

非线性系统无需初始条件预设性能有界 H_∞ 容错控制

李小华[†], 程鸿展, 刘 辉

(辽宁科技大学 电子与信息工程学院, 辽宁 鞍山 114051)

摘要: 针对一类具有外部扰动和传感器故障的非线性系统, 本文研究了其自适应预设性能有界 H_∞ 容错控制问题. 本文提出一种新的预设性能控制设计方法, 使得预设性能函数的选择与系统被约束变量的初始状态完全无关, 用一种全新的方式解决了传统预设性能方法的控制效果依赖被约束变量初始条件的问题. 基于该设计方法和有界 H_∞ 控制方法, 在未知系统初始条件的情况下获得了系统的自适应预设性能有界 H_∞ 控制器. 本文所设计的控制器能够保证系统中的所有信号都是有界稳定的, 系统的输出变量能够被预设性能函数约束, 并且对于外部干扰具有很好的抑制作用. 最后, 仿真结果验证了该控制器的可行性及有效性.

关键词: 非线性系统; 传感器故障; 预设性能控制; 无需初始条件; 有界 H_∞ 控制; 容错控制

引用格式: 李小华, 程鸿展, 刘辉. 非线性系统无需初始条件预设性能有界 H_∞ 容错控制. 控制理论与应用, 2024, 41(2): 273 – 282

DOI: 10.7641/CTA.2023.20296

Prescribed performance bounded- H_∞ fault-tolerant control regardless of initial condition for nonlinear systems

LI Xiao-hua[†], CHENG Hong-zhan, LIU Hui

(School of Electrons and Information Engineering, University of Science and Technology, Anshan Liaoning 114051, China)

Abstract: In this paper, the adaptive bounded- H_∞ fault-tolerant control problem with prescribed performance is studied for a class of nonlinear systems with external disturbances and sensor faults. A new design method of prescribed performance control is proposed, which makes the selection of the prescribed performance function be completely independent of the initial state of the constrained variable in the system. The problem that the control effect of traditional prescribed performance control method depends on the initial condition of the constrained variable is solved by a novel way. Based on this design method and the bounded- H_∞ control method, an adaptive prescribed performance bounded- H_∞ controller is obtained under the unknown initial condition of the system. The designed controller can ensure that all the signals in the system are bounded stable, the output variable of the system can be constrained by the prescribed performance function, and the system has a better inhibition ability to external disturbances. Finally, the simulation results verify the feasibility and effectiveness of the proposed controller.

Key words: nonlinear systems; sensor faults; prescribed performance control; regardless of initial condition; bounded- H_∞ control; fault-tolerant control

Citation: LI Xiaohua, CHENG Hongzhan, LIU Hui. Prescribed performance bounded- H_∞ fault-tolerant control regardless of initial condition for nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(2): 273 – 282

1 引言

为了保证实际工业系统的安全性和可靠性, 容错控制问题的研究就变得非常有必要. 目前, 容错控制研究主要分以下两类: 一类是主动容错控制, 是指在系统发生故障时, 通过调整控制器的参数或结构进而主动处理故障信息, 达到系统期望性能的目的^[1–3]; 另一类是被动容错控制, 其控制器结构与参数是固定的,

通过降低控制器对故障的敏感性保证闭环系统的稳定性, 且达到较好的期望性能, 在工程领域有着较为广泛的应用^[4–5]. 在被动容错控制中, 有一类文献采用故障失效因子的处理方法研究了传感器故障情况下的容错控制问题^[6–7], 给出了研究此类问题的思路.

随着实际工业过程对于系统控制性能要求的不断提高, 2008年文献[8]首次提出了预设性能控制的概

收稿日期: 2022–04–20; 录用日期: 2023–03–10.

[†]通信作者. E-mail: lixiaohua6412@163.com; Tel.: +86 13081206677.

本文责任编辑: 倪茂林.

国家自然科学基金项目(U21A20483), 吉林大学汽车仿真与控制国家重点实验室开放基金项目(20210219)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (U21A20483) and the Open Fund Project of State Key Laboratory of Automotive Simulation and Control, Jilin University (20210219).

念,这类控制方法通过误差转换以及在控制设计中引入预设性能函数,来同时提高系统的暂态和稳态性能.近几年,非线性系统的预设性能控制已逐渐成为了研究热点.在已有的预设性能控制研究中,主要采用误差的有界转换以及障碍 Lyapunov 函数方法进行设计^[9-12].但此类控制方法有一个共同的特点,需要在设计预设性能函数时预先知道被约束控制量的初始条件,只有在被约束量初始值小于预设性能函数的初始值时,才能够实现预设性能控制.对于一些初始条件不易获得的实际系统而言,预设性能控制方法的应用会受到一定限制.因此,如何进一步放宽对于系统初始条件的要求是十分有必要的.在非线性系统容错控制的研究中,有一类文献研究了预设性能容错控制,如文献[13-14].但是这些研究都是在被控制量初始条件已知的情况下,未发现具有未知初始条件的非线性系统在传感器故障情况下的预设性能控制研究.

在实际控制系统中,外部扰动是最常见的影响控制效果的因素.因此,1981年Zames^[15]引入了 H_∞ 控制的概念,通过设计 H_∞ 控制器来抑制外部干扰对系统的不利影响,进而提高控制系统的鲁棒性^[16-17].但在设计系统的 H_∞ 控制器时,一般需要系统达到渐近稳定,而许多非线性系统则很难达到渐近稳定,通常只能获得有界稳定的结果.为解决该问题,文献[18]提出了一种有界 H_∞ 控制方法,使得系统在有界稳定的情况下也可进行 H_∞ 控制器设计,从而保证了一般的非线性系统都能对外部干扰具有 H_∞ 性能.但目前尚未看到有关传感器故障情况下非线性系统的有界 H_∞ 容错控制的研究报道.

受上述研究结果的启发,本文针对一类具有传感器故障和外部扰动的严格反馈非线性系统研究其自适应预设性能有界 H_∞ 容错控制问题.本文的主要贡献为:1)提出了一种全新的预设性能控制设计方法,它能够保证预设性能函数的选择与系统的初始状态完全无关,解决了被约束变量的初始值未知时的预设性能控制器设计问题.2)首次研究了具有传感器故障的严格反馈系统在有界稳定情况下的预设性能 H_∞ 容错控制问题.

2 系统描述和基础知识

考虑一类具有未知外部扰动的严格反馈非线性系统,其系统方程描述为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + \psi_i(\bar{x}_i)\varpi_i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u + \psi_n(\bar{x}_n)\varpi_n, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T = x \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量,且 $\bar{x}_i(t) = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_i]^T \in \mathbb{R}^i, i = 1, 2, \cdots$,

$n; u \in \mathbb{R}$ 为系统的控制输入; $y \in \mathbb{R}$ 为输出信号; $f_i(\cdot): \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ 为完全未知光滑非线性函数, $g_i(\cdot): \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ 为已知不为零的光滑非线性函数, $\psi_i(\cdot): \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ 代表未知的光滑非线性函数; $\varpi_i \in L_2[0, t]$ 为系统受到的未知外部扰动.

定义 1^[5] 若传感器测量的变量 $\zeta(t) \in \mathbb{R}$ 在时间 $T > 0$ 时出现故障,则传感器的输出为

$$\zeta_0(t) = \rho(t)\zeta(t), \quad \forall t > T, \quad (2)$$

其中 $0 < \rho(t) \leq 1$ 为传感器的失效因子.

