第 40 卷第 8 期
2023 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 40 No. 8
Aug. 2023

带有常数干扰的正则线性系统的镇定

支　霞[1]，　冯红银萍[2†]

(1. 山西警察学院 网络安全保卫系, 山西 太原 030401; 2. 山西大学 数学科学学院, 山西 太原 030006)

摘要: 本文考虑带有常数干扰的抽象正则线性系统的状态反馈镇定问题. 本文控制设计采用线性系统的动态补偿方法, 将传统的PID控制推广到无穷维正则线性系统. 通过引入积分作用, 控制器可以有效地补偿常数干扰. 论文给出了具体的状态反馈法则, 并证明了对应闭环系统的指数稳定性. 理论结果被应用于带有常数干扰的不稳定热方程, 给出了控制器及其闭环系统的指数稳定性, 数值仿真验证了本文理论结果的有效性.

关键词: 常数干扰; 动态补偿; 状态反馈; 不稳定热方程

引用格式: 支霞, 冯红银萍. 带有常数干扰的正则线性系统的镇定. 控制理论与应用, 2023, 40(8): 1365 – 1368

DOI: 10.7641/CTA.2023.20277

Stabilization of the regular linear system with constant disturbance

ZHI Xia[1], FENG Hong-yin-ping[2†]

(1. Department of Network Security, Shanxi Police College, Taiyuan Shanxi 030401, China;
2. School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan Shanxi 030006, China)

Abstract: In this paper, we are concerned with the stabilization problem of the regular linear system with the constant disturbance. The method of dynamic compensation for the linear system is used to the controller design. The conventional PID control is extended to the infinite-dimensional regular linear systems. By introducing the integral action, the controller can compensate for the constant disturbance effectively. The concrete state feedback law is proposed and the exponential stability of the corresponding closed-loop system is proved in this paper. The theoretical results are applied to the unstable heat equation with constant disturbance. Both the controller and its exponential stability of the corresponding heat closed-loop system are given. The numerical simulation is given to show the effectiveness of the obtained theoretical results.

Key words: constant disturbance; dynamic compensation; state feedback; unstable heat equation

Citation: ZHI Xia, FENG Hongyinping. Stabilization of the regular linear system with constant disturbance. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(8): 1365 – 1368

1　引言

由于动态反馈能更充分地利用系统的历史信息, 因此可能取得比静态反馈更好的控制效果. 动态反馈的优势主要体现在两个方面: 对干扰的鲁棒性和不稳定系统的处理. 本文只关注积分控制对常数干扰的鲁棒性. 目前有很多处理干扰的控制技术, 例如: 处理谐波干扰的自适应控制[1–2]、处理一般干扰的高增益技术[3]和估计/消除策略[4–5]以及处理动态已知干扰的内模原理[6]等.

本文将用动态补偿的方法处理常数干扰, 由于考虑抽象系统, 因此研究具有广泛的一般性. 众所周知, PID (proportion integral differential) 控制可以消除静态误差, 对常数干扰具有鲁棒性. 本文受此启发来设计抽象系统的控制器. 为了更清楚地说明积分作用对常数干扰的鲁棒性, 便于控制器设计, 首先, 考虑如下二阶系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=d+u(t),\end{cases} \tag{1}$$

其中: x_1, x_2是系统状态, u是控制, $d\in\mathbb{R}$是常数干扰. 考虑PID控制

$$u(t)=-k_{\rm p}x_1(t)-k_{\rm i}\int_0^t x_1(s){\rm d}s-k_{\rm d}x_2(t), \tag{2}$$

其中$k_{\rm p}, k_{\rm i}, k_{\rm d}$是调节参数. 若令

$$x_0(t)=\int_0^t x_1(s){\rm d}s,\quad t\geqslant 0, \tag{3}$$

则由系统(1)和反馈(2)组成的闭环系统为

收稿日期: 2022−04−15; 录用日期: 2023−03−14.
†通信作者. E-mail: fhyp@sxu.edu.cn.
本文责任编委: 郭宝珠.
国家自然科学基金项目(62273217, 12131008), 山西省自然科学基金项目(202203021223002, 201901D111041), 山西省科技创新人才团队专项项目(202204051002015)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (62273217, 12131008), the Natural Science Foundation of Shanxi (202203021223002, 201901D111041) and the special fund for Science and Technology Innovation Teams of Shanxi Province (202204051002015).

