

网络化热方程的集中事件触发控制

刘 浩¹, 宗西举^{2†}, 郑江涛¹, 徐秀妮³

(1. 济南大学 自动化与电气工程学院, 山东 济南 250022; 2. 济南大学 信息科学与工程学院, 山东 济南 250022;

3. 陇东学院 电气工程学院, 甘肃 庆阳 745000)

摘要: 本文对热方程建模的分布式参数化多智能体系统进行研究, 设计了基于事件触发控制下的一致性边界控制器, 将网络化热方程的状态驱动到相同的稳定状态. 其中每一个子系统的边界信息能被测量, 并且所有的智能体由无向静态拓扑连接. 事件触发控制器由以下两部分组成: 一是基于网络拓扑的边界局部交互作用, 驱动所有子系统达到相同的状态; 二是由事件触发条件建立的触发时刻. 本文证明了在事件触发的边界一致性控制下两个连续触发时刻之间存在最小停留时间以避免Zeno现象; 同时利用李雅普诺夫函数分析并保证了闭环系统的稳定性和适应性. 最后, 给出了由5个热方程组成的多智能体系统的仿真算例, 结果证实了本文所设计事件触发控制器的真实性.

关键词: 分布式参数多智能体系统; 事件触发控制; 网络化热方程; 边界一致性控制; 李雅普诺夫函数

引用格式: 刘浩, 宗西举, 郑江涛, 等. 网络化热方程的集中事件触发控制. 控制理论与应用, 2023, 40(8): 1401 – 1407

DOI: 10.7641/CTA.2023.20286

Centralized event-triggered control of networked heat equation

LIU Hao¹, ZONG Xi-ju^{2†}, ZHENG Jiang-tao¹, XU Xiu-ni³

(1. School of Electrical Engineering, University of Jinan, Jinan Shandong 250022, China;

2. School of Information Science and Engineering, University of Jinan, Jinan Shandong 250022, China;

3. School of Electrical Engineering, Long Dong University, Qingyang Gansu 745000, China)

Abstract: In this paper, a distributed parametric multi-agent system based on the heat equation modeling is studied, and a consistent boundary controller based on the event-triggered control is designed to drive the states of networked heat equation to the same stable state. The boundary information of each subsystem can be measured, and all agents are connected by an undirected static topology. The event-triggered controller consists of the following two parts: one is the boundary local interaction based on the network topology, which drives all subsystems to reach the same state; the second is the trigger moment established by the event trigger condition. In this paper, it is proved that there exists a minimum dwell time between two consecutive triggering moments to avoid the Zeno phenomenon under the event-triggered boundary consistency control. At the same time, the Lyapunov function is used to analyze and guarantee the stability and well-posedness of the closed-loop system. Finally, a simulation example of a multi-agent system consisting of five heat equations is given, and the results confirm the authenticity of the event-triggered controller designed in this paper.

Key words: distributed parametric multi-agent system; event-triggered control; networked heat equation; boundary consistency control; Lyapunov function

Citation: LIU Hao, ZONG Xiju, ZHENG Jiangtao, et al. Centralized event-triggered control of networked heat equation. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(8): 1401 – 1407

1 引言

多智能体系统的共识问题来源于对自然界集体行为的研究, 如蚁群, 鱼群等. 现如今, 多智能体系统应用在了很多方面, 与人们的生活息息相关. 尤其是在无线传感器网络^[1]、卫星编队飞行、微电网^[2-4]等方面的广泛应用, 多智能体问题受到人们的广泛关注.

状态一致性问题是多智能体系统协同控制中的典型问题之一, 实际上也是根本性问题. 多智能体的状态一致性是通过一个合适的控制协议或算法来保证所有智能体的状态达到一致. 文献[5-9]和其中的参考文献研究了常微分方程 (ordinary differential equation, ODE) 模型的多智能体系统的一致性的不同方面, 比

收稿日期: 2022-04-17; 录用日期: 2023-02-20.

[†]通信作者. E-mail: cse.zongxj@ujn.edu.cn; Tel.: +86 531-89736515.

本文责任编辑: 郭宝珠.

山东省高等学校青年创新科技计划项目(2019KJN029), 国家自然科学基金项目(12026215)资助.

Supported by the Shandong Province Higher Education Youth Innovation Science and Technology Program (2019KJN029) and the National Natural Science Foundation of China (12026215).

如一阶和二阶系统等^[10-11]. 偏微分方程模型的分布参数多智能体系统的研究没有得到与常微分方程模型相同的重视. 事实上, 许多物理模型的状态不仅与时间有关, 而且还受空间分布的影响, 如热扩散过程、波动方程、管道流体等^[12-14]. 近年来, 分布式参数多智能体系统受到了广泛的关注^[15-21]. 本文的研究动机来自于某些可以采用网络化热传导方程建模的工业炉, 通过控制来提高加热炉的整体性能, 在多个加热棒进行加热的工业炉中, 将加热棒视为一个加热网络, 基于网络拓扑共识协议, 达到炉内温度均匀分布的目的.