根据定义1,当系统(1)的第 $i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 个传感器发生故障时,传感器的反馈信号变为

$$X_i(t) = \rho_i(t)x_i(t), \quad 0 < \rho_i(t) \leq 1, \quad \forall t > T. \quad (3)$$

定义 2^[9] 若系统(1)满足下列条件:1)对于任意的初始状态 $\kappa(0)$,有一个连续可微的函数 $V(\kappa) > 0$ 满足 $\dot{V}(\kappa) < -a_0V(\kappa) + b_0$;2)不等式(4)成立,即

$$\int_0^t \|X_1(s)\|^2 ds < \bar{\gamma}^2 \int_0^t \|\varpi(s)\|^2 ds + qV(\kappa(0)), \quad (4)$$

则系统(1)具有有界 H_∞ 性能,其中: a_0, b_0 和 q 是正实数, $\varpi(t) \in L_2[0, t]$ 是非零外部扰动, $\bar{\gamma}$ 为给定的干扰抑制系数.

本文的控制目标为:设计一类具有传感器故障的非线性系统自适应预设性能有界 H_∞ 控制器,当系统发生传感器故障时,无需故障诊断环节,也无需改变控制器的结构和参数,使系统输出能够被预先设定的性能函数所约束,系统中的所有信号都是有界稳定的,并且对外界干扰具有 H_∞ 性能.

为了实现上述的控制目标,先对系统做如下假设.

假设 1 $g_i(\bar{x}_i) > 0$ 且存在 b_m 和 b_M 使得

$$0 < b_m \leq g_i(\bar{x}_i) \leq b_M < \infty, \quad (5)$$

其中 $1 \leq i \leq n, \forall \bar{x}_i \in \mathbb{R}^i$.

假设 2 失效因子 $\rho_i(t)$ 满足 $0 < \underline{\rho} \leq \rho_i(t) \leq 1$, $\underline{\rho}$ 是常数且 $\rho_i(t)$ 可导.

3 无关初始条件的预设性能控制设计新方法

在传统的预设性能控制方法中,一般是要求被约束的量 $e_1(t)$ 满足以下约束条件:

$$-\zeta(t) < e_1(t) < \zeta(t), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

其中 $\zeta(t) = (\zeta_0 - \zeta_\infty)e^{-lt} + \zeta_\infty$ 是预设性能函数,这里 $\zeta_0 > \zeta_\infty > 0$, $l > 0$ 是设计参数.在控制器设计中,要实现预设性能控制,需要满足 $-\zeta(0) < e_1(0) < \zeta(0)$ 的初始条件,即根据 $e_1(0)$ 来选择 $\zeta(t)$.然而,实际系统状态的初始值可能不易获得,使得这种方法的应用受到限制.因此,本文提出一种新的预设性能控制

设计方法, 可使预设性能函数的选择与系统的初始状态无关, 具体设计思想如下.

设预设性能的控制目标是当 $|e_1(0)| < \zeta_1(0)$ 条件不成立时, 被约束量 $e_1(t)$ 满足 $|e_1(t)| < \zeta_1(t)$. 考虑一个时间参数 $T_f > 0$, 在该时间内被约束量进入预设性能的设定范围, 这个 T_f 被称之为预设时间. 即在 $t \geq T_f$ 时开始对被约束量进行约束. 因此将预设性能函数 $\zeta_1(t)$ 定义为

$$\zeta_1(t) = (\zeta_0 - \zeta_\infty)e^{-l_1(t-T_f)} + \zeta_\infty, \quad (7)$$

其中: $\zeta_0 > \zeta_\infty > 0$, $l_1 > 0$, $T_f > 0$ 是设计参数. 为了使传统的预设性能方法能够利用, 且使预设性能函数不受被约束量初始条件的影响, 这里提出了一种非线性映射, 将 $e_1(t)$ 通过双曲正切函数映射到 $z_1(t)$, 即

$$z_1 = \tanh e_1, \quad (8)$$

这里对于任意 e_1 , z_1 都是有界的函数, 即 $|z_1| < 1$, 且 e_1 和 z_1 在原点附近近似线性关系. 由于 z_1 的有界性, 则很容易用传统的预设性能控制方法对 z_1 进行控制设计. 选择一个间接约束函数 $\zeta_2(t)$ 能将 $z_1(t)$ 约束到下面预定的性能范围:

$$-\zeta_2(t) < z_1(t) < \zeta_2(t), \quad t \geq 0, \quad (9)$$

其中:

$$\zeta_2(t) = Me^{-\tau t} \frac{(\alpha^*(t) - \alpha_{T_f})}{\alpha_0} + \tanh(\zeta_1(t)), \quad (10)$$

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} (\alpha_0 - \frac{t}{T_f})e^{(1-\frac{T_f}{t})} + \alpha_{T_f}, & 0 \leq t < T_f, \\ \alpha_{T_f}, & t \geq T_f, \end{cases} \quad (11)$$

其中: 常数 $M \geq 1$, $\tau \geq 0$, $\alpha_0 \geq 1$, $\alpha_{T_f} > 0$ 为设计参数.

注1 $\alpha^*(t)$ 是一个光滑函数, 文献[11]中已经证明. 因此易知 $\zeta_2(t)$ 也是一个光滑函数.

注2 为了用预设性能方法约束 $z_1(t)$, 则 $z_1(0)$ 必须满足 $-\zeta_2(0) < z_1(0) < \zeta_2(0)$ 的条件. 选择 $M \geq 1$, 则可知 $\zeta_2(0) \geq 1$, 而 $|z_1| < 1$ 对于任意的 e_1 都成立, 故上面条件即可满足. 所以该方法不需要知道被约束变量的初始值 $e_1(0)$, 即与被约束变量的初始条件无关.

注3 间接约束函数 $\zeta_2(t)$ 的选择依据是使当 $t \geq T_f$ 时, 用 $\zeta_2(t)$ 对 $z_1(t)$ 的约束等价于用 $\zeta_1(t)$ 对 $e_1(t)$ 的约束. 式(10)中的 $\zeta_2(t)$ 就是据此构造的.

因此, 给出如下定理.

定理1 若式(9)成立, 则当 $t \geq T_f$ 时, 有 $-\zeta_1(t) < e_1(t) < \zeta_1(t)$ 成立.

证 由式(8)–(9)可得

$$-\zeta_2(t) < \tanh(e_1(t)) < \zeta_2(t), \quad (12)$$

当 $t \geq T_f$ 时, 由式(10)–(11)可以得到

$$\zeta_2(t) = \tanh(\zeta_1(t)) > 0, \quad (13)$$

$$-\tanh(\zeta_1(t)) < \tanh(e_1(t)) < \tanh(\zeta_1(t)), \quad (14)$$

故可得

$$-\zeta_1(t) < e_1(t) < \zeta_1(t). \quad (15)$$

证毕.

4 与初始条件无关的预设性能有界H_∞控制器设计

本节将给出系统(1)的自适应预设性能有界H_∞控制器的设计过程. 根据定理1, 直接用 $\zeta_2(t)$ 对 $z_1(t)$ 进行约束设计. 首先进行如下坐标变换:

$$\kappa_1 = \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2}\right), \quad z_1 = \tanh X_1, \quad (16)$$

$$\kappa_i = X_i - \tau_{i-1}(\rho_i, \bar{x}_{i-1}, \hat{\theta}_{i-1}, \zeta_2^{(i-1)}), \quad i = 2, \dots, n, \quad (17)$$

其中: $X_i = \rho_i x_i$ 指的是系统传感器故障后传回的信号; $e_1(t) = X_1$ 为被约束量; τ_{i-1} 为虚拟控制信号; ζ_2 为间接约束函数; $\zeta_2^{(i-1)}$ 为间接约束函数的 $i-1$ 阶导数; $\hat{\theta}_i$ 表示未知常数 θ_i 的估计值, 且 $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$ 指的是 θ_i 的估计误差, 且 θ_i 被描述为 $\theta_i = \frac{\|W_i^T\|^2}{b}$, $1 \leq i \leq n$, 其中 W_i^T 为用于逼近未知非线性函数的径向基函数(radial basis function, RBF)神经网络的最优权向量, b 的定义如注4.

