

滑模控制下多Euler-Lagrange系统预设时间二分一致性

陶 梦¹, 刘小洋^{1,2†}, 曹进德³, 邵 劭⁴

(1. 江苏师范大学 计算机科学与技术学院, 江苏 徐州 221116; 2. 系统控制与信息处理教育部重点实验室, 上海 200240;

3. 东南大学 数学学院, 江苏 南京 210096; 4. 东北大学秦皇岛分校 控制工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 本文研究了具有外部干扰的多Euler-Lagrange系统预设时间滑模二分一致性问题. 通过设计分布式控制协议, 使得具有动态领导者的多Euler-Lagrange系统在预设时间内到达滑模面, 从而进一步在另一预设时间内实现二分一致性. 本文采用的终端滑模控制方法可以在克服外部干扰的基础上保证系统在预设时间内实现期望的控制目标. 最后, 通过数值仿真验证了理论结果的可行性和有效性.

关键词: 二分一致性; 多Euler-Lagrange系统; 外部干扰; 预设时间; 滑模控制

引用格式: 陶梦, 刘小洋, 曹进德, 等. 滑模控制下多Euler-Lagrange系统预设时间二分一致性. 控制理论与应用, 2023, 40(11): 1949 – 1956

DOI: 10.7641/CTA.2023.20404

Prescribed-time bipartite consensus of multiple Euler-Lagrange systems via sliding-mode control

TAO Meng¹, LIU Xiao-yang^{1,2†}, CAO Jin-de³, SHAO Shao⁴

(1. School of Computer Science and Technology, Jiangsu Normal University, Xuzhou Jiangsu 221116, China;

2. Key Laboratory of System Control and Information Processing, Ministry of Education, Shanghai 200240, China;

3. School of Mathematics, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China;

4. School of Control Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: This paper investigates the prescribed-time bipartite sliding-mode consensus of multiple Euler-Lagrange systems with external disturbances. By designing a distributed controller, the multiple Euler-Lagrange systems with a dynamic leader are driven to achieve the sliding-mode surface within a preset time, and thus reach the bipartite consensus within another prescribed time. The terminal sliding-mode control protocol proposed in this paper can ensure that the systems achieve the desired control objective within a prescribed time on the basis of overcoming external disturbances. Finally, one numerical simulation is provided to illustrate the feasibility and effectiveness of the theoretical results.

Key words: bipartite consensus; multiple Euler-Lagrange systems; external disturbances; prescribed time; sliding-mode control

Citation: TAO Meng, LIU Xiaoyang, CAO Jinde, et al. Prescribed-time bipartite consensus of multiple Euler-Lagrange systems via sliding-mode control. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(11): 1949 – 1956

1 引言

随着计算机技术和通信技术的飞速发展, 多智能体系统的协同工作模式引起了人们的极大兴趣. 特别是近年来, 由于具有操作成本低、鲁棒性强、高容错性、高效率 and 并行性等优良特性, 多智能体系统已经在移动机器人、智能电力网络、传感器网络 and 智能交通控制等诸多工业领域得到了广泛地应用. 考虑到实

际系统多为复杂的非线性系统, 一般的线性模式不再适用, 非线性系统开始受到众多研究者的关注. 其中, Euler-Lagrange系统作为一种经典的非线性系统, 其可以描述机器人、机械臂、地面车辆和航天器等复杂的动力学系统, 已经被广泛应用于工业生产、空间探索、灾难救援等领域^[1-2]. 此外, 伴随着网络科学的持续发展, 多Euler-Lagrange系统(multiple Euler-Lagran-

收稿日期: 2022-05-17; 录用日期: 2023-04-24.

†通信作者. E-mail: xyliu@jsnu.edu.cn.

本文责任编辑: 丁世宏.

国家自然科学基金项目(62276119), 江苏师范大学研究生科研与实践创新计划项目(2021XKT1401)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62276119) and the Postgraduate Research & Practice Innovation Program of Jiangsu Normal University (2021XKT1401).

ge systems, MELS)在空间对抗和航天器协同攻击等军事领域的应用已经获得了极大地推广. 因此, 研究MELS的协同控制问题具有重要的理论价值和现实意义.

MELS的一致性是多智能体系统协同控制领域的热点问题. 近年来, 众多学者对其进行了大量研究并取得了一些研究成果^[3-5]. 例如, 文献[3]基于自适应分布式观测器解决了不确定MELS的领导-跟随一致性问题. 文献[4]在传统采样策略的基础上提出了一类时变采样策略实现了MELS的一致性. 然而, 上述成果均是基于网络中各节点之间仅存在合作关系的假设而实现的. 事实上, 现实生活中的个体之间不仅存在合作关系而且也存在对抗关系. 例如, 两党制中, 当其中一个政党的领导人对某个特殊事件发表观点, 同一阵营的成员会表示赞成, 而对立阵营的成员则会表示反对^[6]. 这表明同一阵营的成员之间是合作关系, 而不同阵营的成员之间是对抗关系. 对此, Altafini在文献[7]中引入符号图的概念, 将对抗关系表示为节点间的负边, 合作关系表示为节点间的正边. 如此, 在合作-对抗网络中, 多智能体系统二分一致性就演变成控制目标的模是相同的, 而符号则相反. 在此基础上, 文献[8]利用异步脉冲控制策略实现了具有领导者的多智能体系统的分布式二分一致性. 文献[9]分别研究了在细节平衡图与细节非平衡图条件下多智能体系统的有限时间二分一致性.

