), v, w).$$

根据假设1, 令 $y(v, w) = q(v, w)$, 可以计算得到

$$u(v, w, \sigma) = b^{-1}(w) \left[\frac{\partial q(v, w)}{\partial v} A(\sigma)v - g(z(v, w, \sigma), q(v, w), v, w) \right]. \quad (5)$$

此时, $z(v, w, \sigma)$, $y(v, w, \sigma)$ 和 $u(v, w, \sigma)$ 给出了系统(1)的调节器方程的解^[2]. 为了构造线性动态补偿器来重建稳态控制输入 $u(v, w, \sigma)$, 引入如下假设:

假设2 函数 $u(v, w, \sigma)$ 是有关 v 的多项式, 并且该多项式的系数依赖于不确定性参数 w 和 σ .

注2 由文献[2]和文献[23]可知, 对于线性外部系统(2), 如果系统(1)中的函数 $f(z, y, v, w)$ 是 (z, y, v) 的多项式, 且系数依赖于 w , 则假设1中的 $z(v, w, \sigma)$ 一定有解. 此时, 如果系统(1)中的函数 $g(z, y, v, w)$ 和 $q(v, w)$ 也是关于 (z, y, v) 的多项式且系数依赖于 w , 则假设2得到满足.

由文献[21]可知, 存在一个正整数 s , 对于外部系统(2)的 v 以及任意的 $(w, \sigma) \in \mathbf{W} \times \mathbf{S}$, 函数 $u(v, w, \sigma)$ 满足下面方程:

$$\begin{aligned} \frac{d^s u(v, w, \sigma)}{dt^s} &= h_1(\sigma)u(v, w, \sigma) + \\ &h_2(\sigma) \frac{du(v, w, \sigma)}{dt} + \cdots + \\ &h_s(\sigma) \frac{d^{s-1} u(v, w, \sigma)}{dt^{s-1}}, \end{aligned}$$

其中 $h_1(\sigma), h_2(\sigma), \dots, h_s(\sigma)$ 为实数, 并且对于任意

的 $\sigma \in S$, 多项式

$$P^\sigma(a) = a^s - h_1(\sigma) - h_2(\sigma)a - \cdots - h_s(\sigma)a^{s-1}$$

具有实部为零的各个互异根.

定义 $\Phi(\sigma) = \begin{bmatrix} 0_{(s-1) \times 1} & I_{s-1} \\ h_1(\sigma) & h_2(\sigma) \cdots h_s(\sigma) \end{bmatrix}$ 和 $\Psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{(s-1) \times 1} \end{bmatrix}^T$. 选择Hurwitz矩阵 $M \in \mathbb{R}^{s \times s}$ 和列向量 $N \in \mathbb{R}^{1 \times s}$, 使得 (M, N) 是能控矩阵对. 对任意 $\sigma \in S$, 矩阵 $\Phi(\sigma)$ 的特征值都具有零实部, 并且 $(\Psi, \Phi(\sigma))$ 是能观矩阵对. 因而, 存在唯一的非奇异解 $T(\sigma)$ 满足Sylvester方程 $T(\sigma)\Phi(\sigma) - MT(\sigma) = N\Psi$.

定义 $\pi(v, w, \sigma) = [u \ u \ \cdots \ u^{(s-1)}]^T$, 则有

$$\begin{cases} \frac{\partial \vartheta(v, w, \sigma)}{\partial v} A(\sigma)v = (M + N\Psi^\sigma)\vartheta(v, w, \sigma), \\ u(v, w, \sigma) = \Psi^\sigma \vartheta(v, w, \sigma), \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\vartheta(v, w, \sigma) = T(\sigma)\pi(v, w, \sigma)$, $\Psi^\sigma = \Psi T^{-1}(\sigma)$.

根据式(6), 构造如下动态补偿器:

$$\dot{\eta} = M\eta + Nu, \quad (7)$$

上式可称为系统(1)输出为 u 的内模^[20].