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = d - k_{\mathrm{i}} x_0(t) - k_{\mathrm{p}} x_1(t) - k_{\mathrm{d}} x_2(t). \end{cases} \tag{4}$$

如果我们选择$k_{\mathrm{p}}, k_{\mathrm{i}}, k_{\mathrm{d}}$使得如下矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_{\mathrm{i}} & -k_{\mathrm{p}} & -k_{\mathrm{d}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

是Hurwitz阵, 则由于闭环系统(4)的解满足

$$\lim_{t\to+\infty} [\|[x_1(t) \quad x_2(t)]\|_{\mathbb{R}^2} + |k_{\mathrm{i}} x_0(t) - d|] = 0. \tag{6}$$

事实上, 若令

$$z(t) = x_0(t) - \frac{d}{k_{\mathrm{i}}}, \tag{7}$$

则闭环系统(4)变成如下无干扰系统:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -k_{\mathrm{i}} z(t) - k_{\mathrm{p}} x_1(t) - k_{\mathrm{d}} x_2(t). \end{cases} \tag{8}$$

由于矩阵(5)是Hurwitz阵, 系统(8)的解满足

$$\lim_{t\to+\infty} \|[z(t) \quad x_1(t) \quad x_2(t)]\|_{\mathbb{R}^3} = 0, \tag{9}$$

综合式(7)(9)可得收敛式(6).

受上述例子的启发, 本文考虑一般正则线性系统的比例积分反馈镇定器使其对常数干扰具有鲁棒性. 本文结构安排如下: 第2节给出基本的预备知识和问题描述; 第3节给出本文的主要结果; 第4节将抽象结果应用于不稳定热方程; 第5节给出数值模拟验证理论结果; 最后一节对本文做出总结.

2 问题描述

设X是Hilbert空间, $A: D(A) \subset X \to X$是稠定算子且满足$\rho(A) \neq \varnothing$. 通过算子A可以定义两个Hilbert空间: $(D(A), \|\cdot\|_1)$和$([D(A^*)]', \|\cdot\|_{-1})$, 其中$[D(A^*)]'$是以$X$为枢纽空间的$D(A)$的对偶空间, 范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_{-1}$分别定义为

$$\begin{cases} \|x\|_1 = \|(\beta - A)x\|_X, & \forall x \in D(A), \\ \|x\|_{-1} = \|(\beta - A)^{-1}x\|_X, & \forall x \in X, \end{cases} \quad \beta \in \rho(A).$$

由于范数的等价性, Hilbert 空间$(D(A), \|\cdot\|_1)$和$([D(A^*)]', \|\cdot\|_{-1})$不依赖于$\beta \in \rho(A)$的选取. 方便起见, 在接下来的讨论中, 这两个空间分别简记为$D(A)$和$[D(A^*)]'$. 定义算子$\tilde{A}$如下: 对$\forall x \in X, y \in D(A^*)$,

$$\langle \tilde{A}x, y \rangle_{[D(A^*)]', D(A^*)} = \langle x, A^* y \rangle_X, \tag{10}$$

其中$A^* \in \mathcal{L}(D(A^*), X)$是$A$的共轭. 由于对任意的$x \in D(A)$, $\tilde{A}x = Ax$, 因此$\tilde{A} \in \mathcal{L}(X, [D(A^*)]')$是算子$A$的延拓. 注意到算子$A$稠定, 延拓$\tilde{A}$是唯一的.

设$C \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{R})$. 定义$C$关于算子$A$的$\Lambda$-延拓为

$$\begin{cases} C_\Lambda x = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} C\lambda(\lambda - A)^{-1}x, \ x \in D(C_\Lambda), \\ D(C_\Lambda) = \{x \in X \mid 以上极限存在\}. \end{cases} \tag{11}$$

设$A: D(A) \subset X \to X$是Hilbert空间X上的稠定算子, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, [D(A^*)]')$, 考虑如下抽象系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[d + u(t)], \tag{12}$$