另一方面, 被控系统往往要求在有限时间内收敛, 因此收敛速度是评价控制协议性能的一个重要指标. 为了加快多智能体系统的收敛速度, 众多优化控制时间的控制方法被提出, 如有限时间和固定时间控制策略^[10-16]. 但是, 无论是有限时间控制策略还是固定时间控制策略都有一定的保守性, 其收敛时间严重依赖系统参数, 甚至是系统初值, 这使得控制协议无法完成一些对时间要求较高的任务. 为了克服以上缺陷, 预设时间控制策略开始走入人们视线. 多智能体系统的预设时间控制能使系统在任意事先指定的时间内实现一致性, 同时确保该时间与其它任何参数无关, 完全根据任务需要预先设置. 截止目前, 多智能体系统预设时间一致性已经取得了一些研究成果^[17-19]. 例如, 文献[17]基于分布式观测器和滑模控制策略实现了二阶多智能体系统预设时间一致性. 但是, 目前关于MELS预设时间二分一致性的研究成果较少.

此外, 由于复杂多变的工作环境, 多智能体系统不可避免地会受到各种干扰的影响. 鉴于滑模控制对外部干扰具有良好的鲁棒性, 文献[20]基于滑模控制理论和图论提出了有限时间滑模跟踪控制协议, 实现了Euler-Lagrange网络系统领导-跟随有限时间协同追踪. 文献[21]基于有限时间滑模观测器, 解决了在速度不可测情况下多智能体系统有限时间一致性问题.

文献[22]提出了全新的滑模控制器, 实现了具有多个领导者的MELS固定时间一致性. 但是, 现有的文献大多集中在有限时间滑模控制和固定时间滑模控制, 对于如何设计新的滑模控制策略来保证MELS的预设时间二分一致性仍然有待解决.

基于上述讨论, 本文主要研究了具有外部干扰的MELS的预设时间二分一致性问题. 本文主要创新点如下:

1) 与文献[3-5, 10-12]中的完全一致性不同, 本文在结构平衡图下, 实现了MELS的预设时间二分一致性, 最终的一致性目标的模相同, 但是符号相反;

2) 与文献[22]考虑的无干扰的系统相比, 本文研究了具有外部扰动的MELS, 采用预设时间控制方法克服了外部干扰对系统实现二分一致性的影响;

3) 与文献[22]中的控制时间依赖于系统参数不同, 本文借助时变函数方法设计了全新的预设时间滑模控制协议, 保证MELS在预设时间内实现二分一致性, 且控制时间可以根据任务需要而预先设定.

2 问题描述

2.1 代数图论

考虑由有向符号图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 来描述 N 个跟随者之间的通信拓扑, 其中: $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 表示顶点集; $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示有向边集; $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ 表示智能体 i 可以接收到智能体 j 的信息, 但反之不成立; $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示图 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵, 如果 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$, 那么 $a_{ij} \neq 0$, 否则 $a_{ij} = 0$. 本文不考虑闭环, 即 $a_{ii} = 0$. 点 v_{i1} 到点 v_{ij} 的路径可以由有序点集 $\{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ij}\}$ 来表示, 其中 $(v_{ik}, v_{ik+1}) \in \mathcal{E}, k=1, 2, \dots, j-1$. 如果有向图中任意两点之间都有一条路径连接, 那么称图 $\mathcal{G}$ 为强连通图.

图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 定义如下:

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}|, & j = i, \\ -a_{ij}, & j \neq i, \end{cases}$$

对于符号图 $\mathcal{G}$, 如果顶点集 $\mathcal{V}$ 可以划分为两个集合 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$, 满足 $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}, \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset, \forall v_i, v_j \in \mathcal{V}_m, m \in \{1, 2\}, a_{ij} \geq 0$ 并且 $\forall v_i \in \mathcal{V}_m, v_j \in \mathcal{V}_{3-m}, m \in \{1, 2\}, a_{ij} \leq 0$, 那么称图 $\mathcal{G}$ 为结构平衡图, 否则称图 $\mathcal{G}$ 为结构非平衡图.

将领导者节点记为 v_0 , 假设领导者只发送信息, 不接收跟随者的信息. 如果第 i 个跟随者可以直接获取领导者的信息, 则 $b_i > 0$, 否则 $b_i = 0$. 记对角阵 $B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$, 并定义新矩阵 $H = \mathcal{L} + B$.

2.2 多Euler-Lagrange系统

考虑由 N 个跟随者组成的多Euler-Lagrange系统,

第*i*个Euler-Lagrange系统定义如下:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i + \delta_i, \quad (1)$$

其中: $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i \in \mathbb{R}^p$ 分别代表广义坐标、速度和加速度向量; $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 表示正定对称惯性矩阵; $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 表示科里奥利-向心力矩阵; $g_i(q_i) \in \mathbb{R}^p$ 表示重力; $\tau_i \in \mathbb{R}^p$ 表示作用在系统上的控制器; $\delta_i \in \mathbb{R}^p$ 为有界的外部干扰, 满足 $\|M_i(q_i)\delta_i\| \leq \sigma$, σ 为正常数.

定义动态领导者如下:

$$\ddot{q}_0 = f(q_0, \dot{q}_0), \quad (2)$$

其中 $q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0 \in \mathbb{R}^p$ 分别表示领导者的位置、速度和加速度信息.

式(1)可以进一步写成矩阵形式为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau + \delta, \quad (3)$$

其中:

$$M(q) = \text{diag}\{M_1(q_1), M_2(q_2), \dots, M_N(q_N)\},$$

$$C(q, \dot{q}) = \text{diag}\{C_1(q_1, \dot{q}_1), C_2(q_2, \dot{q}_2), \dots, C_N(q_N, \dot{q}_N)\},$$

$$G(q) = [g_1^T(q_1) \ g_2^T(q_2) \ \dots \ g_N^T(q_N)]^T,$$

$$q = [q_1^T \ q_2^T \ \dots \ q_N^T]^T,$$

$$\tau = [\tau_1^T \ \tau_2^T \ \dots \ \tau_N^T]^T,$$

$$\delta = [\delta_1^T \ \delta_2^T \ \dots \ \delta_N^T]^T.$$

2.3 相关假设与引理

假设 1 领导者的加速度有界, 满足 $\|\ddot{q}_0(t)\| \leq \varepsilon$, ε 为正常数.