将内模动态方程(7)与非线性系统(1)合并, 然后进行如下的坐标变换:

$$\begin{cases} \bar{z} = z - z(v, w, \sigma), \\ \bar{\eta} = \eta - \vartheta(v, w, \sigma) - Nb^{-1}(w)e, \\ e = y - q(v, w), \end{cases} \quad (8)$$

可得增广系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}} = f(\bar{z} + z, e + q, v, w) - f(z, q, v, w), \\ \dot{\bar{\eta}} = M\bar{\eta} + MNb^{-1}e - Nb^{-1}(g(\bar{z} + z, e + q, v, w) - g(z, q, v, w)), \\ \dot{e} = (g(\bar{z} + z, e + q, v, w) - g(z, q, v, w)) + b\Psi^\sigma \bar{\eta} + \Psi^\sigma Ne + b\bar{u}, \end{cases} \quad (9)$$

其中: $b = b(w)$, $\bar{u} = u - \Psi^\sigma \eta$. 因此, 如果存在控制器

$$\begin{cases} \bar{u} = \kappa_\xi(\xi, e), \\ \dot{\xi} = \iota_\xi(\xi, e), \end{cases} \quad (10)$$

可以解决增广系统(9)在跟踪误差受约束且控制方向未知情况下的稳定性问题, 则控制器

$$\begin{cases} u = \kappa_\xi(\xi, e) + \Psi^\sigma \eta, \\ \dot{\eta} = M\eta + Nu, \\ \dot{\xi} = \iota_\xi(\xi, e), \end{cases} \quad (11)$$

可以解决系统(1)的约束输出调节问题^[20].

3 主要结果

这一部分, 本文将使用BLF技术和Nussbaum增益技术解决增广系统(9)的约束镇定问题. 为此, 引入如

下引理^[11]和假设³^[21].

引理 1 对正常数 k_1 和 k_2 , 令开区间 $\mathcal{Z} = \{\xi \in \mathbb{R} : -k_1 < \xi < k_2\} \subset \mathbb{R}$ 和开区间 $\mathbb{N} = \mathbb{R}^l \times \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{l+1}$. 考虑如下系统:

$$\dot{\zeta} = h(t, \zeta),$$

其中: $\zeta = (\omega, \xi)^T \in \mathbb{N}$, 函数 $h: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$ 在时间 t 上分段连续且对 ζ 满足局部Lipschitz条件. 假定存在两个正定可微的函数 $V_1: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 和 $U: \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, 并分别满足如下条件: 1) $V_1(\xi) \rightarrow \infty$, 当 $\xi \rightarrow -k_1$ 或 $\xi \rightarrow k_2$ 时; 2) $\gamma_1(\|\omega\|) \leq U(\omega, t) \leq \gamma_2(\|\omega\|)$, 其中: 函数 $\gamma_1(\cdot)$ 和 $\gamma_2(\cdot)$ 均为 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数. 令函数 $V(\zeta) = V_1(\xi) + U(\omega, t)$ 且初始值 $\xi(0) \in \mathcal{Z}$. 对于 $\xi \in \mathcal{Z}$, 如果 $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \zeta} h \leq 0$, 则对 $t \geq 0$ 的时刻, 有 $\xi(t) \in \mathcal{Z}$.

假设 3 考虑增广系统(9), 对于所有的 $\mu = (v, w) \in \Sigma \subset \mathbb{R}^{n_v} \times \mathbb{R}^{n_w}$, 存在一个满足下面条件的 C^1 函数 $V(\bar{z})$:

$$\begin{cases} \underline{\alpha}(\|\bar{z}\|) \leq V(\bar{z}) \leq \bar{\alpha}(\|\bar{z}\|), \\ \frac{\partial V(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \dot{\bar{z}} \leq -\alpha(\|\bar{z}\|) + \delta\gamma(e), \end{cases} \quad (12)$$

其中: $\underline{\alpha}(\cdot)$ 和 $\bar{\alpha}(\cdot)$ 是 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数, δ 是未知的正常数, $\gamma(\cdot)$ 是已知的光滑正定函数, $\alpha(\cdot)$ 是已知的 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数且满足 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \sup(\alpha^{-1}(s^2)/s) < +\infty$.