另一方面, 大多数多智能体系统的控制方案需要数字计算机来进行驱动, 而传统的控制策略往往假设执行器是线性和连续的, 这就要求控制器具有较强的实时计算性能和足够的通信带宽资源^[22]. 在实际控制工程中, 离散信号是非常常见的, 比较容易获取. 在计算资源和通信带宽有限的情况下, 利用采样数据设计控制器来实现多智能体系统的一致性是非常重要的. 对于有限维多智能系统来说, 连续时间控制器的离散化和采样已成为一种主动控制方法. 数字计算机控制的一系列工作, 如多智能体系统的时间触发控制和事件触发控制^[22-26]. 传统的事件触发控制在需要周期性采样和控制器更新的采样控制系统中得到了广泛的研究. 虽然便于实现, 但由于采样频率往往是针对最坏的情况开发的, 触发频率较高, 可能会导致不必要的计算资源和能量消耗. 为了解决上述问题, 本文提出了一种事件触发控制方案, 以降低控制器的负载. 事件触发控制方案的核心是只有在测量误差超过可容忍范围时才更新控制器值, 既能保持满意的控制性能, 又大大减少了计算量. 多智能体系统的事件触发共识协议分为两个方面, 一是驱动所有智能体实现一致性的控制协议; 二是决定控制动作何时更新的触发条件. 与传统的时间触发控制方案相比, 事件触发控制方案能够更有效地降低计算成本, 并具有更好的实时性.

事件触发控制方案逐渐出现在偏微分方程(partial differential equation, PDE)控制系统中, 它可以有效地利用计算机和通信资源, 而且它直接使用数字计算机平台作为控制实现模式, 避免了从连续时间控制器转换到数字控制平台. 采用数字驱动控制器的偏微分方程系统是目前研究的热点, 事件触发控制保持稳定性和收敛性^[27-32]. 对于一类常维反应扩散方程, 采用反步方法和边界事件触发控制^[27]等方法, 实现了系统的指数镇定. 分布式参数多智能体系统的一致性控制已被广泛研究^[16-20, 33]. 例如, Demetriou在文献[16-18]中建立了一类网络热方程的抽象框架, 利用自适应同步增益实现了网络热方程的同步控制. 文献[20]利用滑模控制和局部交互协议, 将一类具有不确定边界扰

动的网络热方程驱动到一个相同的稳态. 但是, 上述控制方案都是基于连续时间控制的, 对于无穷维分布参数多智能体系统的事件触发控制几乎没有涉及, 这极大地激发了本文的研究动机. 本文目的是通过事件触发控制来实现网络热方程的一致性, 其中所有智能体通过一个静态无向连接拓扑进行通信. 与连续时间控制相比, 事件触发控制值只在触发时间瞬间更新, 减少了计算量, 同时也是一种基于数字平台的分布式参数多智能体系统更为现实的控制方案. 本文提出了一种基于局部信息交互的事件触发共识边界控制方法, 该方法通过Lyapunov函数获得触发条件和参数调整规则.

2 模型描述

考虑到分布式参数多智能体系统含有 n 个相同的热传导过程, 每个智能体由热方程建模分析, 则有

$$\begin{cases} z_t^i(x, t) = \lambda z_{xx}^i(x, t), & x \in (0, 1), t > 0, \lambda \in \mathbb{N}^*, \\ z_x^i(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ z_x^i(1, t) = u^i(t), & t \geq 0, \\ y^i(t) = z^i(1, t), & t \geq 0, \\ z_0^i(x, 0) = z_0^i(x), & x \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1)$$

带有Neumann边界的热方程, 控制加在右边界, 为了将文章简化分析, 本文中 λ 取1单位化, 其中 $z_0^i(x)$ 为每个子系统不相同的初始条件. 系统状态变量 $z^i(x, t)$ 的状态空间为 $\mathcal{H} := L^2(0, 1)$, 其中 $u^i(t)$, $y^i(t)$ 分别表示第 i 个智能体的控制输入和边界输出信息.

为了简单起见, 系统状态的集合形式如下:

$$\begin{cases} z(x, t) = [z^1(x, t) \ z^2(x, t) \ \cdots \ z^n(x, t)]^T, \\ u(t) = [u^1(t) \ u^2(t) \ \cdots \ u^n(t)]^T, \\ y(t) = [y^1(t) \ y^2(t) \ \cdots \ y^n(t)]^T, \end{cases}$$

那么系统(1)在空间 $\mathcal{H} := L^2(0, 1)$ 下的表示方程为

$$\begin{cases} \dot{z}^i(t) = \mathcal{A}z^i(t) + \mathcal{B}u^i(t), \\ y^i(t) = \mathcal{C}z^i(t), \\ z^i(0) = z_0^i, \end{cases} \quad (2)$$

其中算子定义为

$$\begin{cases} \mathcal{A}f(x) = f''(x), f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{f \in H^2(0, 1) | f'(0) = 0, f'(1) = 0\}, \\ \mathcal{B} = \delta(\cdot - 1), \mathcal{C} = \mathcal{B}^*. \end{cases}$$

假设 1 在系统(1)中, 智能体边界输出信息的耦合作用由静态无向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 来描述.

定义 1 对任意由系统(1)描述的热方程系统的状态 $z^i(x, t)$, 如果能够满足下列条件:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z^i(x, t) - z^j(x, t)\|_{\mathcal{H}} = 0,$$

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

称系统(1)中各个子系统的状态同步.

本文的目的是设计事件触发控制器来控制系统(1), 使得系统(1)描述的任意两个子系统能够在范数(3)的意义下实现渐近同步.