注4 由假设1和 $0 < \underline{\rho} \leq \rho_i(t) \leq 1$ 可知, 存在正常数 b 满足

$$b \leq \underline{\rho}_m \leq \rho_i g_i \leq \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} g_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (18)$$

根据Backstepping设计方法, 本文设计过程如下:

步骤1 根据上述坐标变换的定义, 可以得到

$$\dot{z}_1 = \frac{4}{(e^{X_1} + e^{-X_1})^2} \dot{X}_1 = E(\rho_1 f_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} g_1 X_2 + \rho_1 \psi_1 \varpi_1 + \frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} X_1). \quad (19)$$

为了后续书写方便, 引入

$$E = \frac{4}{(e^{X_1} + e^{-X_1})^2}. \quad (20)$$

考虑如下Lyapunov函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} \kappa_1^2 + \frac{b}{2\beta_1} \tilde{\theta}_1^2, \quad (21)$$

其中 β_1 是正的设计参数. 对其求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \frac{Q}{\zeta_2} \left(\dot{z}_1 - \frac{z_1 \dot{\zeta}_2}{\zeta_2} \right) - \frac{b}{\beta_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 = \\ & \frac{Q}{\zeta_2} (E \rho_1 f_1 + E \frac{\rho_1 g_1}{\rho_2} (\kappa_2 + \tau_1) + \\ & E \rho_1 \psi_1 \varpi_1 + E \frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} X_1 - \frac{z_1 \dot{\zeta}_2}{\zeta_2}) - \frac{b}{\beta_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 Q 为辅助函数, 表示为

$$Q = \frac{\frac{\pi}{2} \tan(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2})}{\cos^2(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2})}. \quad (23)$$

在这里, 根据Young's不等式, 能够得到

$$\frac{Q}{\zeta_2} E \frac{\rho_1}{\rho_2} g_1 \kappa_2 \leq \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\zeta_2^2} E^2 \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} + \frac{1}{2} g_1^2 \kappa_2^2, \quad (24)$$

$$\frac{Q}{\zeta_2} E \rho_1 \psi_1 \varpi_1 \leq \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} \frac{Q^2}{\zeta_2^2} E^2 \rho_1^2 \psi_1^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_1^2, \quad (25)$$

这里引入参数 $\bar{\gamma}$ 是为了获得 H_∞ 性能. 将式(24)–(25)代入式(22), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & \frac{Q}{\zeta_2} (E \rho_1 f_1 + E \frac{\rho_1}{\rho_2} g_1 \tau_1 + \frac{1}{2} \frac{Q}{\zeta_2} E^2 \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} + \\ & \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} \frac{Q}{\zeta_2} E^2 \rho_1^2 \psi_1^2 + E \frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} X_1 - \\ & \frac{z_1 \dot{\zeta}_2}{\zeta_2}) + \frac{1}{2} g_1^2 \kappa_2^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_1^2 - \frac{b}{\beta_1} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 \leq \\ & \frac{Q}{\zeta_2} (E \frac{\rho_1}{\rho_2} g_1 \tau_1 + F_1(Z_1)) + \frac{1}{2} g_1^2 \kappa_2^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_1^2 - \\ & \frac{b}{\beta_1} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 - 2 \tan^2(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2}) (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (26)$$

定义函数 $F_1(Z_1)$ 为

$$\begin{aligned} F_1(Z_1) = & E \rho_1 f_1 + \frac{1}{2} \frac{Q}{\zeta_2} E^2 \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} + \\ & \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} \frac{Q}{\zeta_2} E^2 \rho_1^2 \psi_1^2 + E \frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} X_1 - \frac{z_1 \dot{\zeta}_2}{\zeta_2} + \\ & \frac{8}{\pi^2} \zeta_2 Q \cos^4(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2}) (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (27)$$

注5 式(26)中的 $-2 \tan^2(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2}) (X_1^2 + 1)$ 是为了后续证明 X_1 的有界 H_∞ 性能而加入的, 并用式(27)中 $\frac{8}{\pi^2} \zeta_2 Q \times \cos^4(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2}) (X_1^2 + 1)$ 进行抵消.

由于 $F_1(Z_1)$ 中包含未知的非线性函数, 所以可以采用RBF神经网络对其进行逼近^[20], 即

$$F_1(Z_1) = W_1^{*T} S_1(Z_1) + \delta_1(Z_1), \quad (28)$$

其中 $Z_1 = [X_1 \ \hat{\theta}_1 \ \zeta_2 \ \dot{\zeta}_2]^T$, $\delta_1(Z_1)$ 为估计误差, 对任意的正常数 ε_1^* , 有 $|\delta_1(Z_1)| \leq \varepsilon_1^*$. 借助Young's不等式处理 $\frac{Q}{\zeta_2} F_1(Z_1)$, 可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{Q}{\zeta_2} (W_1^{*T} S_1(Z_1) + \delta_1(Z_1)) \leq \\ & |\frac{Q}{\zeta_2}| (||W_1^{*T}|| ||S_1(Z_1)|| + \varepsilon_1^*) \leq \\ & \frac{b\theta_1}{2\lambda_1^2} \frac{Q^2}{\zeta_2^2} S_1^T(Z_1) S_1(Z_1) + \frac{\lambda_1^2}{2} + \frac{b}{2\bar{\gamma}^2} \frac{Q^2}{\zeta_2^2} + \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \varepsilon_1^{*2}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$)为设计参数, 将式(29)代入

式(26)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & \frac{Q}{\zeta_2} (E \frac{\rho_1}{\rho_2} g_1 \tau_1 + \frac{b\theta_1}{2\lambda_1^2} \frac{Q}{\zeta_2} S_1^T(Z_1) S_1(Z_1) + \\ & \frac{b}{2\bar{\gamma}^2} \frac{Q}{\zeta_2}) + \frac{1}{2} g_1^2 \kappa_2^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_1^2 + \frac{\lambda_1^2}{2} + \frac{\bar{\gamma}^2 \varepsilon_1^{*2}}{2b} - \\ & \frac{b}{\beta_1} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 - 2 \tan^2(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2}) (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (30)$$

设计虚拟控制律 τ_1 为

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \frac{1}{E} (-c_1 \frac{4}{\pi^2} \zeta_2 Q \cos^4(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2}) - \\ & \frac{1}{2\lambda_1^2} \frac{Q}{\zeta_2} \hat{\theta}_1 S_1^T(Z_1) S_1(Z_1) - \frac{1}{2\bar{\gamma}^2} \frac{Q}{\zeta_2}), \end{aligned} \quad (31)$$

结合式(18)和式(31), 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\zeta_2} E \frac{\rho_1}{\rho_2} g_1 \tau_1 = & -c_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} g_1 \tan^2(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2}) - \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{g_1}{2\bar{\gamma}^2} \frac{Q^2}{\zeta_2^2} - \\ & \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{g_1}{2\lambda_1^2} \frac{Q^2}{\zeta_2^2} \hat{\theta}_1 S_1^T(Z_1) S_1(Z_1) \leq \\ & -c_1 b \tan^2(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2}) - \frac{b}{2\bar{\gamma}^2} \frac{Q^2}{\zeta_2^2} - \\ & \frac{b}{2\lambda_1^2} \frac{Q^2}{\zeta_2^2} \hat{\theta}_1 S_1^T(Z_1) S_1(Z_1), \end{aligned} \quad (32)$$

将式(32)代入式(26)中, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -c_1 b \tan^2(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2}) + \frac{1}{2} g_1^2 \kappa_2^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_1^2 + \\ & \frac{\lambda_1^2}{2} + \frac{\bar{\gamma}^2 \varepsilon_1^{*2}}{2b} - 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1) - \\ & \frac{b}{\beta_1} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \frac{\beta_1}{2\lambda_1^2} \frac{Q^2}{\zeta_2^2} S_1^T(Z_1) S_1(Z_1)). \end{aligned} \quad (33)$$