假设 2 有向符号图 $\mathcal{G}$ 是强连通的并且结构平衡, 且至少有一个节点可以直接接收领导者的信息.

引理 1^[7] 若图 $\mathcal{G}$ 是结构平衡的, 则存在对角阵 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$, $d_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, 使得矩阵 DAD 的所有元素非负.

对于MELS(1), 预设时间二分一致性定义如下:

定义 1 若以下

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T_f} \|q_i(t) - q_0(t)\| = 0, \quad \forall i \in \mathcal{V}_1, \\ \|q_i(t) - q_0(t)\| = 0, \quad \forall t > T_f, \quad \forall i \in \mathcal{V}_1, \\ \lim_{t \rightarrow T_f} \|q_i(t) + q_0(t)\| = 0, \quad \forall i \in \mathcal{V}_2, \\ \|q_i(t) + q_0(t)\| = 0, \quad \forall t > T_f, \quad \forall i \in \mathcal{V}_2 \end{cases} \quad (4)$$

与

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T_f} \|\dot{q}_i(t) - \dot{q}_0(t)\| = 0, \quad \forall i \in \mathcal{V}_1, \\ \|\dot{q}_i(t) - \dot{q}_0(t)\| = 0, \quad \forall t > T_f, \quad \forall i \in \mathcal{V}_1, \\ \lim_{t \rightarrow T_f} \|\dot{q}_i(t) + \dot{q}_0(t)\| = 0, \quad \forall i \in \mathcal{V}_2, \\ \|\dot{q}_i(t) + \dot{q}_0(t)\| = 0, \quad \forall t > T_f, \quad \forall i \in \mathcal{V}_2 \end{cases} \quad (5)$$

成立, 则称MELS(1)实现了预设时间二分一致性, 其中 T_f 是系统实现一致性的时间, 该时间可以根据任务需求预先设计.

注 1 二分一致性是指多智能体系统中的各智能体通过彼此的合作及对抗交互, 达到两组模值相同但符号相反的状态. 它可以用来刻画同时具有竞争与合作关系的多智能体系统的演化规律. 此时系统可以分为具有相反任务目标的两组阵营并进行动力学分析, 常应用于多移动机器人对抗系统、社交网络的观点分析等领域.

3 主要结论

本节提出一种新的滑模控制策略来实现带有动态领导者的MELS预设时间二分一致性.

首先定义追踪误差

$$\begin{cases} e_{1i} = \sum_{j=1}^N |a_{ij}|(q_i - (\text{sgn } a_{ij})q_j) + b_i(q_i - d_i q_0), \\ e_{2i} = \sum_{j=1}^N |a_{ij}|(\dot{q}_i - (\text{sgn } a_{ij})\dot{q}_j) + b_i(\dot{q}_i - d_i \dot{q}_0), \end{cases} \quad (6)$$

记 $\mathbf{q}_0 = (D \otimes I_p)(1_N \otimes \mathbf{q}_0(t))$, $\hat{H} = H \otimes I_p$, $e_1 = [e_{11}^T \ e_{12}^T \ \dots \ e_{1N}^T]^T$ 和 $e_2 = [e_{21}^T \ e_{22}^T \ \dots \ e_{2N}^T]^T$, 则式(6)可以写成向量的形式为

$$\begin{cases} e_1 = \hat{H}(q - \mathbf{q}_0), \\ e_2 = \hat{H}(\dot{q} - \dot{\mathbf{q}}_0). \end{cases} \quad (7)$$

考虑到 $\ddot{q} = M^{-1}(q)(\tau + \delta - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q))$, 再结合式(7), 追踪误差系统定义如下:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = \hat{H}(M^{-1}(q)(\tau - G(q) - C(q, \dot{q})\dot{q}) + W - \ddot{\mathbf{q}}_0), \end{cases} \quad (8)$$

其中: $W = [w_1^T \ w_2^T \ \dots \ w_N^T]^T$, $w_i = M_i(q_i)\delta_i$.

引入如下时变函数 $\phi(t)$:

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{t_f + t_0 - t}{\varrho}, & t \in [t_0, t_0 + t_f), \\ 1, & t \in [t_0 + t_f, \infty), \end{cases} \quad (9)$$

其中: 常数 $\varrho > 1$, $t_0 > 0$ 是系统初始时刻, $t_f > 0$ 是系统收敛所花费的时间, $T_f = t_0 + t_f$ 是预先设计的收敛时间.

基于函数 $\phi(t)$, 设计终端滑模 $s(t)$ 如下:

$$s(t) = e_2(t) + \frac{1}{\phi(t)}e_1(t), \quad (10)$$

其中 $s(t) = [s_1^T(t) \ s_2^T(t) \ \dots \ s_N^T(t)]^T$.

再引入函数 $\varphi(t)$, 即

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t_0 + T_1 - t}{\varrho_1}, & t \in [t_0, t_0 + T_1), \\ \frac{t_0 + t_f - t}{\varrho_2}, & t \in [t_0 + T_1, t_0 + t_f), \\ 1, & t \in [t_0 + t_f, \infty), \end{cases} \quad (11)$$

其中: 常数 $\varrho_1, \varrho_2 > 1$; T_1 表示滑动时间, 满足 $0 < T_1 < t_f$; $t_0 + T_1$ 为预先设置的系统到达滑模面的时间.

基于时变函数 $\phi(t)$ 与 $\varphi(t)$, 设计控制器如下:

$$\tau_i = g_i(q_i) + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + M_i(q_i)u_i(t), \quad (12)$$

其中:

$$u_i(t) = \bar{u}_i(t) + \tilde{u}_i(t), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(t) = & (\sum_{j=1}^N |a_{ij}| + b_i)^{-1} (\sum_{j \neq i} a_{ij} \bar{u}_j(t) - \\ & \frac{1}{\phi(t)} e_{2i}(t) - \frac{1}{\varrho \phi^2(t)} e_{1i}(t)), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(t) = & (\sum_{j=1}^N |a_{ij}| + b_i)^{-1} (\sum_{j \neq i} a_{ij} \tilde{u}_j(t) - \\ & \frac{1}{\varphi(t)} s_i(t) - k \operatorname{sgn} s_i(t)), \end{aligned} \quad (15)$$

其中参数 $k > 0$.