引理 1^[34] 若存在一个具有 N 节点的无向图 $\mathcal{G}$, 那么其对应的Laplace矩阵 $\mathcal{L}$ 是一个实对称矩阵且有 N 个实特征根, 将所有特征根按升序排列则可得

$$0 = \lambda_1(\mathcal{L}) < \lambda_2(\mathcal{L}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathcal{L}),$$

最小非零特征根 $\lambda_2(\mathcal{L})$ 反映了无向图 $\mathcal{G}$ 的代数连通性, $\lambda_N(\mathcal{L})$ 是矩阵的最大特征根.

引理 2 (文献[28]引理1) 对任意标量函数 $\chi(\xi) \in \mathcal{H}_1 = H^1(0, 1)$, 其中 $H^1(0, 1)$ 是Sobolev空间, 有下面不等式成立:

$$\|\chi(\cdot)\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq 2(\|\chi(i)\|_2^2 + \|\chi_\xi(\cdot)\|_{\mathcal{H}_1}^2), \quad i = 0, 1.$$

引理 3 (文献[35]引理2.2) 设 $z^i(x, t) \in \mathcal{H}$ 是系统(1)的解, 对任意 $T > 0$, 有 $z^i(1, t) \in L^2(0, T)$. 此外, 存在 $M^*, \omega^* > 0$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 使得以下条件成立:

$$\begin{aligned} |z^i(1, t)| &\leq |z^i(0, t)| + |z^i(1, t)| \leq \\ M^* e^{-\omega^* t} \|z^i(\cdot, 0)\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall t \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

连续时间控制器的设计通常是基于网络拓扑结构(Laplacian矩阵)进行边界输入状态耦合, 从而实现分布参数多智能体系统状态一致性, 结合文献[18]知, 常见的连续时间一致性状态控制器如下:

$$u^i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (y^i(t) - y^j(t)), \quad (4)$$

其中: $j \in \mathcal{N}_i$ 表示智能体 i 邻域内与其连接的其他智能体集合, $\mathcal{N}_i$ 表示邻点基数, $y^i(t)$ 则是第 j 个智能体的边界输出信息. 事实上, 基于无向通信拓扑的Laplace矩阵 $\mathcal{L}$, 一致性控制器(4)的矩阵等价形式如下:

$$u(t) = -\mathcal{L}y(t). \quad (5)$$

由文献[18]中定理1可得, 系统(1)在连续时间一致性控制器(4)或(5)的作用下, 所有子系统的状态将实现一致.

下面是对多智能体系统(1)集中式事件触发控制的设计.

3 集中式事件触发控制方案

事件触发控制由以下两个方面组成: 一是控制器的控制值; 二是控制器对控制值进行更新的触发时刻, 而触发时刻是由设定的事件触发条件决定.

首先, 本文依照连续时间一致性控制器的设计方法, 在满足触发条件的情况下, 对控制器(4)–(5)的控制值在某一时刻 t_k 进行采样, 其中事件触发时刻序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是一个 $t_0 = 0$ 的递增序列, 控制值在连续的两

个相邻触发时刻内 $\{t_{k+1} - t_k\}$ 保持不变. 由于在 t_k 时刻所有的智能体均需要触发采样并进行控制值的更新, 因此, 本文称这种事件触发控制方式为集中式事件触发控制.

3.1 集中式事件触发控制主要结果

按照连续时间一致性控制器(4), 本文设计的事件触发控制器如下:

$$u_d^i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (y^i(t_k) - y^j(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (6)$$

其中 t_k 是所有子系统的第 k 个采样瞬间, 是第 i 个子系统向其相邻节点请求测量信息, 并进行控制值更新的触发时刻瞬间.

式(6)写成矩阵形式

$$u_d(t) = -\mathcal{L}y(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

其中 $y(t_k)$ 为多智能体系统输出向量 $y(t)$ 在触发时刻 t_k 时的采样值. 在给出决定触发时刻 $\{t_k\}$ 的事件触发规则之前, 依据控制器(4)(6)定义如下驱动偏差:

$$\begin{aligned} d^i(t) &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (y^i(t) - y^j(t)) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (y^i(t_k) - y^j(t_k)), \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (8)$$

进一步, 可以得到

$$d(t) = [d^1(t) \ \dots \ d^n(t)]^T = \mathcal{L}(y(t) - y(t_k)). \quad (9)$$

$d^i(t)$ 可以看作是第 i 个子系统连续时间一致性边界控制(4)与事件触发边界控制器(6)之间的驱动偏差.