选取自适应律 $\dot{\theta}_1$ 为

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\beta_1}{2\lambda_1^2} \frac{Q^2}{\zeta_2^2} S_1^T(Z_1) S_1(Z_1) - \sigma_1 \hat{\theta}_1, \quad (34)$$

其中 σ_1 是正的设计参数. 将式(34)代入式(33)中, 能够得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -c_1 b \kappa_1^2 + \frac{1}{2} g_1^2 \kappa_2^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_1^2 + \frac{\sigma_1 b}{\beta_1} \hat{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + \\ & \frac{\lambda_1^2}{2} + \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \varepsilon_1^{*2} - 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (35)$$

步骤 i ($2 \leq i \leq n-1$) 借助式(17)定义的坐标

变换, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_i = & \dot{X}_i - \dot{\tau}_{i-1} = \\ & \rho_i f_i + \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} g_i X_{i+1} + \rho_i \psi_i \varpi_i + \\ & \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} (\kappa_i + \tau_{i-1}) - \dot{\tau}_{i-1}, \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$\dot{\tau}_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial x_k} (f_k + g_k x_{k+1} + \psi_k \varpi_k) +$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \rho_k} \dot{\rho}_k + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_k} \dot{\hat{\theta}}_k + \sum_{k=1}^i \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \zeta_2^{(k-1)}} \zeta_2^{(k)}. \quad (37)$$

选取Lyapunov函数为

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} \kappa_i^2 + \frac{b}{2\beta_i} \tilde{\theta}_i^2, \quad (38)$$

其中 β_i 是正的设计参数, 对其求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} + \kappa_i \dot{\kappa}_i - \frac{b}{\beta_i} \tilde{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i \leq \\ &= - \sum_{j=1}^{i-1} c_j b \kappa_j^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{j=1}^{i-1} \varpi_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j^2}{2} + \\ &= \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j^{*2} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_j b}{\beta_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \kappa_i (\rho_i f_i + \\ &= \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} g_i X_{i+1} + \rho_i \psi_i \varpi_i + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} (\kappa_i + \tau_{i-1}) - \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial x_k} (f_k + g_k x_{k+1}) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \rho_k} \dot{\rho}_k - \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_k} \dot{\hat{\theta}}_k - \sum_{k=1}^i \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \zeta_2^{(k-1)}} \zeta_2^{(k)} + \frac{1}{2} g_{i-1}^2 \kappa_i - \\ &= \frac{b}{\beta_i} \tilde{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i - \kappa_i \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial x_k} \psi_k \varpi_k - 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (39)$$

由Young's不等式可得

$$\frac{\rho_i \kappa_i}{\rho_{i+1}} g_i \kappa_{i+1} \leq \frac{1}{2} \frac{\rho_i^2}{\rho_{i+1}^2} \kappa_i^2 + \frac{1}{2} g_i^2 \kappa_{i+1}^2, \quad (40)$$

$$\rho_i \kappa_i \psi_i \varpi_i \leq \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} \kappa_i^2 \rho_i^2 \psi_i^2 + \bar{\gamma}^2 \varpi_i^2, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} -\kappa_i \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial x_k} \psi_k \varpi_k &\leq \frac{\kappa_i^2}{4\bar{\gamma}^2} \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial x_k} \right)^2 \psi_k^2 + \\ &= \bar{\gamma}^2 \sum_{k=1}^{i-1} \varpi_k^2, \end{aligned} \quad (42)$$

将式(40)–(42)代入式(39)中, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq - \sum_{j=1}^{i-1} c_j b \kappa_j^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^j \varpi_k^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j^2}{2} + \\ &= \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j^{*2} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_j b}{\beta_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \kappa_i \left(\frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} g_i \tau_i + \right. \\ &= F_i(Z_i) + \frac{1}{2} g_i^2 \kappa_{i+1}^2 - \frac{b}{\beta_i} \tilde{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i + \\ &= \bar{\gamma}^2 \sum_{j=1}^i \varpi_j^2 - 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1), \end{aligned} \quad (43)$$

其中

$$\begin{aligned} F_i(Z_i) &= \\ &= \rho_i f_i + \frac{1}{2} \frac{\rho_i^2}{\rho_{i+1}^2} \kappa_i + \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} \kappa_i \rho_i^2 \psi_i^2 + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} (\kappa_i + \\ &= \tau_{i-1}) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial x_k} (f_k + g_k x_{k+1}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \rho_k} \dot{\rho}_k - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_k} \dot{\hat{\theta}}_k + \frac{1}{2} g_{i-1}^2 \kappa_i - \\ &= \sum_{k=1}^i \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \zeta_2^{(k-1)}} \zeta_2^{(k)} + \frac{\kappa_i}{4\bar{\gamma}^2} \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial x_k} \right)^2 \psi_k^2, \end{aligned} \quad (44)$$

用神经网络逼近, 且有 $|\delta_i(Z_i)| \leq \varepsilon_i^*$. 类似于式(29),

得到

$$\begin{aligned} \kappa_i F_i(Z_i) &\leq \frac{1}{2\lambda_i^2} b \kappa_i^2 \theta_i S_i^T(Z_i) S_i(Z_i) + \frac{\lambda_i^2}{2} + \\ &= \frac{b}{2\bar{\gamma}^2} \kappa_i^2 + \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \varepsilon_i^{*2}, \end{aligned} \quad (45)$$

其中 $Z_i = [X_i \ \hat{\theta}_1 \ \cdots \ \hat{\theta}_i \ \zeta_2 \ \cdots \ \zeta_2^{(i)}]^T$, 将式(45)代入式(43), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq - \sum_{j=1}^{i-1} c_j b \kappa_j^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j \varpi_k^2 + \sum_{j=1}^i \frac{\lambda_j^2}{2} + \\ &= \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{j=1}^i \varepsilon_j^{*2} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_j b}{\beta_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \frac{1}{2} g_i^2 \kappa_{i+1}^2 + \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_j b}{\beta_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \frac{1}{2} g_i^2 \kappa_{i+1}^2 + \kappa_i \left(\frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} g_i \tau_i + \right. \\ &= \frac{b}{2\lambda_i^2} \kappa_i \theta_i S_i^T(Z_i) S_i(Z_i) + \frac{b}{2\bar{\gamma}^2} \kappa_i - \frac{b}{\beta_j} \tilde{\theta}_j \dot{\hat{\theta}}_j - \\ &= 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (46)$$

选取虚拟控制律 τ_i 为

$$\tau_i = -c_i \kappa_i - \frac{1}{2\lambda_i^2} \kappa_i \hat{\theta}_i S_i^T(Z_i) S_i(Z_i) - \frac{1}{2\bar{\gamma}^2} \kappa_i. \quad (47)$$

结合式(18)和式(47), 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} g_i \tau_i &= -c_i \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} g_i \kappa_i - \frac{1}{2\bar{\gamma}^2} \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} g_i \kappa_i - \\ &= \frac{1}{2\lambda_i^2} \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} g_i \kappa_i \hat{\theta}_i S_i^T(Z_i) S_i(Z_i) \leq \\ &= -c_i b \kappa_i - \frac{1}{2\lambda_i^2} b \kappa_i \hat{\theta}_i S_i^T(Z_i) S_i(Z_i) - \\ &= \frac{b}{2\bar{\gamma}^2} \kappa_i, \end{aligned} \quad (48)$$