定理 1 在假设1、假设2和控制协议(12)下, 如果控制参数满足 $k \geq \sqrt{N}(\sigma + \varepsilon) \|\hat{H}\|$, 则MELS(1)在 $t = T_f$ 时实现预设时间二分一致性, 并且 $u_i(t)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上保持有界.

证 本文的证明分为3个步骤. 首先, 证明系统(1)可以在 $t = t_0 + T_1$ 时到达滑模面 $s(t) = 0$; 其次, 证明系统(1)能在 $t = T_f$ 时实现二分一致性; 最后, 证明 $u_i(t)$ 在整个时间区间 $[t_0, \infty)$ 上的有界性.

步骤 1 证明在控制协议(12)下, 系统(1)可以在 $t = t_0 + T_1$ 时到达滑模面 $s(t) = 0$.

沿着系统(8)对滑模变量(10)求导得

$$\dot{s}(t) = \dot{e}_2(t) + \frac{1}{\phi(t)} e_2(t) + \frac{1}{\varrho \phi^2(t)} e_1(t), \quad (16)$$

选取Lyapunov函数

$$V_1(t) = \frac{1}{2} s^T(t) s(t), \quad (17)$$

沿着系统(16)对 $V_1(t)$ 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & s^T(t) \dot{s}(t) = \\ & s^T(t) (\dot{e}_2(t) + \frac{1}{\phi(t)} e_2(t) + \frac{1}{\varrho \phi^2(t)} e_1(t)) \leq \\ & - \frac{1}{\varphi(t)} s^T(t) s(t) - k s^T(t) \operatorname{sgn} s(t) + \\ & s^T(t) \hat{H} W - s^T(t) \hat{H} \ddot{q}_0 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\varphi(t)} s^T(t) s(t) - (k - \sqrt{N}(\sigma + \varepsilon) \|\hat{H}\|) \|s(t)\| \leq \\ & - \frac{1}{\varphi(t)} s^T(t) s(t). \end{aligned} \quad (18)$$

1) 当 $t \in [t_0, t_0 + T_1)$ 时, 根据函数 $\varphi(t)$ 的定义, 式(18)可以写为

$$\dot{V}_1(t) = - \frac{2}{\varphi(t)} V_1(t) = 2\varrho_1 \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} V_1(t), \quad (19)$$

式(19)两边同时乘以 $\varphi^{-2\varrho_1}(t)$ 可得

$$\varphi^{-2\varrho_1}(t) \dot{V}_1(t) \leq 2\varrho_1 \varphi^{-2\varrho_1-1}(t) \dot{\varphi}(t) V_1(t). \quad (20)$$

对 $\varphi^{-2\varrho_1}(t) V_1(t)$ 求导, 并结合式(20)可知

$$\begin{aligned} \frac{d(\varphi^{-2\varrho_1}(t) V_1(t))}{dt} = \\ \varphi^{-2\varrho_1}(t) \dot{V}_1(t) - 2\varrho_1 \varphi^{-2\varrho_1-1}(t) \dot{\varphi}(t) V_1(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

因此, 函数 $\varphi^{-2\varrho_1}(t) V_1(t)$ 在 $[t_0, t_0 + T_1)$ 上单调递减, 可得

$$V_1(t) \leq \varphi^{2\varrho_1}(t) \varphi^{-2\varrho_1}(t_0) V_1(t_0), \quad (22)$$

根据函数 $\varphi(t)$ 的定义, 可得 $\lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1)^-} V_1(t) = 0$, 所以 $\lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1)^-} s(t) = 0$.

2) 当 $t \in [t_0 + T_1, t_0 + t_f)$, 考虑到 $V_1(t)$ 在 $t = t_0 + T_1$ 处连续, 则有 $V_1(t_0 + T_1) = \lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1)^-} V_1(t) = 0$.

由式(18)可知, $\dot{V}_1(t) \leq - \frac{1}{\varphi(t)} s^T(t) s(t)$ 在 $t \in [t_0, \infty)$ 上恒成立, 所以当 $t \in [t_0 + T_1, t_0 + t_f)$ 时, $\dot{V}_1(t) \leq 0$ 恒成立. 根据函数单调性原则, 可知 $0 \leq V_1(t) \leq V_1(t_0 + T_1) = 0$, 即 $s(t) = 0$ 在 $t \in [t_0 + T_1, t_0 + t_f)$ 上恒成立.

基于以上分析可知, MELS(1)在 $t = t_0 + T_1$ 时到达滑模面 $s(t) = 0$, 并在 $[t_0 + T_1, t_0 + t_f)$ 内沿着滑模面滑动.

步骤 2 证明 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 在 $t = t_0 + t_f$ 时沿着滑模面(10)收敛到原点, 即系统(1)在 $t = T_f$ 时实现二分一致性.