注 3 在假设3下, 由系统(9)的第1个子系统动态方程可知, 子系统状态 $\bar{z}$ 在输入 e 下是输入-状态(input-to-state stable, ISS)稳定的^[24]. 利用文献[24]中的变供给函数技术, 对于任意光滑函数 $\Delta(\bar{z}) > 0$ 及两个 $\mathcal{K}_\infty$ 函数 $\underline{\alpha}_{1\bar{z}}(\cdot)$ 和 $\bar{\alpha}_{1\bar{z}}(\cdot)$, 存在一个满足 $\underline{\alpha}_{1\bar{z}}(\|\bar{z}\|) \leq \bar{V}_{\bar{z}}(\bar{z}) \leq \bar{\alpha}_{1\bar{z}}(\|\bar{z}\|)$ 的 C^1 函数 $\bar{V}_{\bar{z}}(\bar{z})$, 使其对于任意 $\mu \in \Sigma$, 沿着子系统 $\bar{z}$ 轨迹的导数满足

$$\dot{\bar{V}}_{\bar{z}} \leq -\Delta(\bar{z})\|\bar{z}\|^2 + \delta_e \gamma_e(e)e^2, \quad (13)$$

其中: δ_e 是未知正常数, $\gamma_e(\cdot)$ 是已知光滑正函数.

选择改进型障碍Lyapunov函数(modified barrier Lyapunov function, MBLF)

$$V_{\text{MBLF}} = \ln \frac{k_b^2(t) \exp(e^2(t))}{k_b^2(t) - e^2(t)}, \quad (14)$$

其中: $\ln(\cdot)$ 表示自然对数, $\exp(\cdot)$ 表示以自然常数 e 为底的指数函数. 式(14)的MBLF函数, 既适用于处理有输出约束的情况, 又可以处理无输出约束的情况, 扩展了BLF技术的应用范围^[16]. 同时, 由于非系统(1)的控制输入方向未知, 本文选择Nussbaum增益函数^[3]为 $\mathcal{N}(k) = k^2 \cos k$.

引理 2 在假设3下, 对于增广系统(9), 考虑如下形式的控制器:

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{k_b^2 - e^2}{2(k_b^2 - e^2 + 1)} \mathcal{N}(k) \rho(e)e, \\ \dot{k} = \rho(e)e^2, \end{cases} \quad (15)$$

则存在正常数 p , 光滑实函数 $\rho(\cdot) \geq 1$ 和Lyapunov函数 V , 并且 V 沿着闭环系统轨迹的导数满足

$$\dot{V} \leq (b\mathcal{N}(k) + p)\dot{k}. \quad (16)$$

证 首先, 将增广系统(9)的子系统动态 $(\bar{z}, \bar{\eta})$ 看作文献[21]中方程(17)的形式, 其中

$$\begin{cases} z_1 = \bar{z}, z_2 = \bar{\eta}, u = e, A = M, \\ \varphi_1(z_1, u, \mu) = f(\bar{z} + z, e + q, \mu) - f(z, q, v, w), \\ \varphi_2(z_1, u, \mu) = MNb^{-1}e - Nb^{-1}(g(\bar{z} + z, e + q, \mu) - g(z, q, \mu)). \end{cases} \quad (17)$$

因此, 在假设3下, 依据文献[21]中的引理3.1可得, 对任意的 $\mu \in \Sigma$, 存在一个满足下面条件的 C^1 函数 $V_1(\bar{z}, \bar{\eta})$, 即

$$\underline{\alpha}_1(\|\bar{z}, \bar{\eta}\|) \leq V_1(\bar{z}, \bar{\eta}) \leq \bar{\alpha}_1(\|\bar{z}, \bar{\eta}\|), \quad (18)$$

其中: $\underline{\alpha}_1(\cdot)$ 和 $\bar{\alpha}_1(\cdot)$ 是 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数, 并且 $V_1(\bar{z}, \bar{\eta})$ 沿着 $(\bar{z}, \bar{\eta})$ 子系统轨迹的导数满足

$$\dot{V}_1 \leq -\|\bar{z}\|^2 - \|\bar{\eta}\|^2 + \bar{\delta}_e \bar{\gamma}_e(e), \quad (19)$$