定义 2 (分布参数多智能体系统一致性边界控制事件触发规则) 设 $0 < \beta < \frac{\lambda_2(\mathcal{L})}{\lambda_N(\mathcal{L})}$ 为给定的参数, 定义以下触发时刻集合:

$$T(t_k) := \{t | t > t_k \wedge \|d(t)\|_2^2 > \beta \|\mathcal{L}y(t)\|_2^2\}, \quad (10)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, N$, $\wedge$ 符号表示合取(保证 $t > t_k$ 和 $\|d(t)\|_2^2 > \beta \|\mathcal{L}y(t)\|_2^2$ 两个条件同时成立的 t), $d(t)$ 由式(9)来定义, 触发事件和控制器更新值组成了智能体的一致性事件触发边界控制器, 定义2是满足系统稳定性的事件触发条件, 同时由该触发条件(定义2)得到了事件触发采样时刻 t_k . 依据第3.3节中本文证明了由定义2得到的事件触发条件不会产生Zeno现象(在事件触发控制中, Zeno现象意味着在有限时间内发生无限次触发, 对于设计的事件触发条件而言就是触发条件不断地满足, 控制器无法有效的调整触发), 所有触发时刻所构成的集合 $T(t_k)$ 是有限可数的. 对于某些 $k \geq 0$, 被以下规则决定: 如果 $T(t_k) = \emptyset$, 那么触发事件次数的集合为 $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$; 如果 $T(t_k) \neq \emptyset$, 那么下一个触发时刻是 $t_{k+1} := \inf_k T(t_k)$. 控制器更新值由事件触发一致性边界控制器(6)或(7)决定.

3.2 集中式事件触发控制系统稳定性分析

考虑事件触发规则(10)下的分布参数多智能体系统(1)及事件触发控制器(6), 得到以下闭环系统:

$$\begin{cases} z_t(x, t) = z_{xx}(x, t), & x \in (0, 1), t > 0, \\ z_x(0, t) = 0, & t \in [t_k, t_{k+1}), \\ z_x(1, t) = u_d(t), & t \geq 0, \\ y(t) = z(1, t), & y(t_k) = z(1, t_k), \\ & t \geq 0, \\ z_0(x, 0) = z_0(x), & k \in \mathbb{N}, x \in [0, 1], \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} u_d(t) = -\mathcal{L}y(t_k), \\ d(t) = [d^1(t) \cdots d^n(t)]^T = \mathcal{L}[y(t) - y(t_k)], \\ T(t_k) := \{t | t > t_k \wedge \|d(t)\|_2^2 > \beta \|\mathcal{L}y(t)\|_2^2\}. \end{cases}$$

考虑误差

$$e^i(x, t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (z^i(x, t) - z^j(x, t)), \quad (12)$$

基于Laplace矩阵, 进一步可以得到

$$e(x, t) = \mathcal{L}z(x, t). \quad (13)$$

定理 1 对任意 $t \in [t_k, t_{k+1}]$, 选择的参数 β 满足 $0 < \beta < \frac{\lambda_2(\mathcal{L})}{\lambda_N(\mathcal{L})}$ 时, 误差系统(13)在 L^2 范数意义下是指数稳定的. 当 $k \in \mathbb{N}$ 足够大时, 就得到

$$\|e(x, t)\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \quad t \in [0, t_{k+1}), \quad (14)$$

其中空间定义为 $H = [\mathcal{H}]^N$.

证 对任意 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 误差系统(13)满足下列偏微分方程, 触发时刻 t_k 由触发条件(10)生成

$$\begin{cases} e_t(x, t) = e_{xx}(x, t), \\ e_x(0, t) = 0, \\ e_x(1, t) = -\mathcal{L}e(1, t_k), \\ e_0(x) = \mathcal{L}z_0(x), \end{cases} \quad (15)$$

其中 $z_0(x) = [z_0^1(x) \ z_0^2(x) \ \cdots \ z_0^n(x)]^T$ 是由系统(1)初始值组成的集合.

对于系统(15), 定义如下Lyapunov能量函数:

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 e^T(x, t) e(x, t) dx. \quad (16)$$

对能量函数沿着系统(15)解的轨迹关于时间 t 求导, 得到

$$\frac{d}{dt} E(t) = e^T(1, t) e_x(1, t) - \int_0^1 e_x^T(x, t) e_x(x, t) dx. \quad (17)$$

注意到 $d(t) = \text{diag}\{\frac{1}{|\mathcal{N}_i|}\} \mathcal{L}(y(t) - y(t_k))$ 对于所有 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 均成立, 则有下列等式成立:

$$e_x(1, t) = -\mathcal{L}e(1, t_k) = -\mathcal{L}e(1, t) + \mathcal{L}d(t). \quad (18)$$

将式(18)代入式(17)中, 得到

$$\frac{d}{dt} E(t) = -e^T(1, t) \mathcal{L}e(1, t) + e^T(1, t) \mathcal{L}d(t) - \int_0^1 e_x^T(x, t) e_x(x, t) dx, \quad (19)$$

对 $e^T(1, t) \mathcal{L}d(t)$ 下列不等式结果成立:

$$e^T(1, t) \mathcal{L}d(t) \leq \frac{1}{2} e^T(1, t) \mathcal{L}e(1, t) + \frac{1}{2} d^T(t) \mathcal{L}d(t). \quad (20)$$

同时Laplacian矩阵 $\mathcal{L}$ 是对称半正定的, 那么下列结果成立:

$$d^T(t) \mathcal{L}d(t) \leq \lambda_n(\mathcal{L}) \|d(t)\|_2^2, \quad (21)$$

其中 $\lambda_n(\mathcal{L})$ 是矩阵 $\mathcal{L}$ 的最大特征值. 结合事件触发条件(10), 对任意的 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 下列事实成立:

$$\|d(t)\|_2^2 \leq \beta \|\mathcal{L}y(t)\|_2^2 = \beta \|e(1, t)\|_2^2. \quad (22)$$