其中: u是控制, $d \in \mathbb{R}$是常数干扰. 本文的目标是设计控制u镇定系统(12). 受PID控制(2)的启发, 假设控制器u是满足如下形式的动态反馈:

$$u(t) = Fx(t) + \int_0^t Px(s)\mathrm{d}s, \tag{13}$$

其中$P: X \to \mathbb{R}$和$F: X \to \mathbb{R}$是待定函数. 显然, 控制器(13)中的$Fx(t)$对应PID控制(2)中的“PD”作用, 而$\int_0^t Px(s)\mathrm{d}s$对应的是积分作用. 在反馈(13)下, 得到系统(12)的闭环系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[d + Fx(t) + \int_0^t Px(s)\mathrm{d}s]. \tag{14}$$

本文将选择函数F和P使得闭环系统(14)的解满足$\|x(t)\|_X \to 0$, 当$t \to +\infty$. 控制器(14)是PID控制在一般抽象正则系统的推广, 而PID控制在实际应用中有广泛的应用. 因此本文对实际应用有一定的指导意义.

方便起见，本文给出如下假设:

假设 1 设X是Hilbert空间, $A: D(A) \subset X \to X$是空间X上的稠定算子, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, [D(A^*)]')$, $C \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{R})$. 假设系统$(A, B, C)$是正则线性系统, 即: 系统$(A, B, C)$满足如下条件[7]:

i) A在X上生成C_0–半群e^{At};

ii) $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, [D(A^*)]')$和$C \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{R})$关于$\mathrm{e}^{At}$允许;

iii) 存在$s \in \rho(A)$使得$(s - \tilde{A})^{-1}B\mathbb{R} \subset D(C_\Lambda)$;

iv) 系统的传递函数$H(s) = C_\Lambda(s - \tilde{A})^{-1}B$在某个右半复平面有界.

3 主要结果

定理 1 在假设1之下, 设系统(A, B)是能稳的, 且满足

$$C_\Lambda A^{-1}B \neq 0, \tag{15}$$

则对任意的$d \in \mathbb{R}$和$x(0) \in X$, 存在常数$\omega > 0$使得系统(14)存在唯一解满足

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\omega t}\|x(t)\|_X = 0, \tag{16}$$

其中算子P和F可按如下步骤选取:

1) 选择$K \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{R})$指数镇定系统$(A, B)$;

2) 令

$$P = \frac{-LC_\Lambda}{C_\Lambda(A+BK)^{-1}B},\ L<0; \tag{17}$$

3) 令

$$F = K + \frac{LC_\Lambda(A+BK)^{-1}}{C_\Lambda(A+BK)^{-1}B}. \tag{18}$$

证 由于系统(A,B)能稳, 存在算子K, 使$A+BK$生成X上指数稳定的C_0–半群$\mathrm{e}^{(A+BK)t}$. 注意到$0\in\rho(A+BK)$, 因此$(A+BK)^{-1}$有意义.

记系统(A,B,C)和$(A+BK,B,C)$的传递函数分别为$H(\lambda)$和$H^K(\lambda)$. 由于系统(A,B,C)是正则线性系统, 简单计算可知

$$H(\lambda) = C_\Lambda(\lambda - A)^{-1}B \tag{19}$$

且

$$H^K(\lambda) = C_\Lambda[\lambda-(A+BK)]^{-1}B. \tag{20}$$

此外,

$$H^K(\lambda) = [I-H(\lambda)]^{-1}H(\lambda). \tag{21}$$

这说明$H(\lambda)$ 和$H^K(\lambda)$ 有相同的零点. 由定理假设(15)得

$$C_\Lambda(A+BK)^{-1}B\neq 0. \tag{22}$$

所以, 令式(17)–(18)中P和F的定义有意义.

令

$$z(t) = \int_0^t Px(s)\mathrm{d}s + d, \tag{23}$$

则闭环系统(14)变为

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = (A+BF)x(t)+Bz(t),\\ \dot{z}(t) = Px(t).\end{cases} \tag{24}$$

系统(24)可以写成抽象形式

$$\dot{X}(t) = \mathcal{A}X(t),\quad X(t) = (x(t)\ \ z(t))^{\mathrm{T}}, \tag{25}$$

其中:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A+BF & B\\ P & 0\end{pmatrix},$$

$$D(\mathcal{A}) = \{\begin{pmatrix} f\\ v\end{pmatrix}\in X\times\mathbb{R}|(A+BF)f+Bv\in X,\ Pf\in\mathbb{R}\}.$$