将式(48)代入式(46), 可得式(49), 即

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq - \sum_{j=1}^i c_j b \kappa_j^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j \varpi_k^2 + \sum_{j=1}^i \frac{\lambda_j^2}{2} + \\ &= \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{j=1}^i \varepsilon_j^{*2} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_j b}{\beta_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j - \frac{b}{\beta_i} \tilde{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i - \\ &= \frac{\beta_i}{2\lambda_i^2} \kappa_i^2 S_i^T(Z_i) S_i(Z_i) + \frac{1}{2} g_i^2 \kappa_{i+1}^2 - \\ &= 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (49)$$

选取自适应律 $\dot{\hat{\theta}}_i$ 为

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \frac{\beta_i}{2\lambda_i^2} \kappa_i^2 S_i^T(Z_i) S_i(Z_i) - \sigma_i \hat{\theta}_i, \quad (50)$$

其中 σ_i 是正的设计参数. 此时得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & - \sum_{j=1}^i c_j b \kappa_j^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j \varpi_k^2 - \\ & 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1) + \sum_{j=1}^i \frac{\lambda_j^2}{2} + \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{j=1}^i \varepsilon_j^{*2} + \\ & \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j b}{\beta_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \frac{1}{2} g_i^2 \kappa_{i+1}^2. \end{aligned} \quad (51)$$

步骤 n 与步骤 i 类似, 借助式(17)定义的坐标变换, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_n &= \dot{X}_n - \dot{\tau}_{n-1} = \\ & \frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n} (\kappa_n + \tau_{n-1}) + \rho_n (f_n + g_n u + \\ & \psi_n \varpi_n) - \dot{\tau}_{n-1}, \end{aligned} \quad (52)$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \tau_{n-1}}{\partial x_k} (f_k + g_k x_{k+1} + \psi_k \varpi_k) + \\ & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \tau_{n-1}}{\partial \rho_k} \dot{\rho}_k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \tau_{n-1}}{\partial \hat{\theta}_k} \dot{\hat{\theta}}_k + \\ & \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \zeta_2^{(k-1)}} \zeta_2^{(k)}. \end{aligned} \quad (53)$$

选取Lyapunov函数为

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} \kappa_n^2 + \frac{b}{2\beta_n} \tilde{\theta}_n^2, \quad (54)$$

其中 β_n 是正的设计参数. 对其求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + \kappa_n \dot{\kappa}_n - \frac{b}{\beta_n} \tilde{\theta}_n \dot{\hat{\theta}}_n \leq \\ & - \sum_{j=1}^{n-1} c_j b \kappa_j^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \varpi_k^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j^2}{2} + \\ & \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j^{*2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j b}{\beta_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \kappa_n (\rho_n g_n u + \\ & F_n(Z_n)) - \frac{b}{\beta_n} \tilde{\theta}_n \dot{\hat{\theta}}_n - 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (55)$$

定义函数 $F_n(Z_n)$ 为

$$\begin{aligned} F_n(Z_n) &= \rho_n f_n + \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} \kappa_n \rho_n^2 \psi_n^2 + \frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n} (\kappa_n + \tau_{n-1}) - \\ & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \tau_{n-1}}{\partial x_k} (f_k + g_k x_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \tau_{n-1}}{\partial \rho_k} \dot{\rho}_k - \\ & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \tau_{n-1}}{\partial \hat{\theta}_k} \dot{\hat{\theta}}_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \zeta_2^{(k-1)}} \zeta_2^{(k)} + \\ & \frac{\kappa_n}{4\bar{\gamma}^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \tau_{n-1}}{\partial x_k} \right)^2 \psi_k^2 + \frac{1}{2} g_{n-1}^2 \kappa_n, \end{aligned} \quad (56)$$

用神经网络逼近, 类似于前面步骤, 可以得到

$$\begin{aligned} \kappa_n F_n(Z_n) &\leq \frac{b}{2\lambda_n^2} \kappa_n^2 \theta_n S_n^T(Z_n) S_n(Z_n) + \\ & \frac{\lambda_n^2}{2} + \frac{b}{2\bar{\gamma}^2} \kappa_n^2 + \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \varepsilon_n^{*2}, \end{aligned} \quad (57)$$

其中 $Z_n = [X_n \ \dot{\hat{\theta}}_1 \ \cdots \ \dot{\hat{\theta}}_n \ \zeta_2 \ \cdots \ \zeta_2^{(n)}]^T$, 将式(57)代入式(55), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq - \sum_{j=1}^{n-1} c_j b \kappa_j^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \varpi_k^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j^2}{2} + \\ & \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^{*2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j b}{\beta_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \kappa_n (\rho_n g_n u + \\ & \frac{b}{2\lambda_n^2} \kappa_n \theta_n S_n^T(Z_n) S_n(Z_n) + \frac{b}{2\bar{\gamma}^2} \kappa_n) - \\ & \frac{b}{\beta_n} \tilde{\theta}_n \dot{\hat{\theta}}_n - 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (58)$$

选取实际控制律 u 为

$$u = -c_n \kappa_n - \frac{1}{2\lambda_n^2} \kappa_n \hat{\theta}_n S_n^T(Z_n) S_n(Z_n) - \frac{1}{2\bar{\gamma}^2} \kappa_n, \quad (59)$$

结合式(18)和式(59), 可得

$$\begin{aligned} \rho_n g_n u &= -c_n \rho_n g_n \kappa_n - \frac{1}{2\bar{\gamma}^2} \rho_n g_n \kappa_n - \\ & \frac{1}{2\lambda_n^2} \rho_n g_n \kappa_n \hat{\theta}_n S_n^T(Z_n) S_n(Z_n) \leq \\ & -c_n b \kappa_n - \frac{1}{2\bar{\gamma}^2} b \kappa_n - \\ & \frac{1}{2\lambda_n^2} b \kappa_n \hat{\theta}_n S_n^T(Z_n) S_n(Z_n), \end{aligned} \quad (60)$$

将式(60)代入式(58)并整理可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq - \sum_{j=1}^n c_j b \kappa_j^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \varpi_k^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j^2}{2} + \\ & \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^{*2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j b}{\beta_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j - \frac{b}{\beta_n} \tilde{\theta}_n (\dot{\hat{\theta}}_n - \\ & \frac{\beta_n}{2\lambda_n^2} \kappa_n^2 S_n^T(Z_n) S_n(Z_n)) - 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (61)$$

选取自适应律 $\dot{\hat{\theta}}_n$ 为

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \frac{\beta_n}{2\lambda_n^2} \kappa_n^2 S_n^T(Z_n) S_n(Z_n) - \sigma_n \hat{\theta}_n, \quad (62)$$

其中 σ_n 是正的设计参数. 此时, 得到以下结果:

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq - \sum_{j=1}^n c_j b \kappa_j^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \varpi_k^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j^2}{2} + \\ & \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^{*2} + \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j b}{\beta_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j - 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (63)$$

至此, 非线性系统(1)的自适应预设性能有界 H_∞ 控制器设计完毕, 可给出如下定理.

定理 2 对于满足假设1和假设2的具有传感器故障和外部扰动的非线性系统(1), 不考虑输出信号的初始条件, 若控制律和自适应律按照式(31)(47)(59)(34)(50)(62)选取, 则能够使得系统输出达到预设的性能约束, 系统中的所有信号都是有界稳定的, 并对外

界扰动具有H_∞性能.

证 定理2的证明分为两部分. 整个系统的Lyapunov函数为

$$V = V_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \kappa_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{b}{2\beta_i} \tilde{\theta}_i^2. \quad (64)$$

1) 有界稳定性和预设性能证明.