其中: $\bar{\delta}_e$ 为正常数, $\bar{\gamma}_e(\cdot)$ 是已知的光滑正实函数. 运用文献[24]的变供给函数方法可得, 给定一个光滑正实函数 $\Delta(\bar{z}, \bar{\eta}) > 0$, 存在一个满足下面条件的 C^1 函数 $U(\bar{z}, \bar{\eta})$, 即

$$\underline{\alpha}_2(\|\bar{z}, \bar{\eta}\|) \leq U(\bar{z}, \bar{\eta}) \leq \bar{\alpha}_2(\|\bar{z}, \bar{\eta}\|), \quad (20)$$

其中: $\underline{\alpha}_2(\cdot)$ 和 $\bar{\alpha}_2(\cdot)$ 是 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数, 并且 $U(\bar{z}, \bar{\eta})$ 沿着 $(\bar{z}, \bar{\eta})$ 子系统轨迹的导数满足

$$\dot{U} \leq -\Delta(\bar{z}, \bar{\eta})\|\bar{z}, \bar{\eta}\|^2 + \bar{\delta}_e \bar{\gamma}_e(e)e^2, \quad (21)$$

其中: $\bar{\delta}_e$ 为正常数, $\bar{\gamma}_e(\cdot)$ 为已知的光滑正实函数.

其次, 对式(14)中的MBLF函数 V_{MBLF} 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\text{MBLF}} &= \frac{2(k_b^2 - e^2 + 1)e}{k_b^2 - e^2} \tilde{g}(\bar{z}, \bar{\eta}, e, \mu) - \\ &\quad \frac{2e}{k_b^2 - e^2} \frac{\dot{k}_b}{k_b} e + b\mathcal{N}(k)\rho(e)e^2, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\tilde{g}(\bar{z}, \bar{\eta}, e, \mu) = (g(\bar{z} + z, e + q, \mu) - g(z, q, \mu)) + b\Psi^\sigma \bar{\eta} + \Psi^\sigma N e$. 由于 $\tilde{g}(0, 0, 0, \mu) = 0$, 运用文献[2]中的引理7.8, 对 $\mu \in \Sigma$, 可得如下不等式:

$$|\tilde{g}(Z, e, \mu)|^2 \leq p_1(\Delta_1(Z)\|Z\|^2 + \rho_1(e)e^2), \quad (23)$$

其中: $Z = \text{col}(\bar{z}, \bar{\eta})$, p_1 是未知正常数, $\Delta_1(Z)$ 和 $\rho_1(e)$ 是两个光滑的正实函数.

定义Lyapunov函数 $V = U(Z) + V_{\text{MBLF}}$. 结合式(21)–(22), 可得 V 沿着增广系统(9)和控制器(15)组成的闭环系统的轨迹满足

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(\Delta(Z) - p_1\Delta_1(Z))\|Z\|^2 + (b\mathcal{N}(k) + \\ &\quad p)\rho(e)e^2 - (p\rho(e) - \chi(e, k_b))e^2, \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \chi(e, k_b) &= \bar{\delta}_e \bar{\gamma}_e(e) + \frac{(k_b^2 - e^2 + 1)^2}{(k_b^2 - e^2)^2} + p_1\rho_1(e) + \\ &\quad \frac{1}{(k_b^2 - e^2)^2} + \left(\frac{\dot{k}_b}{k_b}\right)^2. \end{aligned}$$

存在正常数 p, ϱ 满足 $p \geq \varrho \max(\bar{\delta}_e, p_1, (\frac{\dot{k}_b}{k_b})^2 + 1)$. 选择 $\Delta(Z) \geq p_1\Delta_1(Z) + 1$ 和

$$\rho(e) \geq \varrho^{-1}(\bar{\gamma}_e(e) + \rho_1(e) + 1 + \frac{2(k_b^2 - e^2 + 1)}{(k_b^2 - e^2)^2}),$$

可得不等式(16)成立. 证毕.