结合式(19)–(22), 可以得到以下结果:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &\leq -\frac{1}{2} e^T(1, t) \mathcal{L}e(1, t) - \int_0^1 e_x^T(x, t) e_x(x, t) dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \lambda_n(\mathcal{L}) \beta \|e(1, t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (23)$$

对 $-e^T(1, t) \mathcal{L}e(1, t)$ 同样有

$$-e^T(1, t) \mathcal{L}e(1, t) \leq -\lambda_2(\mathcal{L}) \|e(1, t)\|_2^2,$$

其中 $\lambda_2(\mathcal{L})$ 是矩阵 $\mathcal{L}$ 的最小非零特征值. 因此, 式(23)进一步可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &\leq -\frac{1}{2} (\lambda_2(\mathcal{L}) - \beta \lambda_n(\mathcal{L})) \|e(1, t)\|_2^2 - \\ &\quad \int_0^1 e_x^T(x, t) e_x(x, t) dx, \end{aligned} \quad (24)$$

结合定理1, 式(24)等价于

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &\leq \\ &\quad -\sigma (\|e(1, t)\|_2^2 + \int_0^1 e_x^T(x, t) e_x(x, t) dx) \leq -\frac{\sigma}{2} E(t), \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $\sigma = \min\{\frac{1}{2}(\lambda_2(\mathcal{L}) - \beta \lambda_n(\mathcal{L})), 1\}$.

因此, 需设计参数 β 满足如下条件:

$$0 < \beta < \frac{\lambda_2(\mathcal{L})}{\lambda_n(\mathcal{L})},$$

使得 $\sigma > 0$.

另一方面, 通过对不等式(25)在 $t \in [0, t_{k+1})$ 内逐步积分, 得到以下结果:

$$\begin{aligned} E(t_{k+1}) &\leq \exp(-\frac{\sigma}{2}(t_{k+1} - t_k)) E(t_k), \\ E(t_k) &\leq \exp(-\frac{\sigma}{2}(t_k - t_{k-1})) E(t_{k-1}), \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$E(t_1) \leq \exp(-\frac{\sigma}{2}(t_1 - t_0))E(t_0),$$

从而进一步得到

$$E(t) \leq \exp(-\frac{\sigma}{2}k\tau)E(0), t \in [0, t_{k+1}), \quad (26)$$

其中 $\tau = \min\{t_{k+1} - t_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. 如果对任意两个触发时刻之间存在最小驻留时间 τ 严格大于零(将在第3.3节定理2中给出), 则可以避免Zeno现象, 定理1证明结束. 证毕.

3.3 集中式事件触发控制避免Zeno现象

在事件触发控制中, Zeno现象意味着在有限时间内发生无限次触发, 对于设计的事件触发条件而言就是触发条件不断地满足, 控制器无法有效的调整触发. Zeno行为首先有物理上的不可实现性, 实际上无法满足, 那么会导致系统的收敛性无法保证, 其次有违事件触发控制减少触发次数的初衷. 值得一提的是, 保证在两个触发时刻之间存在严格大于0的最小停留时间可以避免所谓的Zeno现象.

定理2 闭环系统(11)在集中式事件触发条件(10)作用下, 选取 $0 < \beta < \frac{\lambda_2(\mathcal{L})}{\lambda_N(\mathcal{L})}$, 在任意两个触发时刻之间存在一个严格大于0的最小驻留时间, 即存在一个常数 $\tau > 0$, 使得 $\min\{t_{k+1} - t_k\} \geq \tau$, 对于所有 $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ 均成立, 从而不会产生Zeno行为.

证 依据 $\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2$ 取值情况, 证明过程被分为以下两种情况.

情况1 $\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2 = 0$.

当 $\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2 = 0$ 时, 表明分布参数多智能体系统的右边界状态已经达成一致, 那么 $d(t) = \mathcal{L}z(1, t) - \mathcal{L}z(1, t_k) = 0$, 同时 $\|d(t)\|_2 = 0$, 则不满足触发条件(10), 定理2显然成立.

情况2 $\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2 \neq 0$.

当 $\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2 \neq 0$ 时, 类似于文献[13, 30]中相关定理的证明过程, 定义如下函数:

$$q(t) = \frac{\|d(t)\|_2}{\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2}, \quad (27)$$

由于 $d(t) = \mathcal{L}(y(t) - y(t_k)) = \mathcal{L}(z(1, t) - z(1, t_k))$, 结合

$$\frac{d}{dt}\|d(t)\|_2 = \frac{d^T(t)[\mathcal{L}z_t(1, t)]}{\|d(t)\|_2},$$

$$\frac{d}{dt}\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2 = \frac{[\mathcal{L}z(1, t)]^T[\mathcal{L}z_t(1, t)]}{\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2},$$

对式(27)关于时间 t 求导, 由求导法则及Hölder不等式, 可得到

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\|d(t)\|_2}{\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2} \leq$$

$$\frac{\|\mathcal{L}z_t(1, t)\|_2}{\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2} + \frac{\|d(t)\|_2 \|\mathcal{L}z_t(1, t)\|_2}{\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2^2} =$$

$$(1 + \frac{\|d(t)\|_2}{\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2}) \frac{\|\mathcal{L}z_t(1, t)\|_2}{\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2}. \quad (28)$$