考虑系统稳定性问题时, 根据式(63)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \sum_{i=1}^n c_i b \kappa_i^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \varpi_k^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i b}{\beta_i} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{*2} - 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (65)$$

对于 $\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i b}{\beta_i} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i$ 项来说, 有以下等式成立:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i b}{\beta_i} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i &= \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i b}{\beta_i} \tilde{\theta}_i \theta_i - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i b}{\beta_i} \tilde{\theta}_i \tilde{\theta}_i \leq \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i b}{2\beta_i} \theta_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i b}{2\beta_i} \tilde{\theta}_i^2, \end{aligned} \quad (66)$$

将式(66)代入式(65), 且 $\varpi_i(t) \in L_2[0, t]$ 是有界的, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \sum_{i=1}^n c_i b \kappa_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i b}{2\beta_i} \tilde{\theta}_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i b}{2\beta_i} \theta_i^2 + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{*2} + \bar{\gamma}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \varpi_k^2 \leq \\ & - a_0 \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \kappa_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{b}{2\beta_i} \tilde{\theta}_i^2 \right) + b_0 = \\ & - a_0 V + b_0, \end{aligned} \quad (67)$$

其中: $a_0 = \min\{2c_i b, \sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$, $b_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i b}{2\beta_i} \theta_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \frac{\bar{\gamma}^2}{2b} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{*2} + \bar{\gamma}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \varpi_k^2$. 由文献[21]中的引理2知, V 是有界的, 即 κ_i 和 $\tilde{\theta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是有界的. 考虑到 $\kappa_1 = \tan(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2})$ 是有界的, 由于 $\tan(\frac{\pi}{2}) = \infty$ 和 $|z_1(0)| < \zeta_2(0)$, 故有 $|z_1(t)| < \zeta_2(t)$.

再根据定理1, 可知当 $t \geq T_f$ 时, 系统输出满足 $-\zeta_1(t) < X_1(t) < \zeta_1(t)$. 且由于 $X_1(t)$ 是连续的函数, 所以当 $0 \leq t \leq T_f$, $X_1(t)$ 一定是有界的. 故当 $t \geq 0$, $X_1(t)$ 都是有界的. 因 $\rho \leq \rho_i(t) \leq 1$, 所以 x_1 是有界的. 再根据系统(1)的方程, 可知 x_2 是有界的, 所以 $X_2(t)$ 和 x_3 是有界的. 因坐标变换 $\kappa_i = X_i - \tau_{i-1}$, 可知 τ_1 是有界的. 类似于上述分析, 可知 $X_i(t)$, x_{i+1} , τ_{i-1} ($3 \leq i \leq n-1$) 和 u 有界的. 因此可知 $\tilde{\theta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是有界的, 所以 $\hat{\theta}_i$ 是有界的. 因此系统是有界稳定的且满足预设性能.

2) 有界H_∞性能证明.

定义一个辅助函数如下:

$$H = \dot{V} + 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1) - \gamma^2 \|\varpi\|^2, \quad (68)$$

其中 $\|\varpi\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \varpi_k^2$, 且

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \kappa_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{b}{2\beta_i} \tilde{\theta}_i^2 + p_0 = \\ & V + p_0 > 0, \end{aligned} \quad (69)$$

其中 $p_0 > 0$ 为实数, 它作为辅助参数加入, 不影响用 Lyapunov 函数 V 来设计系统控制器, 即不影响前面的控制设计结果. 选择它的目的是使 $\bar{V} > 0$. 将式(65)代入式(68)可以得到

$$H \leq b_0. \quad (70)$$

由式(69)知 $\bar{V} > 0$, 则一定存在未知常数 $\eta > 0$, 有

$$H = \dot{\bar{V}} + 2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1) - \gamma^2 \|\varpi\|^2 \leq b_0 \leq \eta \bar{V}, \quad (71)$$

则

$$\dot{\bar{V}} \leq -2\kappa_1^2 (X_1^2 + 1) + \gamma^2 \|\varpi\|^2 + \eta \bar{V}, \quad (72)$$

对式(72)从0到 t 积分可得

$$\begin{aligned} \bar{V}(\kappa(t)) &\leq \bar{V}(\kappa(0)) + \int_0^t \eta \bar{V}(\kappa(s)) ds + \\ & \int_0^t (\gamma^2 \|\varpi(s)\|^2 - 2\kappa_1^2(s) (X_1^2(s) + 1)) ds, \end{aligned} \quad (73)$$

这里, 令 $\phi(t) = \bar{V}(\kappa(0)) + \int_0^t (\gamma^2 \|\varpi(s)\|^2 - 2\kappa_1^2(s) (X_1^2(s) + 1)) ds$, $\chi(s) = \eta$, 根据文献[22]中的引理2, 则可得到

$$\bar{V}(\kappa(t)) \leq \phi(t) + \eta \int_0^t \phi(s) e^{\int_s^t \eta du} ds. \quad (74)$$

下面用反证法思想来证明 $\phi(t) > 0$, 首先假设 $\phi(t) \leq 0$, 则有

$$\bar{V}(\kappa(t)) \leq \eta \int_0^t \phi(s) e^{\int_s^t \eta du} ds \leq 0, \quad (75)$$

可见式(75)与式(69)矛盾, 所以假设不成立, 因而可得 $\phi(t) > 0$, 即

$$\begin{aligned} \int_0^t 2\kappa_1^2(s) (X_1^2(s) + 1) ds &< \\ \gamma^2 \int_0^t \|\varpi(s)\|^2 ds + \bar{V}(\kappa(0)). \end{aligned} \quad (76)$$

因为 $\kappa_1 = \tan(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2})$, $z_1 = \tanh X_1$, $\zeta_2(0) \geq \zeta_2(t)$, 且 $\tan^2(\psi) \geq \psi^2$, $2(\psi^2 + 1) \tanh^2(\psi) \geq \psi^{2[23]}$. 故

$$\begin{aligned} \int_0^t 2 \tan^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{z_1}{\zeta_2}\right) (X_1^2(s) + 1) ds &\geq \\ \int_0^t \frac{\pi^2}{4} \frac{z_1^2(s)}{\zeta_2^2(0)} 2(X_1^2(s) + 1) ds &= \\ \int_0^t \frac{\pi^2}{4} \frac{\tanh^2(X_1)}{\zeta_2^2(0)} 2(X_1^2(s) + 1) ds &\geq \\ \int_0^t \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\zeta_2^2(0)} X_1^2(s) ds, \end{aligned} \quad (77)$$

又由式(75)–(76)可知

$$\int_0^t \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\zeta_2^2(0)} X_1^2(s) ds < \bar{\gamma}^2 \int_0^t \|\varpi(s)\|^2 ds + \bar{V}(\kappa(0)), \quad (78)$$

从而可以得到

$$\int_0^t X_1^2(s) ds < \gamma^2 \int_0^t \|\varpi(s)\|^2 ds + q \bar{V}(\kappa(0)), \quad (79)$$

其中: $q = \frac{4\zeta_2^2(0)}{\pi^2}$, $\gamma = \frac{2\zeta_2(0)\bar{\gamma}}{\pi}$. 因此系统满足定义2中的 H_∞ 性能指标. 证毕.