根据引理2, 可得到如下定理.

定理 1 在假设1–3下, 如下反馈控制器:

$$\begin{cases} u = \frac{k_b^2 - e^2}{2(k_b^2 - e^2 + 1)} \mathcal{N}(k)\rho(e)e + \Psi^\sigma \eta, \\ \dot{\eta} = M\eta + Nu, \\ \dot{k} = \rho(e)e^2, \end{cases} \quad (25)$$

可以解决非线性系统(1)在控制方向未知情况下的约束鲁棒输出调节问题.

证 在时间区间 $[0, t], \forall t \geq 0$ 上, 对不等式(16)的两边同时积分, 可得

$$V(t) - V(0) \leq \int_0^t (b\mathcal{N}(k(\tau)) + p)\dot{k}(\tau) d\tau, \quad (26)$$

根据式(26)以及文献[25]中的引理1, 对于时间区间 $[0, T], 0 < T \leq \infty$, 可知 $V(t)$ 和 $k(t)$ 是有界的. 由于 $V(t)$ 是关于闭环系统状态的正定函数, 可知增广系统(9)和反馈控制器(15)构成的闭环系统的解有界, 并且根据式(15)可知 $\dot{k} = \rho(e)e^2$. 因此, $e(t)$ 是平方可积的. 考虑到 $e(t)$ 和 $\dot{e}(t)$ 的有界性, 由Barbalat引理可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. 依据引理1, 如果 $|e(0)| \leq k_b(0)$, 则 $|e(t)| \leq k_b(t), \forall t \in [0, \infty)$. 证毕.

4 数值仿真

考虑以下Lorenz系统^[3]:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -L_1 z_1 + L_1 y, \\ \dot{z}_2 = L_2 z_2 + z_1 y, \\ \dot{y} = L_3 z_1 - y - z_1 z_2 + bu, \end{cases} \quad (27)$$

其中: (L_1, L_2, L_3) 是系统的常参数向量, $L_1 > 0, L_2 < 0$, 并且 b 是一个未知符号的非零常数.

系统输出 $y(t)$ 要实现跟踪的正弦参考信号 $v_1(t)$ 由外部系统(2)产生, 初始状态 $v_0 = [0 \ 1]^T$. 同时, 要求系统输出 $y(t)$ 满足 $|y(t)| \leq k_c(t), \forall t \geq 0$, 其中 $k_c(t) = 1.4 + 0.33 \cos t$. 选取参考信号上限函数 $\bar{y}_r(t)$ 中的参数 $\lambda = 0.5$, 可得跟踪误差约束函数 $k_b(t) = k_c(t) - \bar{y}_r(t)$.

由文献[3]可知, 假设1–2得到满足, 并且

$$\Phi(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -9\sigma^4 & [0 \ -10\sigma^2 \ 0] \end{bmatrix}, \Psi = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

选择能控矩阵对

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -4 & [-12 \quad -13 \quad -6] \end{bmatrix}, N = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T,$$

构造内模动态方程 $\dot{\eta} = M\eta + Nu$, 可得对应的增广系统^[3].

根据第3部分给出的设计思路, 可得 $\rho(e) = 11(e^6 + e^2 + 1 + \frac{2(k_b^2 - e^2 + 1)}{(k_b^2 - e^2)^2})$. 选取正弦参考信号的频率 $\sigma = 0.8$, 给定Lorenz系统的参数 $L_1 = 10$, $L_2 = -\frac{8}{3}$, $L_3 = 28$, 系统的初始状态为 $(z_1(0), z_2(0)) = (2, -1)$, $\eta(0) = 0$ 和 $k(0) = 1$.