令

$$\mathcal{A}_S = \begin{pmatrix} A+BK & B\\ 0 & L\end{pmatrix},$$

$$D(\mathcal{A}_S) = \{\begin{pmatrix} f\\ v\end{pmatrix}\in X\times\mathbb{R}|(A+BK)f+Bv\in X\},$$

则直接计算可得

$$\mathcal{S}D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_S)\ \text{且}\ \mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{A}_S, \tag{26}$$

其中

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} I_X & 0\\ S & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{L}(X\times\mathbb{R}), \tag{27}$$

且

$$S = \frac{LC_\Lambda(A+BK)^{-1}}{C_\Lambda(A+BK)^{-1}B} = F-K. \tag{28}$$

由于C_0–半群$\mathrm{e}^{(A+BK)t}$指数稳定且$L<0$, 算子$\mathcal{A}_S$的分块三角结构意味着$\mathcal{A}_S$生成$X\times\mathbb{R}$上指数稳定的C_0–半群$\mathrm{e}^{\mathcal{A}_S t}$. 注意算子相似性(26), 算子$\mathcal{A}$也生成$X\times\mathbb{R}$上指数稳定的$C_0$–半群$\mathrm{e}^{\mathcal{A}t}$. 所以式(16)成立.

证毕.

4 不稳定热方程的应用

为了验证定理1中的抽象结果, 本节考虑如下不稳定热方程:

$$\begin{cases} w_t(x,t) = w_{xx}(x,t),\quad x\in(0,1),\\ w_x(0,t) = -qw(0,t),\ \ q>0,\\ w_x(1,t) = d+u(t),\end{cases} \tag{29}$$

其中: u是控制, d是常数干扰. 将设计形如式(13)的控制器u来镇定系统(29). 该系统的状态空间选为$X = L^2(0,1)$. 定义

$$\begin{cases} Af = f'',\ \forall f\in D(A),\\ D(A) = \{f\in H^2(0,1)|f'(0) = -qf(0),\\ \qquad f'(1) = 0\}\end{cases} \tag{30}$$

和

$$B = \delta(\cdot-1)\in\mathcal{L}(\mathbb{R},[D(A^*)]'), \tag{31}$$

其中$\delta(\cdot)$是Dirac分布. 利用算子A和B, 系统(29)可以在$[D(A^*)]'$中写成抽象形式(12).

定义$C\in\mathcal{L}(D(A),\mathbb{R})$ 为

$$Cf = f(0),\quad \forall f\in D(A). \tag{32}$$

由Backstepping方法[8], 如下算子$K: X\to\mathbb{R}$可以指数镇定系统(A,B): 对任意的$f\in D(A)$,

$$Kf = -(q+c_1)[q\int_0^1\mathrm{e}^{q(1-s)}f(s)\mathrm{d}s + f(1)], \tag{33}$$

其中$c_1>0$是调节参数. 简单计算可得

$$C(A+BK)^{-1}B = -\frac{1}{c_1}, \tag{34}$$

且

$$\begin{cases} \hat{f} = (A+BF)^{-1}f,\quad \forall f\in X,\\ \hat{f}(x) = \dfrac{1-qx}{q}\displaystyle\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s - \\ \qquad \dfrac{(q+c_1)(1-qx)}{qc_1}\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{q(1-s)}f(s)\mathrm{d}s + \\ \qquad \displaystyle\int_0^x\int_0^\alpha f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\alpha.\end{cases} \tag{35}$$

注意到式(17)–(18)以及式(30)–(34), 控制器(13)中的算子P和F可选为: 对任意的$f \in D(A)$,

$$\begin{cases} Pf = -c_1 L f(0), \\ Ff = (q+c_1)(\frac{L}{q} - q)\int_0^1 \mathrm{e}^{q(1-s)} f(s)\mathrm{d}s - \\ \qquad (q+c_1)f(1) - \frac{c_1 L}{q}\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{36}$$

其中$L<0$是调节参数. 于是动态反馈(13)变为

$$\begin{aligned} u(t) = &(q+c_1)(\frac{L}{q} - q)\int_0^1 \mathrm{e}^{q(1-s)} w(s,t)\mathrm{d}s - \\ &(q+c_1)w(1,t) - \frac{c_1 L}{q}\int_0^1 w(s,t)\mathrm{d}s + \\ &c_1 L\int_0^t w(0,s)\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{37}$$

其中$c_1>0$和$L<0$是调节参数. 由定理1, 闭环系统(29)–(37)存在唯一解且满足

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\omega t}\|w(\cdot,t)\|_X = 0,$$

其中$\omega>0$是常数.