5 仿真验证

本节对文献[5]中的倒立摆系统进行仿真研究, 另外在该模型中加入了外部扰动. 系统的数学描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - \frac{mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l(\frac{4}{3} - \frac{m \cos x_1^2}{m_c + m})} + \frac{\frac{m \cos x_1}{m_c + m}}{l(\frac{4}{3} - \frac{m \cos x_1^2}{m_c + m})} u + \varpi, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (80)$$

其中: x_1 和 x_2 分别为摆杆的角度和角速度, 重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $m_c = 0.1 \text{ kg}$ 是车的质量, $m = 1 \text{ kg}$ 是摆杆的质量, $l = 0.5 \text{ m}$ 是摆杆转动轴心到摆杆质心的长度. RBF神经网络的基函数均为高斯函数, 宽度均为2, 神经网络 $W_1^T S_1$ 有74个节点, 均匀分布在 $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ 上; 神经网络 $W_2^T S_2$ 有75个节点, 均匀分布在 $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ 上. 传感器故障描述为

$$\begin{cases} X_1(t) = \begin{cases} x_1(t), & t < 2, \\ 0.2x_1(t), & t \geq 2, \end{cases} \\ X_2(t) = \begin{cases} x_2(t), & t < 4, \\ (0.95e^{5(2-t)} + 0.05)x_2(t), & t \geq 4. \end{cases} \end{cases} \quad (81)$$

这意味着第1个传感器在 $t \geq 2 \text{ s}$ 时将失去80%的有效性, 而第2个传感器在 $t \geq 4 \text{ s}$ 时将失去大概95%的有效性. 设计参数选取如下: $c_1 = 5$, $c_2 = 4$, $M = 2$, $\tau = 0$, $\zeta_0 = 0.3$, $\zeta_\infty = 0.02$, $l_1 = 0.8$, $T_f = 2$, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_{T_f} = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\bar{\gamma} = 0.8$. 系统的初始状态为 $x_1(0) = 0.4$, $x_2(0) = 0.2$. 自适应参数的初始值为 $\hat{\theta}_1(0) = 0.1$, $\hat{\theta}_2(0) = 0.2$. 外部扰动为 $\varpi = 0.1 \sin t$. 按照定理2计算系统的控制器对系统进行仿真, 其结果如图1–3所示. 图1表示传感器发生故障时, 状态变量 X_1 和系统真实状态变量 x_1 的轨迹曲线, 体

现出系统传感器在故障情况下仍可具有很好的镇定性能; 图2表示传感器发生故障时, 状态变量 X_2 和系统真实状态变量 x_2 的轨迹曲线, 表明故障情况下系统状态是有界稳定的; 图3为系统控制输入曲线, 说明控制输出是合理的.

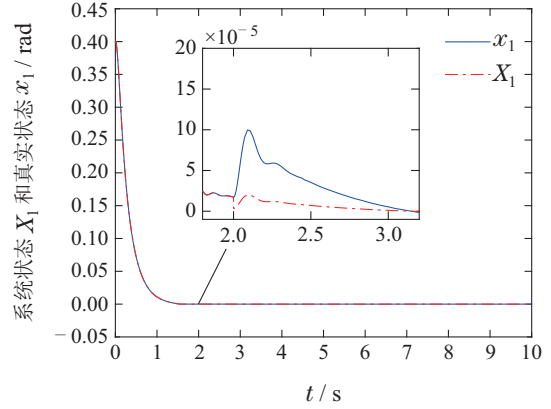


图1 状态变量 X_1 和真实状态变量 x_1

Fig. 1 State variable X_1 and real state variable x_1

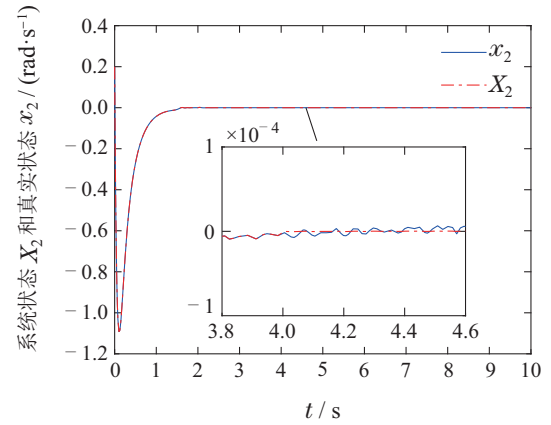


图2 状态变量 X_2 和真实状态变量 x_2

Fig. 2 State variable X_2 and real state variable x_2

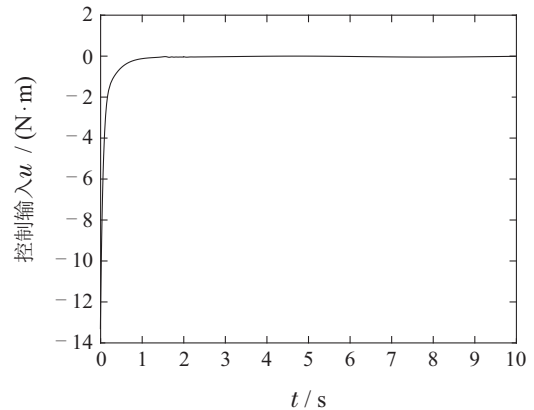


图3 系统的控制输入 u

Fig. 3 Control input u

为了说明所提出控制器对外部干扰的抑制作用, 在 $t = 3 \text{ s}$ 时加入一个外部扰动信号 $\varpi = 3e^{-0.1t}$, 在上

面仿真参数不变的情况下, 重选干扰抑制系数 $\bar{\gamma} = 0.2$, 图4同时给出有、无 H_∞ 控制时的仿真结果. 图中显示了状态变量 x_1 在两种控制作用下的对比曲线, 可以看出本文方法明显比无 H_∞ 的控制方法具有更强的抗干扰能力.

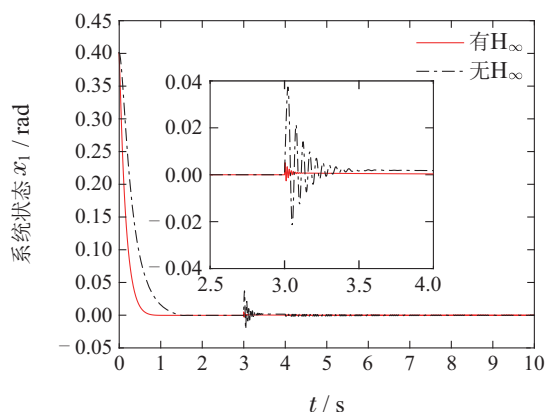


图4 有外部扰动时有、无 H_∞ 控制

Fig. 4 With or without H_∞ control under disturbances

为了说明不同的控制参数对系统控制效果的影响, 这里考虑当初始状态、预设时间 T_f 和预设性能参数 τ 取不同值时的控制性能, 其仿真结果如图5–7所示. 图5表示系统的初始状态分别为 $x_1(0) = 0.4$, $x_1(0) = -0.5$, $x_1(0) = 0.2$ 时, 不管初始状态是否在预设范围内, 系统输出 y 都满足预设性能, 对控制效果基本无影响. 图6表示当预设时间为 $T_f = 2$ 和 $T_f = 7$ 时系统输出效果的对比, 可以看出随着 T_f 的增大系统控制效果变差, 所以应尽量取较小的 T_f . 图7表示当预设性能设计参数为 $\tau = 0$, $\tau = 3$ 和 $\tau = 8$ 时, 系统输出效果的对比. 可以看出, 随着 τ 增大, 输出收敛速度更快, 但是到了一定大小则会使输出出现振荡现象.

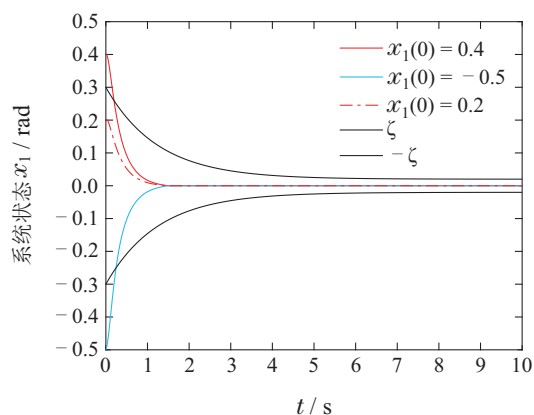


图5 不同初始值时系统输出的预设约束效果

Fig. 5 The prescribed constraint effect of the system output for different initial values

从图1–7可以看出在系统出现传感器故障后, 系统输出稳定性较强且满足预设性能, 同时系统对外部干

扰具有较好的抑制性能. 仿真说明了所提出的预设性能新方法可以针对初始条件未知的情况, 且设计的控制器具有有效性和合理性.