1) 当 $t \in [t_0 + T_1, t_0 + t_f)$ 时, 由于MELS(1)已经到达滑模面, 即 $s(t) = e_2(t) + \frac{1}{\phi(t)} e_1(t) = 0$, 可知

$$e_2(t) = - \frac{1}{\phi(t)} e_1(t), \quad (23)$$

令 $e(t) = \frac{1}{\phi(t)} e_1(t)$, 构造以下Lyapunov函数:

$$V_2(t) = \frac{1}{2} e^T(t) e(t), \quad (24)$$

结合式(23), 对 $V_2(t)$ 求导得

$$\dot{V}_2(t) = e^T(t) \dot{e}(t) =$$

$$e^T(t) \left(\frac{1}{\phi(t)} e_2(t) + \frac{1}{\rho \phi^2(t)} e_1(t) \right) = -\frac{\rho-1}{\rho \phi(t)} e^T(t) e(t). \quad (25)$$

与式(19)–(22)过程相似, 可以进一步得到

$$V_2(t) \leq \phi^{2(\rho-1)}(t) \phi^{-2(\rho-1)}(t_0 + T_1) V_2(t_0 + T_1). \quad (26)$$

因为 $\lim_{t \rightarrow (t_0 + t_f)^-} \phi^{2(\rho-1)}(t) = 0$, 所以 $\lim_{t \rightarrow (t_0 + t_f)^-} V_2(t) = 0$. 根据 $e(t)$ 的定义与式(23), 可以得到

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow (t_0 + t_f)^-} e_1(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow (t_0 + t_f)^-} e_2(t) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

2) 当 $t \in [t_0 + t_f, \infty)$ 时, 因为 $e_1(t)$ 在 $t = t_0 + t_f$ 时刻是连续的, 所以有

$$e_1(T_f) = \lim_{t \rightarrow T_f^+} e_1(t) = \lim_{t \rightarrow T_f^-} e_1(t) = 0, \quad (28)$$

同理可知 $e_2(T_f) = \lim_{t \rightarrow T_f^+} e_2(t) = 0$. 通过观察 $s(t)$ 的定义, 有 $s(T_f) = \lim_{t \rightarrow T_f^+} s(t) = 0$. 再结合步骤 1 的结论: $\lim_{t \rightarrow T_f^-} s(t) = 0$, 可得 $s(t)$ 在 $t = t_0 + t_f$ 时刻连续. 与步骤 1 证明相似, 根据式(18)可知 $0 \leq V_1(t) \leq V_1(T_f) = 0$, 即当 $t \geq T_f$ 时, $s(t) \equiv 0$.

接下来要证明当 $t > T_f$ 时, $e_1(t) \equiv 0$, $e_2(t) \equiv 0$. 为此, 构造以下 Lyapunov 函数:

$$V_3(t) = \frac{1}{2} e_1^T(t) e_1(t), \quad (29)$$

当 $t \in [T_f, \infty)$, $\phi(t) = 1$. 由 $s(t) = e_2(t) + e_1(t) = 0$, 可知 $e_2(t) = -e_1(t)$. 对 $V_3(t)$ 求导得

$$\dot{V}_3(t) = e_1^T(t) e_2(t) = -e_1^T(t) e_1(t) \leq 0, \quad (30)$$

因为 $V_3(t)$ 在 $[T_f, \infty)$ 单调递减, 所以 $0 \leq V_3(t) \leq V_3(T_f) = 0$, 即当 $t \geq T_f$ 时, $e_1(t) = 0$ 恒成立. 又因为 $e_2(t) = -e_1(t)$, 故当 $t \geq T_f$ 时, $e_2(t) = 0$ 恒成立.

由式(7)可知, $e_1(t) = 0$ 等价于 $\hat{H}(q - q_0) = 0$. 又因为 $\hat{H}$ 是非奇异的, 所以 $\hat{H}(q - q_0) = 0$ 等价于 $q - q_0 = 0$. 同理可得, $e_2(t) = 0$ 等价于 $\dot{q} - \dot{q}_0 = 0$.

基于以上分析可知, 当 $t \in [T_f, \infty)$ 时, $q - q_0 \equiv 0$, $\dot{q} - \dot{q}_0 \equiv 0$. 因此, MELS(1)在预设时间 T_f 时实现了二分一致性.

步骤 3 证明当 $t \in [t_0, \infty)$, $u_i(t)$ 恒有界.

由式(9)–(10)(13)可知

$$\|u(t)\| \leq \|\hat{H}^{-1}\| \left(\frac{1}{\phi(t)} \|s(t)\| + \frac{1}{\varphi(t)} \|s(t)\| + \sqrt{N}k \right). \quad (31)$$

1) 当 $t \in [t_0, t_0 + T_1)$ 时, 将式(22)代入式(31)得

$$\|u(t)\| \leq \|\hat{H}^{-1}\| \left(\frac{\rho}{t_f - T_1} \sqrt{2\varphi^{2\rho_1}(t) \varphi^{-2\rho_1}(t_0) V_1(t_0) + \sqrt{N}k} + \sqrt{2\varphi^{2(\rho_1-1)}(t) \varphi^{-2\rho_1}(t_0) V_1(t_0) + \sqrt{N}k} \right), \quad (32)$$

考虑到 $\rho_1 > 1$, 易知 $\|u(t)\|$ 有界.

2) 当 $t \in [t_0 + T_1, t_0 + t_f)$ 时, 根据函数的定义, 有 $\frac{1}{\varphi(t)} = \frac{\rho_2}{\rho \phi(t)}$. 式(18)可以进一步写成

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq -\frac{\rho_2}{\rho \phi(t)} s^T(t) s(t) = \\ &= -\frac{2\rho_2}{\rho \phi(t)} V_1(t) = 2\rho_2 \frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)} V_1(t). \end{aligned} \quad (33)$$

与步骤 1 证明相似, 有

$$V_1(t) \leq \phi^{2\rho_2}(t) \phi^{-2\rho_2}(t_0 + T_1) V_1(t_0 + T_1), \quad (34)$$

然后, 将式(34)代入式(31)得

$$\|u(t)\| \leq \|\hat{H}^{-1}\| \left((1 + \frac{\rho_2}{\rho}) \eta(t) + \sqrt{N}k \right), \quad (35)$$

其中 $\eta(t) = \sqrt{2\phi^{2(\rho_2-1)}(t) \phi^{-2\rho_2}(t_0 + T_1) V_1(t_0 + T_1)}$. 因此, 当 $\rho_2 > 1$, $\|u(t)\|$ 有界.

3) 当 $t \in [t_0 + t_f, \infty)$ 时, $s(t) \equiv 0$. 由式(31)可知 $\|u(t)\|$ 在 $[t_0 + t_f, \infty)$ 上恒有界.