由引理2知, $z^i(1, t)$ 是适定的, 且对任意的时间 t 均是有界的, 那么 $z_t^i(1, t)$ 同样也是有界的. 同时结合系统(1)及事件触发控制器(6)利用牛顿莱布尼茨公式, 可以得到

$$\|z_t(1, t)\|_2^2 = \sum_i |z_t^i(1, t)|^2 \leq$$

$$\sum_i (\int_0^1 |z_t^i(x, t)| dx)^2 = \|\mathcal{L}z(1, t_k)\|_2^2,$$

又因为Laplacian矩阵 $\mathcal{L}$ 是对称半正定的, 因此有

$$\|\mathcal{L}z_t(1, t)\|_2 \leq \lambda_N(\mathcal{L})\|z_t(1, t)\|_2 \leq$$

$$\lambda_N(\mathcal{L})\|\mathcal{L}z(1, t_k)\|_2.$$

由海涅定理及保号性原理可知, 存在一个有限的正常数 $\mu > 0$, 使得

$$\frac{\|\mathcal{L}z(1, t_k)\|_2}{\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2} < \mu,$$

那么 $\frac{\|\mathcal{L}z_t(1, t_k)\|_2}{\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2} \leq \frac{\lambda_N(\mathcal{L})\|\mathcal{L}z(1, t_k)\|_2}{\|\mathcal{L}z(1, t)\|_2} < \lambda_N(\mathcal{L})\mu$, 因此, 式(28)可以重新写为

$$\dot{q}(t) \leq (1 + q(t))c, \quad (29)$$

其中 $c = \lambda_N(\mathcal{L})\mu$. 因此, $q(t)$ 满足微分方程 $q(t) \leq \phi(t, \phi_0)$, 其中 $\phi(t, \phi_0)$ 是下列方程的解:

$$\dot{\phi} = (1 + \phi)c, \quad \phi(0, \phi_0) = \phi_0,$$

上述微分方程的解为 $\phi(\tau, 0) = \exp(c\tau) - 1$. 同时, 结合事件触发规则(10), 任意两个触发时刻间最小驻留时间 τ 满足以下条件:

$$\phi(\tau, 0) \geq \sqrt{\beta},$$

因此, $\tau \geq \frac{1}{c} \ln(1 + \sqrt{\beta}) > 0$. 定理2证明结束. 由于 $\tau > 0$, 本文设计的事件触发边界一致性控制避免了Zeno现象. 证毕.

4 数值仿真

根据前文结论, 设计事件触发控制器, 利用数值仿真方法对5个网络化热方程系统进行数值仿真. 仿真结果表明, 5个网络化热方程在事件触发边界一致性控制(6)下实现一致.

图1描述了由无向图控制的5个智能体之间的信息交换. 对网络化热方程(11), 考虑以下5种不同的初始条件:

$$z_0^1(x) = 2.8 \sin(2x + 0.2),$$

$$z_0^2(x) = 1.2 \cos(1.5x^2),$$

$$z_0^3(x) = -1.3x^2 + \sin(1.3x + 1.3),$$

$$z_0^4(x) = 1.4 \cos(1.5x + 0.5),$$

$$z_0^5(x) = -1.5 \sin(2.5x^2), x \in [0, 1].$$

利用MATLAB进行数值模拟,采用有限差分法在均匀网格上模拟系统的状态,空间变量步长 $dx = 0.05$,时间变量步长 $dt = 5 \times 10^{-4}$,时间间隔为 $[0, 6]$ s.

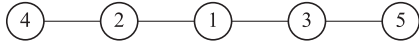


图1 多智能体系统的通信拓扑图

Fig. 1 Communication topology of a multi-agent system

在边界事件触发控制(10)下,5个网络热方程(11)被驱动到一个共同的稳定状态,其中参数 β 满足 $\beta < \frac{\lambda_2(\mathcal{L})}{\lambda_n(\mathcal{L})} = 0.1056$.因此在仿真时,选取 $\beta = 0.05$.

由图2可知,在 $[0, 6]$ s内,所有触发时间瞬间均满足触发条件(10),在时间间隔 $[0, 6]$ s内,触发了31次.在事件触边界一致性控制下,当 $\beta = 0.05$ 时, $u_d^i(t)$ 的图像如图3所示.此外,当所有子系统同步时,所有控制器趋于零.图4表明在事件触发控制器作用下,5个网络化热方程的右边界达到稳定,并趋于稳定一致的状态.

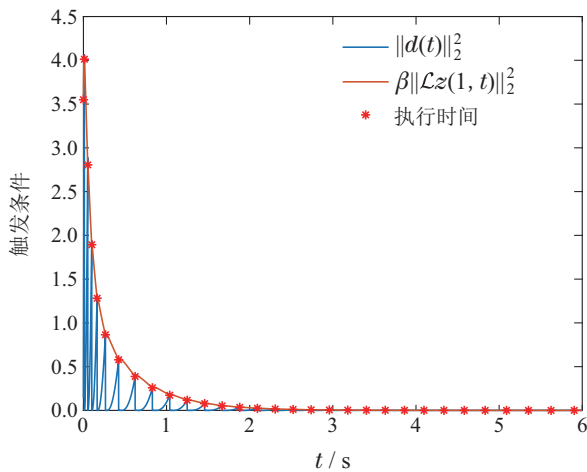


图2 触发条件的变化规律($\beta = 0.05$ 时产生的采样信号)

Fig. 2 Change law of trigger conditions (sampled signal generated when $\beta = 0.05$)

5 结论

本文基于李雅普诺夫函数设计了一种集中式事件触发的一致性边界控制器,利用采样测量信息将一类网络热方程驱动到稳定状态.证明了在这种集中式事件触发共识边界的控制下,两个连续触发时间之间存在一个最小停留时间,以避免发生Zone现象,极大地提高了计算机的计算效率,减小了通讯网络负载,然而多智能体过多,带宽多会造成计算机通道拥挤,因此下一步我们将研究分散式事件触发控制的多智能体的一致性控制问题和动态有向图的切换问题.最后,给出了由5个热方程组成的多智能体系统的仿真结果,验证了集中式事件触发控制器的有效性.