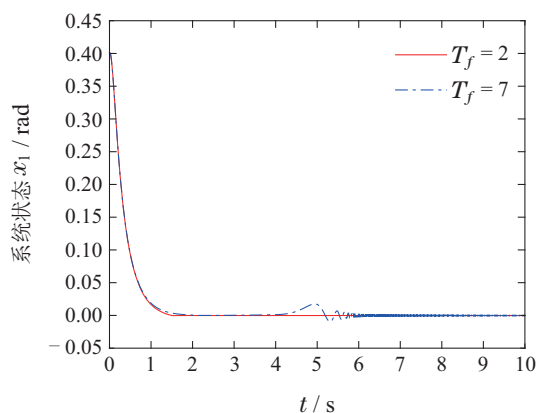


图6 T_f 不同时系统输出效果对比

Fig. 6 Systems output effects and comparison for different T_f

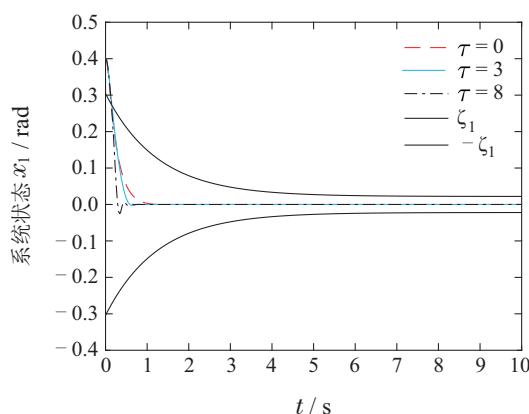


图7 τ 不同时系统输出效果对比

Fig. 7 Systems output effects and comparison for different τ

6 结论

本文研究了一类具有外部扰动和传感器故障的非线性系统的自适应预设性能有界 H_∞ 容错控制问题. 提出了一种与被控量初始条件无关的新预设性能控制设计方法, 解决了传统预设性能控制设计方法中控制效果依赖系统初始值的问题. 文中综合考虑了外部扰动和传感器故障对于系统的影响, 避免了系统出现传感器故障后性能大幅度失效的情况. 本文所设计的控制器能够保证在传感器故障后系统中的所有信号均是有界的, 系统输出能达到预设定的性能约束效果, 同时具有很好的外部干扰抑制性能. 最后, 仿真结果验证了所提出的控制方案在传感器故障和未知系统状态初始条件的情况下是有效的, 这使得本文方法便于预设性能控制理论在实际中的应用.

参考文献:

- [1] ZHANG J X, YANG G H. Supervisory switching-based prescribed performance control of unknown nonlinear systems against actuator failures. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(6): 2367 – 2385.
- [2] SHEN B, DING S X, WANG Z. Finite-horizon H_∞ fault estimation for linear discrete time-varying systems with delayed measurements. *Automatica*, 2013, 49(1): 293 – 296.
- [3] CHEN F, JIANG R, ZHANG K, et al. Robust backstepping sliding-mode control and observer-based fault estimation for a quadrotor UAV. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(8): 5044 – 5056.
- [4] WANG Yuanhui, WANG Haibin, ZHANG Xiaoyun. Robust adaptive fault-tolerant tracking control for dynamic positioning vessel. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(2): 287 – 300.
(王元慧, 王海滨, 张晓云. 动力定位船轨迹跟踪鲁棒自适应容错控制. 控制理论与应用, 2021, 38(2): 287 – 300.)
- [5] LIU X, ZHAI D, LI T, et al. Fuzzy-approximation adaptive fault-tolerant control for nonlinear pure-feedback systems with unknown control directions and sensor failures. *Fuzzy Sets and Systems*, 2019, 356: 28 – 43.
- [6] WU H N, ZHANG H Y. Reliable mixed L_2/H_∞ fuzzy static output feedback control for nonlinear systems with sensor faults. *Automatica*, 2005, 41(11): 1925 – 1932.
- [7] ZHAI D, AN L, LI X, et al. Adaptive fault-tolerant control for nonlinear systems with multiple sensor faults and unknown control directions. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 29(9): 4436 – 4446.
- [8] BECHLIOLIS C P, ROVITHAKIS G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2090 – 2099.
- [9] CHEN Ming, LI Xiaohua. Adaptive finite-time tracking control for nonaffine nonlinear systems based on prescribed performance. *Control and Decision*, 2020, 35(5): 1259 – 1264.
(陈明, 李小华. 基于预设性能的非仿射非线性系统自适应有限时间控制. 控制与决策, 2020, 35(5): 1259 – 1264.)
- [10] ZHAO N N, OUYANG X Y, WU L B, et al. Event-triggered adaptive prescribed performance control of uncertain nonlinear systems with unknown control directions. *ISA Transactions*, 2021, 108: 121 – 130.
- [11] LIU Y, LIU X, JING Y. Adaptive neural networks finite-time tracking control for non-strict feedback systems via prescribed performance. *Information Sciences*, 2018, 468: 29 – 46.
- [12] ZHANG J X, YANG G H. Prescribed performance fault-tolerant control of uncertain nonlinear systems with unknown control directions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 2(12): 6529 – 6535.
- [13] WANG C C, YANG G H. Neural network-based adaptive output feedback fault-tolerant control for nonlinear systems with prescribed performance. *Neurocomputing*, 2019, 329: 457 – 467.
- [14] YUE C, WANG F, CAO X, et al. Robust fault-tolerant attitude tracking with guaranteed prescribed performance. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(1): 229 – 253.
- [15] ZAMES G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, 26(2): 301 – 320.
- [16] LI X, LIU X. Backstepping-based decentralized adaptive neural H_∞ tracking control for a class of large-scale nonlinear interconnected systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355(11): 4533 – 4552.
- [17] AOUAOU S, CHADLI M, SHI P, et al. Discrete-time H_2/H_∞ sensor fault detection observer design for nonlinear systems with parameter uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(3): 339 – 361.
- [18] LIU H, LI X, LIU X, et al. Backstepping-based decentralized bounded- H_∞ adaptive neural control for a class of large-scale stochastic nonlinear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(15): 8049 – 8079.
- [19] LI Xiaohua, YANG Ruifang, LIU Hui, et al. Adaptive finite-time bounded- H_∞ tracking control for a class of manipulator system. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(1): 147 – 156.
(李小华, 杨瑞芳, 刘辉, 等. 一类机械臂系统自适应有限时间有界 H_∞ 跟踪控制. 控制理论与应用, 2021, 38(1): 147 – 156.)
- [20] SANNER R M, SLOTINE J E. Gaussian networks for direct adaptive control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1992, 3(6): 837 – 863.
- [21] GE S S, WANG C. Adaptive neural control of uncertain MIMO nonlinear systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, 15(3): 674 – 692.
- [22] LI Xiaohua, LIU Hui, LIU Xiaoping. Adaptive H_∞ tracking control for a class of stochastic nonlinear systems with completely unknown functions. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(9): 1431 – 1441.
(李小华, 刘辉, 刘晓平. 一类函数完全未知的随机非线性系统自适应 H_∞ 跟踪控制. 控制理论与应用, 2019, 36(9): 1431 – 1441.)
- [23] ZHAO J, TONG S, LI Y. Fuzzy adaptive output feedback control for uncertain nonlinear systems with unknown control gain functions and unmodeled dynamics. *Information Sciences*, 2021, 558: 140 – 156.

作者简介:

李小华 教授, 博士生导师, 从事复杂系统结构与控制、非线性系统控制理论以及工业过程建模与控制等研究, E-mail: lixiaohua6412@163.com;

程鸿展 硕士研究生, 从事非线性系统鲁棒容错控制研究, E-mail: chenghz1997@163.com;

刘辉 博士研究生, 从事非线性系统预设性能控制研究, E-mail: 18741273790@163.com.