综上所述, $u(t)$ 在整个时间区间 $[t_0, \infty)$ 上恒有界. 证毕.

注 2 由定理 1 可知, 系统(1)实现二分一致性的时间为 T_f , 与系统到达滑模面的时间 $t_0 + T_1$ 无关. 无论系统到达滑模面的时间如何设置, 只要满足 $t_0 + T_1 < t_0 + t_f$, 则系统实现二分一致性的时间始终为 T_f . 此时, 系统在滑模面上的滑动时间可以通过 $t_f - T_1$ 来获得. 另一方面, 本文强调使用滑模控制方法, 其奇异性问题在众多文献中已经得到解决^[21], 故而省去不再赘述.

注 3 控制器 $u_i(t)$ 在 $t = t_0 + T_1$ 时刻和 $t = t_0 + t_f$ 时刻的有界性分析相当重要. 当时间趋近于 $t_0 + T_1$ 时, $1/\varphi(t)$ 趋近于无穷; 当时间趋近于 $t_0 + t_f$ 时, $1/\phi(t)$ 和 $1/\varphi(t)$ 均趋近于无穷. 但是, 从式(32)与式(35)可以看出, 只要 ρ_1, ρ_2 均大于 1, 就可以确保 $u_i(t)$ 在整个时间区间上的有界性.

注 4 文献[23]研究了具有动态领导者的 MELS 预设时间二分一致性问题, 但是其要求领导者的动力学方程是线性函数. 而本文则没有这种限制, 领导者动力学方程可以是非线性的, 而且本文进一步考虑了外部干扰对系统的影响. 另一方面, 文献[23]采用的方法只可以设置实现收敛的时间上界, 无法获得精确的收敛时间. 然而, 本文采用的时变函数控制策略能够精确设置 MELS 一致性时间, 使系统在该时刻实现二分一致性, 这在本文的仿真中也已得到验证. 此外, 文献[23]考虑的拓扑是无向符号图, 本文在有向符号图下获得

了MELS预设时间二分一致性.

4 数值仿真

本节将给出一个二自由度机械臂系统的数值仿真例子来验证定理1的正确性. 这里考虑由5个机械臂系统组成的MELS, 第 $i, i = 1, 2, \dots, 5$ 个节点的动力学方程如下:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i + \delta_i, \quad (36)$$

其中:

$$M_i(q_i) = \begin{bmatrix} \rho_{i1} + \rho_{i2} + 2\rho_{i3}\cos q_{i2} & \rho_{i2} + \rho_{i3}\cos q_{i2} \\ \rho_{i2} + \rho_{i3}\cos q_{i2} & \rho_{i2} \end{bmatrix},$$

$$C_i(q_i, \dot{q}_i) = \begin{bmatrix} -\rho_{i3}(\sin q_{i2})\dot{q}_{i2} & -\rho_{i3}(\sin q_{i2})(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2}) \\ \rho_{i3}(\sin q_{i2})\dot{q}_{i1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$g_i(q_i) = \begin{bmatrix} \rho_{i4}g\cos\theta_{i1} + \rho_{i5}g\cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \\ \rho_{i5}g\cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \end{bmatrix},$$

$$\delta_i = (-0.01\cos t \quad -0.01\sin t)^T,$$

其中 $g = 9.8$, 记 $\Theta_i = [\rho_{i1} \ \rho_{i2} \ \rho_{i3} \ \rho_{i4} \ \rho_{i5}]^T$, 有 $\Theta_1 = [0.6 \ 1.1 \ 0.1 \ 0.6 \ 0.3]^T$, $\Theta_2 = [0.8 \ 1.2 \ 0.1 \ 0.9 \ 0.5]^T$, $\Theta_3 = [0.9 \ 1.3 \ 0.2 \ 1.3 \ 0.6]^T$, $\Theta_4 = [1.1 \ 1.4 \ 0.3 \ 1.7 \ 0.7]^T$, $\Theta_5 = [1.0 \ 1.2 \ 0.4 \ 1.6 \ 0.6]^T$.

图1表示5个跟随者的有向拓扑图 $\mathcal{G}$, 其中集合 $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 可以划分为两个子集 $\mathcal{V}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{V}_2 = \{3, 4, 5\}$. 显然, 有向图 $\mathcal{G}$ 是结构平衡的. 根据引理1, 可以求得 $D = \text{diag}\{1, 1, -1, -1, -1\}$. 将领导者与跟随者之间的信息交互矩阵设置为 $B = \text{diag}\{0.6, 0, 0.6, 0.6, 0\}$, 则网络拓扑满足假设2. 然后, 将领导者的动力学方程设置为 $q_0(t) = [-0.1\cos t \quad -0.1\cos t]^T$. 领导者与跟随者的初始状态从 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 中随机选取.

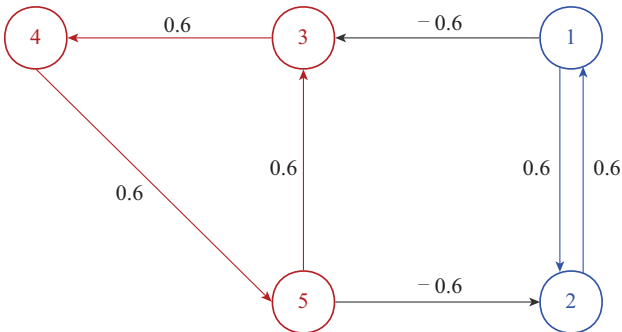


图1 5个跟随者之间的网络拓扑

Fig. 1 Network topology of five followers

对于控制器(12), 分别取 $t_0 = 0, k = 1.8, \rho = 1.11, \rho_1 = 1.12, \rho_2 = 1.13$, 设置系统(36)到达滑模面的时间为 $t_0 + T_1 = 2$, 系统实现二分一致性的时间为 $T_f = 4$. 不难验证它们的取值满足定理1的条件, 由定

理1可知MELS(36)将在 $t = 4$ 时实现二分一致性. 图2-3分别给出了5个跟随者的位置 q_i 与速度 $\dot{q}_i$, 领导者的位置 q_0 与速度 $\dot{q}_0$ (由虚线表示)随时间演化的过程, 而图4-5则分别给出了二分追踪误差 $q_i - d_i q_0$ 和 $\dot{q}_i - d_i \dot{q}_0$ 随时间演化的过程.