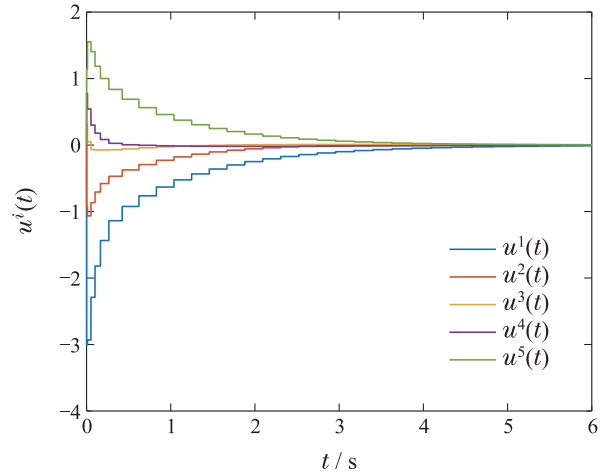


图3 事件触发边界一致性控制的轨迹, $u_d^i(t)$, $\beta = 0.05$

Fig. 3 Event-triggered boundary consistency control trajectory, $u_d^i(t)$, $\beta = 0.05$

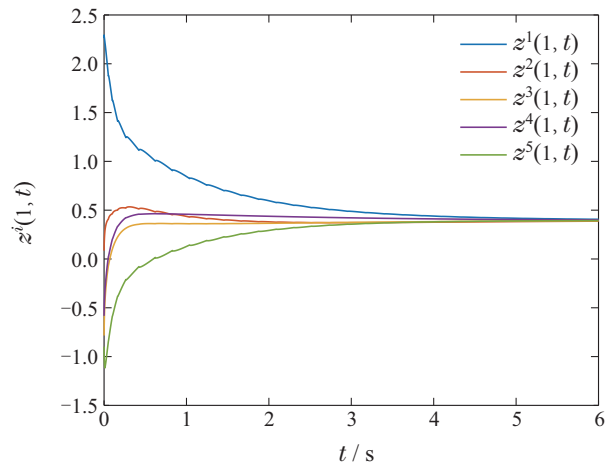


图4 事件触发控制下边界 $x = 1$ 的轨迹($\beta = 0.05$)

Fig. 4 Trajectory of boundary $x = 1$ under event-triggered control ($\beta = 0.05$)

参考文献:

- [1] DING D R, WANG Z D, HO D WC, et al. Observer-based event-triggering consensus control for multiagent systems with lossy sensors and cyber-attacks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(8): 1936 – 1947.
- [2] ANDERSON B D, YU C B, DASGUPTA S, et al. Control of a three-coleader formation in the plane. *Systems & Control Letters*, 2007, 56(9): 573 – 578.
- [3] MARSHALL J A, BROUCKE M E, FRANCIS B A. Pursuit formations of unicycles. *Automatica*, 2006, 42(1): 3 – 12.
- [4] ZHANG Shanlu, LI Lei, CHEN Pengwei, et al. Application of multi-agent system in microgrid. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2021, 45(2): 127 – 141.
(张善路, 李磊, 陈鹏威, 等. 多智能体系统在微电网中的应用. 南京理工大学学报, 2021, 45(2): 127 – 141.)
- [5] CHU H J, YUE D, DOU C X, et al. Consensus of multiagent systems with time-varying input delay and relative state saturation constraints. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(11): 6938 – 6944.
- [6] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215 – 233.