系统输出 $y(t)$ 的初始状态分别设置为 $y(0) = 1.2$ 和 $y(0) = -1.2$, 分析可得 $|e(0)| < k_b(0)$. 在控制输入 $b = 1$ 时, 图1-2分别给出了系统的输出曲线和跟踪误差输出曲线. 图3-4则分别给出了 $b = -1$ 时的对应结果. 从仿真结果可以看出, 系统输出 $y(t)$ 能渐近跟踪上参考输入信号, 而且始终没有越过输出约束函数 $k_c(t)$. 采用文献[13]中的BLF, 在图1-4中同时给出了对应的仿真结果. 对比可知, 文章基于式(14)的MBLF控制器使得约束范围内的跟踪误差更加远离约束范围. 在同样的系统初始状态和系统参数设定下, 本文进行了基于QLF设计方法的仿真对比, 相应仿真结果则由图5-6分别给出. 可以看出, 虽然系统输出 $y(t)$ 可以跟踪上给定参考信号. 但是, 系统输出在跟踪的过程中越过了输出约束函数 $k_c(t)$ 的限定范围.

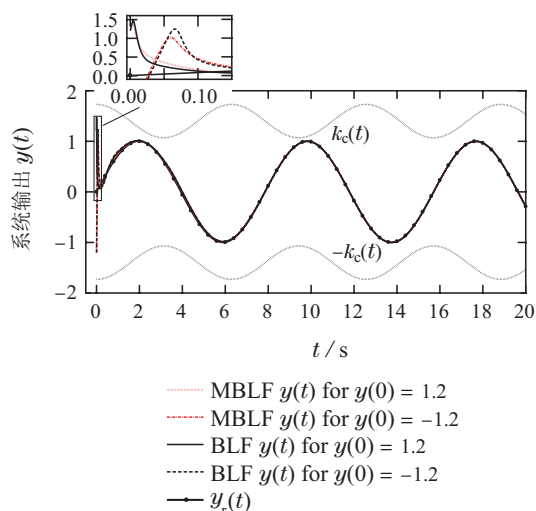


图1 $b = 1$ 时, 输出 $y(t)$ 的响应曲线(MBLF and BLF)

Fig. 1 Profile of $y(t)$, when $b = 1$ with MBLF and BLF

5 总结

本文讨论了一类非线性系统在控制方向未知下的约束鲁棒输出调节问题. 在基于内模原理的输出调节框架下, 文章综合利用障碍Lyapunov函数与Nussbaum增益函数相结合的技术方案, 设计对应的输出反馈控制器. 以Lorenz系统为仿真实例, 与基于传统二

次型Lyapunov函数设计的仿真结果对比, 表明了本文控制方案的有效性. 未来工作可考虑将研究方法推广至其他类型非线性系统的类似输出约束问题.

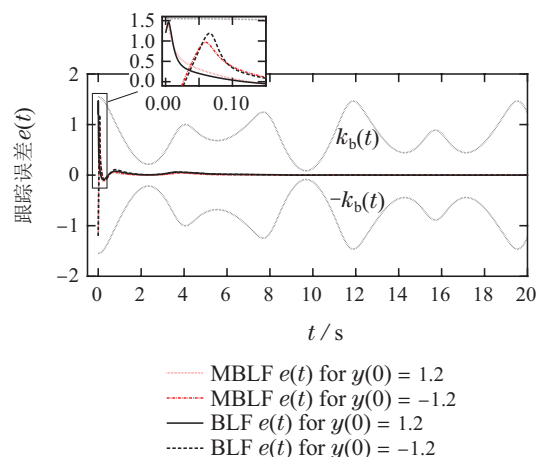


图2 $b = 1$ 时, 输出 $e(t)$ 的响应曲线(MBLF and BLF)

Fig. 2 Profile of $e(t)$, when $b = 1$ with MBLF and BLF

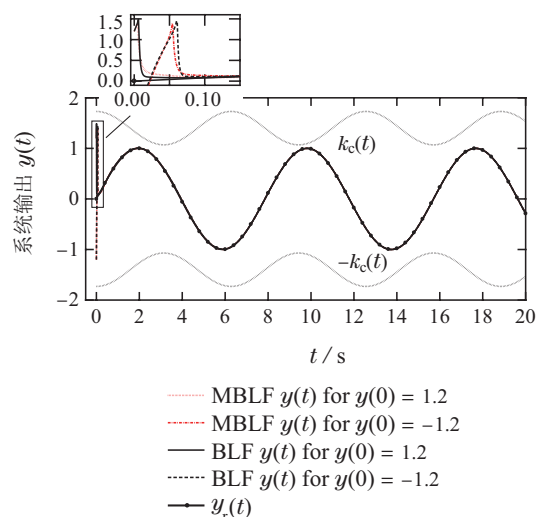


图3 $b = -1$ 时, 输出 $y(t)$ 的响应曲线(MBLF and BLF)