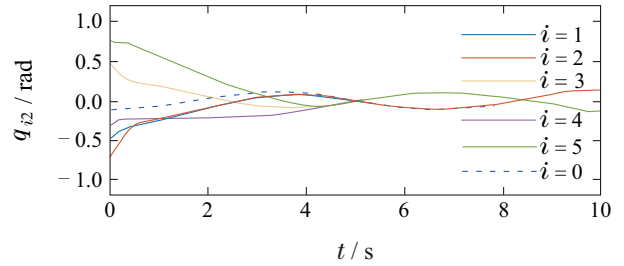
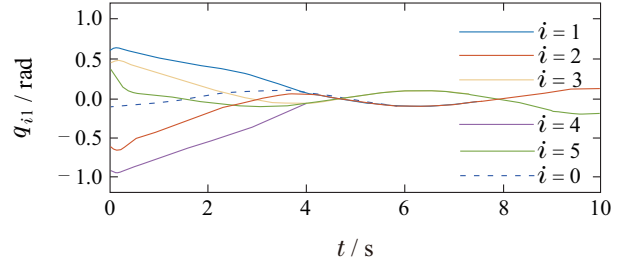


图2 MELS(36)中 q_i 的演化过程

Fig. 2 Evolution of q_i in MELS (36)

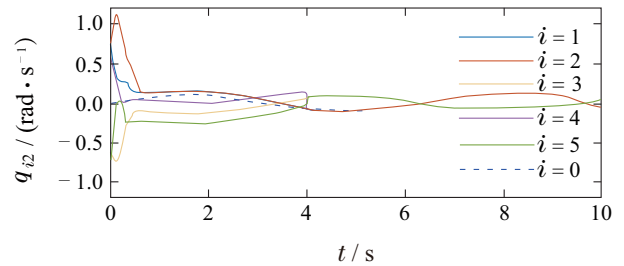
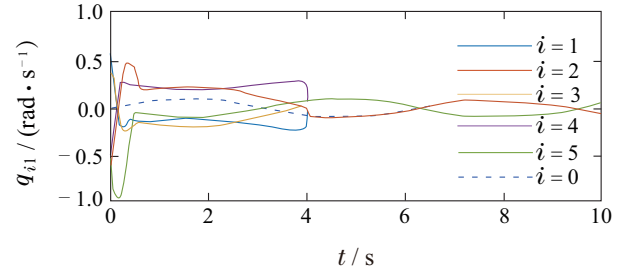


图3 MELS(36)中 $\dot{q}_i$ 的演化过程

Fig. 2 Evolution of $\dot{q}_i$ in MELS (36)

由图2和图3可以看出, MELS(36)在 $t = 4$ 时实现了二分一致性. 子集 $\mathcal{V}_1$ 中的2个节点的位置和速度状态在 $t = 4$ 时与领导者趋近一致, 而子集 $\mathcal{V}_2$ 中的3个节点的位置和速度在 $t = 4$ 时与领导者的位置和速度的模相同, 但是符号相反, 验证了定理1的结论.

由图4和图5可以看出, 5个跟随者的二分追踪误差在预设时间 $t = 4$ 时收敛到零, 与理论分析的实现二分一致性的时间相同. 然而文献[23]的预设时间控制算

法仅能预设实现二分一致性收敛时间的上界, 这与本文的算法有着本质的不同. 因此, 本文提出的预设时间二分一致性算法可以应用于对驻留时间要求精确的复杂任务.