- [7] REN W, BEARD R W, ATKINS E M. Information consensus in multi-vehicle cooperative control. *IEEE Control Systems Magazine*, 2007, 27(2): 71 – 82.
- [8] WANG L, XI J X, HE M, et al. Robust time-varying formation design for multiagent systems with disturbances: Extended-state-observer method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(7): 2796 – 2808.
- [9] XI J X, WANG C, YANG X J, et al. Limited-budget output consensus for descriptor multiagent systems with energy constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(11): 4585 – 4598.
- [10] HAN J, ZHANG H G, JIANG H. Event-based consensus control for second-order leader-following multi-agent systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, 353(18): 5081 – 5098.
- [11] MENG X Y, MENG Z Y, CHEN T W, et al. Pulse width modulation for multi-agent systems. *Automatica*, 2016, 70: 173 – 178.
- [12] CHRISTOFIDES P D. *Nonlinear and Robust Control of PDE Systems: Methods and Applications to Transport-Reaction Processes*. Boston, MA, USA: Birkhauser, 2001.
- [13] QI C K, ZHANG H T, LI H X. A multi-channel spatio-temporal Hammerstein modeling approach for nonlinear distributed parameter processes. *Journal of Process Control*, 2009, 19(1): 85 – 99.
- [14] TANG Chao, WEN Xiaotao, WANG Wenhua. Numerical simulation of wave equation based on minimum norm optimization for finite difference coefficients of staggered grids. *Oil Geophysical Prospecting*, 2021, 56(5): 1039 – 1047.
(唐超, 文晓涛, 王文化. 基于最小范数优化交错网格有限差分系数的波动方程数值模拟. 石油地球物理勘探, 2021, 56(5): 1039 – 1047.)
- [15] AGUILAR L, ORLOV Y, PISANO A. Leader-follower synchronization and iss analysis for a network of boundary-controlled wave pdes. *IEEE Control Systems Letters*, 2021, 5(2): 683 – 688.
- [16] DEMETRIOU M A. Design of consensus and adaptive consensus filters for distributed parameter systems. *Automatica*, 2010, 46(2): 300 – 311.
- [17] DEMETRIOU M A. Enforcing consensus on adaptive parameter estimation of structurally perturbed infinite dimensional systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(12): 3147 – 3152.
- [18] DEMETRIOU M A. Design of adaptive output feedback synchronizing controllers for networked pdes with boundary and in-domain structured perturbations and disturbances. *Automatica*, 2018, 90: 220 – 229.
- [19] FU Q, YU P F, XU G Z, et al. Containment control for partial differential multi-agent systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, 529: 121549.
- [20] PILLONI A, PISANO A, ORLOV Y, et al. Consensus-based control for a network of diffusion pdes with boundary local interaction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(9): 2708 – 2713.
- [21] WANG W W. *Consistency analysis of leader-led multi-agent systems under random interference*. Zhengzhou: Zhengzhou University, 2013.
- [22] ZHAO M, PENG C, HE W L, et al. Event-triggered communication for leader-following consensus of second-order multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(6): 1888 – 1897.
- [23] LI Y F, LIU X D, LIU H K, et al. Distributed dynamic event-triggered consensus control for multi-agent systems under fixed and switching topologies. *Journal of the Franklin Institute*, 2021, 358(8): 4348 – 4372.
- [24] WANG Lu, WANG Yan. Architecture research of distributed flight control system based on time trigger. *Aircraft Design*, 2020, 40(3): 6 – 8.
(王璐, 王岩. 基于时间触发的分布式飞行控制系统架构研究. 飞机设计, 2020, 40(3): 6 – 8.)
- [25] LIU T F, ZHANG P P, JIANG Z P. Event-triggered input-to-state stabilization of nonlinear systems subject to disturbances and dynamic uncertainties. *Automatica*, 2019, 108: 108488.
- [26] HUANG Hongwei, HUANG Tianmin, WU Sheng, et al. Leader-following consistency of second-order multi-agent based on event triggering. *Control and Decision*, 2016, 31(5): 835 – 841.
(黄红伟, 黄天民, 吴胜, 等. 基于事件触发的二阶多智能体领导跟随一致性. 控制与决策, 2016, 31(5): 835 – 841.)
- [27] ESPITIA N, KARAFYLLIS I, KRSTIC M. Event-triggered boundary control of constant-parameter reaction-diffusion PDEs: A small-gain approach. *Automatica*, 2021, 128: 109562.
- [28] PILLONI A, PISANO A, ORLOV Y, et al. Consensus-based control for a network of diffusion PDEs with boundary local interaction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 61(9): 2708 – 2713.
- [29] FRIDMAN E, BLIGHOVSKY A. Robust sampled-data control of a class of semilinear parabolic systems. *Automatica*, 2012, 48(5): 826 – 836.
- [30] QI Ming, MA Cuiqin. Event-based bi-directional convergence for multi-agent systems with leaders. *Journal of Qufu Normal University (Natural Science Edition)*, 2020, 46(3): 47 – 54.
(綦铭, 马翠芹. 带领导者的多智能体系统的基于事件触发的双向趋同. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2020, 46(3): 47 – 54.)
- [31] HU C T. *Multi-agent system consistency based on event-triggered control*. Beijing: Beijing University of Technology, 2018.
- [32] WANG J W. Observer-based boundary control of semi-linear parabolic pdes with non-collocated distributed event-triggered observation. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(17): 10405 – 10420.
- [33] ZHOU Y L. *Design and implementation of consistency control for multi-agent systems based on event triggering mechanism*. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2015.
- [34] YANG S S. *Research on pulse control consistency of multi-agent system*. Chongqing: Chongqing University, 2016.
- [35] GUO B Z, ZHAO R. Output regulation for a heat equation with unknown exosystem. *Automatica*, 2022, 138: 110159.

作者简介:

刘 浩 硕士研究生, 目前研究方向为分布参数控制系统理论与应用, E-mail: 3138363122@qq.com;

宗西举 博士, 硕士生导师, 教授, 英国奥斯特大学兼职博士生导师, 目前研究方向为分布参数控制系统理论、复杂系统控制理论、控制理论在电力系统中的应用等, E-mail: cse_zongxi@ujn.edu.cn;

郑江涛 硕士研究生, 目前研究方向为分布参数控制系统理论与应用, E-mail: 520015906@qq.com;

徐秀妮 目前研究方向为分布参数控制系统理论与应用, E-mail: xxn0228@126.com.