5 数值仿真

本节将对闭环系统(29)–(37)做数值模拟, 用来更直观地验证抽象理论的正确性. 本文采用有限差分的离散方法, 时间离散步长和空间离散步长分别选为5×10^{-4}和0.05. 闭环系统初始状态和干扰选为

$$w(x,0) = 1-\cos(2\pi x),\quad d=1,\quad x\in[0,1]. \tag{38}$$

控制器调节参数和系统参数选为

$$q=2,\quad c_1=1,\quad L=-5. \tag{39}$$

系统状态的数值模拟见图1, 控制器和干扰的数值模拟见图2. 从图1和图2可以看出, 控制器有效地补偿了常数干扰, 并使得系统状态收敛到零, 因此本文的控制器是有效的.

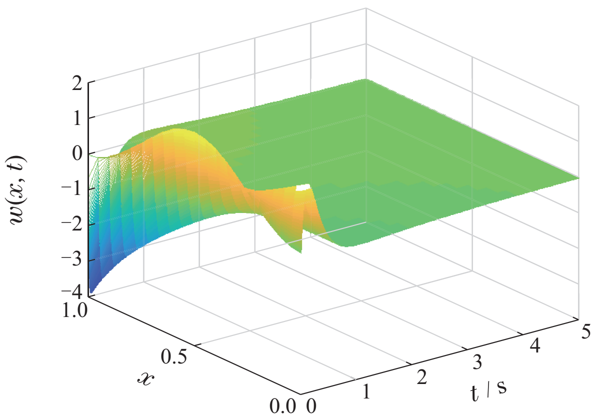

图 1 系统状态$w(x,t)$

Fig. 1 System state $w(x,t)$

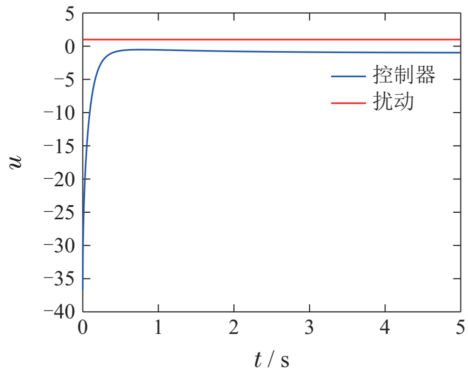

图 2 控制器$u(t)$

Fig. 2 Controller $u(t)$

6 结论

本文研究带有常数干扰的正则线性系统的镇定问题. 由于本文关注的是抽象系统, 因此研究结果具有广泛的一般性. 本文给出的动态反馈规则可以有效地补偿常数干扰并指数镇定系统. 抽象结果被成功地应用于带有常数干扰的不稳定热方程的镇定. 结果表明, 本文的抽方法是非常有效的.

参考文献:

[1] GUO W, GUO B Z. Parameter estimation and non-collocated adaptive stabilization for a wave equation subject to general boundary harmonic disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1631 – 1643.

[2] GUO W, JIN F F. Adaptive error feedback regulator design for 1D heat equation with unknown harmonic disturbance anti-collocated with control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(9): 824 – 830.

[3] FREIDOVICH L B, KHALIL H K. Performance recovery of feedback linearization based designs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(10): 2324 – 2334.

[4] FENG H, GUO B Z. Active disturbance rejection control: New and old results. *Annual Reviews in Control*, 2017, 44: 238 – 248.

[5] GUO B Z, ZHAO Z L. *Active Disturbance Rejection Control for Nonlinear Systems: An Introduction*. New York: John Wiley & Sons, Incoporated, 2016.

[6] HUANG J. *Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications*. Philadelphia: SIAM, 2004.

[7] WEISS G, CURTAIN R. Dynamic stabilization of regular linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(1): 4 – 21.

[8] FENG H, GUO B Z. New unknown input observer and output feedback stabilization for uncertain heat equation. *Automatica*, 2017, 86: 1 – 10.

作者简介:

支 霞 讲师, 目前研究方向为分布参数系统控制理论, E-mail: zhixia1996@qq.com;

冯红银萍 教授, 目前研究方向为分布参数系统控制理论和线性系统动态补偿理论, E-mail: fhyp@sxu.edu.cn.