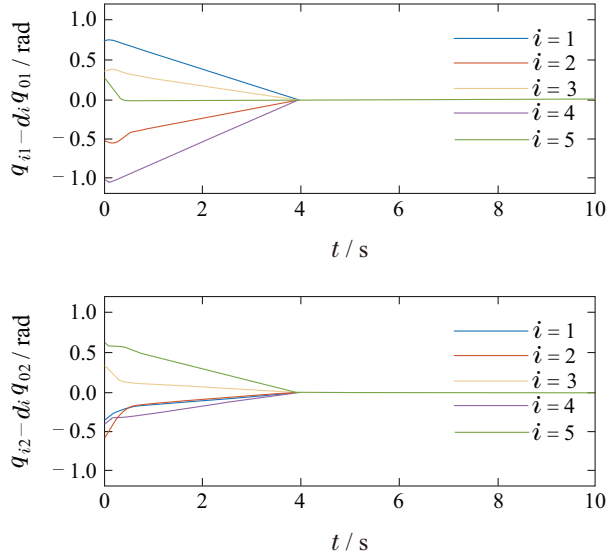


图 4 二分追踪误差 $q_i - d_i q_0$ 的演化过程

Fig. 4 Evolution of bipartite tracking errors $q_i - d_i q_0$

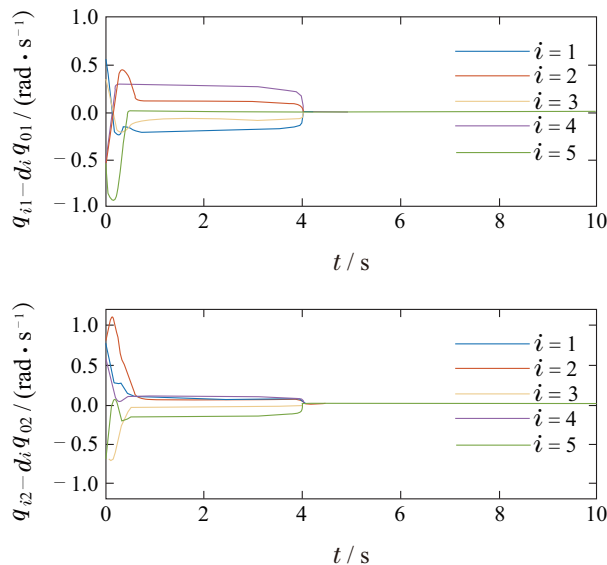


图 5 二分追踪误差 $\dot{q}_i - d_i \dot{q}_0$ 的演化过程

Fig. 5 Evolution of bipartite tracking errors $\dot{q}_i - d_i \dot{q}_0$

5 结论

本文提出了一种基于终端滑模方法的MELS预设时间二分一致性控制算法. 针对结构平衡图下具有动态领导者的MELS, 设计预设时间终端滑模和分布式预设时间控制器保证系统实现预设时间二分一致性目标. 最后, 通过仿真实验验证了本文理论结果的有效性. 在未来的工作中, 笔者将进一步研究在有向图拓扑结构下, 切换系统的预设时间二分一致性问题.

参考文献:

- [1] LIU Yuan, WANG Shicheng, MIN Haibo, et al. Decentralized finite-time leaderless consensus algorithm for networked Euler-Lagrange systems. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(1): 93 – 99. (刘源, 王仕成, 闵海波, 等. 无领航者的多Euler-Lagrange系统有限时间一致性算法. *控制理论与应用*, 2014, 31(1): 93 – 99.)
- [2] YANG Liang, CHEN Yong, LIU Zhi. Adaptive trajectory tracking control for manipulator with uncertain dynamics and kinematics. *Control & Decision*, 2019, 34(11): 2485 – 2490. (杨亮, 陈勇, 刘治. 基于参数不确定机械臂系统的自适应轨迹跟踪控制. *控制与决策*, 2019, 34(11): 2485 – 2490.)
- [3] CAI H, HUANG J. The leader-following consensus for multiple uncertain Euler-Lagrange systems with an adaptive distributed observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 61(10): 3152 – 3157.
- [4] ZHANG W, TANG Y, HUANG T, et al. Consensus of networked Euler-Lagrange systems under time-varying sampled-data control. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2017, 14(2): 535 – 544.
- [5] ABDESSAMEUD A. Consensus of nonidentical Euler-Lagrange systems under switching directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(5): 2108 – 2114.
- [6] WASSERMAN S, FAUST K. *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [7] ALTAFINI C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 58(4): 935 – 946.
- [8] WANG H, YU W, WEN G, et al. Finite-time bipartite consensus for multi-agent systems on directed signed networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2018, 65(12): 4336 – 4348.
- [9] LU J, WANG Y, SHI X, et al. Finite-time bipartite consensus for multi-agent systems under detail-balanced antagonistic interactions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 51(6): 3867 – 3875.
- [10] WANG L, XIAO F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950 – 955.
- [11] LIU X, LAM J, YU W, et al. Finite-time consensus of multiagent systems with a switching protocol. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 27(4): 853 – 862.
- [12] HE W, XU C, HAN Q, et al. Finite-time $\mathcal{L}_2$ leader-follower consensus of networked Euler-Lagrange systems with external disturbances. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 48(11): 1920 – 1928.
- [13] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 57(8): 2106 – 2110.
- [14] LIU X, CAO J, XIE C. Finite-time and fixed-time bipartite consensus of multi-agent systems under a unified discontinuous control protocol. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(2): 734 – 751.
- [15] LI P, SONG Z, WANG Z, et al. Fixed-time consensus for disturbed multiple Euler-Lagrange systems with connectivity preservation and quantized input. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, 380: 125303.
- [16] WANG L, LIU X, CAO J, et al. Fixed-time containment control for nonlinear multi-agent systems with external disturbances. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 69(2): 459 – 463.
- [17] NI J, LIU L, TANG Y, et al. Predefined-time consensus tracking of second-order multiagent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 51(4): 2550 – 2560.

- [18] NING B, HAN Q L, ZUO Z. Bipartite consensus tracking for second-order multiagent systems: A time-varying function-based preset-time approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 66(6): 2739 – 2745.
- [19] REN Y, ZHOU W, LI Z, et al. Prescribed-time consensus tracking of multiagent systems with nonlinear dynamics satisfying time-varying lipschitz growth rates. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, DOI: 10.1109/TCYB.2021.3109294.
- [20] CHEN G, YUE Y, SONG Y. Finite-time cooperative-tracking control for networked Euler-Lagrange systems. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7(11): 1487 – 1497.
- [21] JIN Zhiquan, NIU Yugang, ZOU Yuanyuan. Consensus for multi-agent systems with sliding-mode observer. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(2): 251 – 259.
(金治群, 牛玉刚, 邹媛媛. 带有滑模观测器的多智能体一致性控制. 控制理论与应用, 2017, 34(2): 251 – 259.)
- [22] XU T, DUAN Z, SUN Z, et al. Distributed fixed-time coordination control for networked multiple Euler-Lagrange systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 52(6): 4611 – 4622.
- [23] TAO M, LIU X, SHAO S, et al. Predefined-time bipartite consensus of networked Euler-Lagrange systems via sliding-mode control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, 69(12): 4989 – 4993.

作者简介:

陶 梦 硕士研究生, 目前研究方向为多智能体系统协调控制, E-mail: 2020200466@jsnu.edu.cn;

刘小洋 教授, 目前研究方向为耦合神经网络及多智能体系统协调控制, E-mail: xyliu@jsnu.edu.cn;

曹进德 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂网络与复杂系统、神经动力学与优化、多智能体系统, E-mail: jdcao@seu.edu.cn;

邵 劭 博士研究生, 目前研究方向为复杂网络理论与应用, E-mail: 2110334@stu.neu.edu.cn.