Fig. 3 Profile of $y(t)$, when $b = -1$ with MBLF and BLF

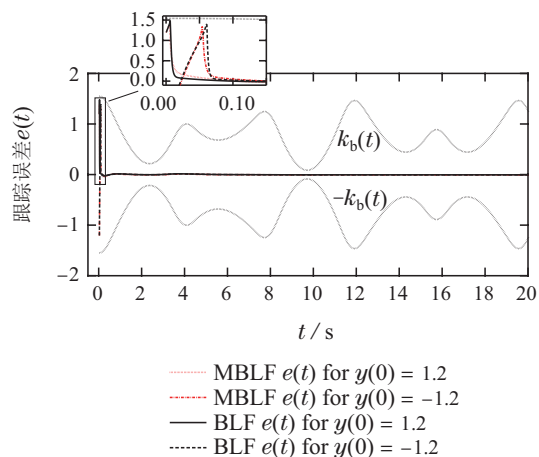
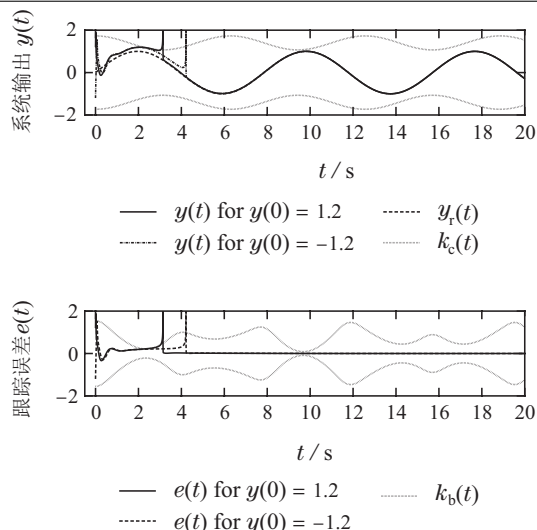
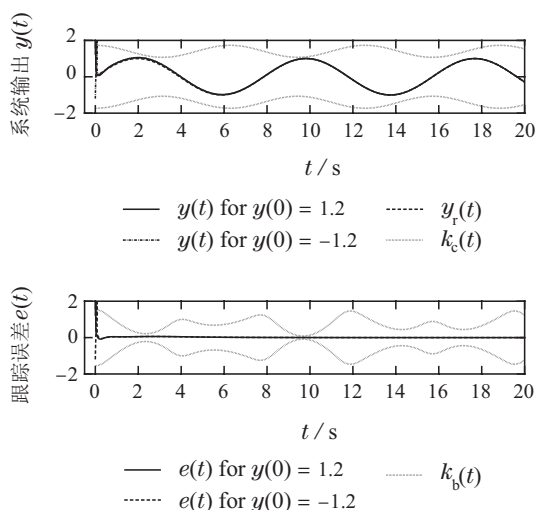


图4 $b = -1$ 时, 输出 $e(t)$ 的响应曲线(MBLF and BLF)

Fig. 4 Profile of $e(t)$, when $b = -1$ with MBLF and BLF

图5 $b = 1$ 时, $y(t)$ 和 $e(t)$ 的响应曲线(QLF)Fig. 5 Profile of $y(t)$ and $e(t)$, when $b = 1$ with QLF图6 $b = -1$ 时, $y(t)$ 和 $e(t)$ 的响应曲线(QLF)Fig. 6 Profile of $y(t)$ and $e(t)$, when $b = -1$ with QLF

参考文献:

- [1] ISIDORI A, BYRNES C. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(2): 131 – 140.
- [2] HUANG J. *Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications*. Philadelphia, PA: SIAM, 2004.
- [3] XU D, HUANG J. Output regulation design for a class of nonlinear systems with an unknown control direction. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2010, 132(1): 014503.
- [4] LIU L, HUANG J. Global robust output regulation of output feedback systems with unknown high-frequency gain sign. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(4): 625 – 631.
- [5] GUO Meichen, LIU Lu. Adaptive output regulation problem for a class of nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 987 – 992.
(郭美忱, 刘璐. 一类非线性输出反馈系统的自适应输出调节问题. *控制理论与应用*, 2014, 31(7): 987 – 992.)
- [6] HE W, CHEN Y, YIN Z. Adaptive neural network control of an uncertain robot with full-state constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(3): 620 – 629.
- [7] HE W, DAVID A, YIN Z, et al. Neural network control of a Robotic manipulator with input deadzone and output constraint. *Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 46(6): 759 – 770.
- [8] YANG C, JIANG Y, LI Z, et al. Neural control of bimanual robots with guaranteed global stability and motion precision. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2017, 13(3): 1162 – 1171.
- [9] CHEN W, LI X, REN W, et al. Adaptive consensus of multi-agent systems with unknown identical control directions based on a novel nussbaum-type function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(7): 1887 – 1892.
- [10] NUSSBAUM R. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *Systems & Control Letters*, 1983, 3(5): 243 – 246.
- [11] TEE K P, GE S S, TAY E H. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems. *Automatica*, 2009, 45(4): 918 – 927.
- [12] TEE K P, GE S S, TAY E H. Adaptive control of electrostatic microactuators with bidirectional drive. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, 17(2): 340 – 352.
- [13] TEE K P, REN B, GE S S. Control of nonlinear systems with time-varying output constraints. *Automatica*, 2011, 47(11): 2511 – 2516.
- [14] HE W, SUN C, GE S S. Top tension control of a flexible marine riser by using Integral-barrier Lyapunov function. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2015, 20(2): 497 – 505.
- [15] LI D, LIU Y, TONG S, et al. Neural networks-based adaptive control for nonlinear state constrained systems with input delay. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(4): 1249 – 1258.
- [16] WANG M, DONG X, REN X. Adaptive output feedback control for a multi-motor driving system with completely tracking errors constraint. *The 33rd Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. Kunming: IEEE, 2021: 2672 – 2677.
- [17] LIU Y, TONG S. Barrier Lyapunov functions for Nussbaum gain adaptive control of full state constrained nonlinear systems. *Automatica*, 2017, 76: 143 – 152.
- [18] TANG F, NIU B, WANG H, et al. Adaptive fuzzy tracking control of switched MIMO nonlinear systems with full state constraints and unknown control directions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, 69(6): 2912 – 2916.
- [19] YANG J, LI Y. Nussbaum gain adaptive neural asymptotic tracking of nonlinear systems with full-state constraints. *International Journal of Systems Science*, 2022, 53(6): 1274 – 1287.
- [20] HUANG J, CHEN Z. A general framework for tackling the output regulation problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(12): 2203 – 2218.
- [21] XU D, HUANG J. Robust adaptive control of a class of nonlinear systems and its applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2010, 57(3): 691 – 702.
- [22] SUN W, ZHU Z, LAN J, et al. Adaptive output regulation for a class of nonlinear systems with guaranteed transient performance. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2020, 42(6): 1180 – 1190.
- [23] HUANG J. On the solvability of the regulator equations for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 880 – 885.
- [24] SONTAG E, TEEL A. Changing supply functions in input/state stable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(8): 1476 – 1478.
- [25] YE X, JIANG J. Adaptive nonlinear design without a priori knowledge of control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(11): 1617 – 1621.

作者简介:

孙伟杰 博士, 副教授, 研究方向为非线性系统控制、学习控制与自适应优化, E-mail: auwjsun@scut.edu.cn;

乔雨晨 硕士研究生, 研究方向为自适应非线性系统控制, E-mail: auycqiao@mail.scut.edu.cn;

彭云建 博士, 教授, 研究方向为随机系统稳定性分析、学习控制与自适应优化, E-mail: pengyj@scut.edu.cn.