第 40 卷第 11 期
2023 年 11 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 40 No. 11
Nov. 2023

基于新型固定时间稳定方法的一类二阶非线性系统镇定控制

邹 权†, 佟明昊, 魏 凯

(南京理工大学 机械工程学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 本文研究了受未知外部扰动侵袭的一类二阶非线性系统的固定时间镇定控制问题. 首先, 提出了一种新的固定时间稳定方法, 并给出了收敛时间及其上界估计值的计算公式. 理论分析表明, 收敛时间的上界与系统初始状态无关, 可由系统参数完全确定. 然后, 基于所提出的固定时间稳定方法设计了新型滑模趋近律和终端滑模面, 使得系统状态能够在有界的有限时间内, 从任意初始状态收敛至滑模面并沿着滑模面收敛至原点, 同时引入了基于系统状态的自适应切换方法, 有效避免了终端滑模面导致的奇异问题. 最后, 通过仿真验证了算法的有效性.

关键词: 非线性系统; 未知外部扰动; 固定时间稳定; 镇定控制

引用格式: 邹权, 佟明昊, 魏凯. 基于新型固定时间稳定方法的一类二阶非线性系统镇定控制. 控制理论与应用, 2023, 40(11): 1981 – 1989

DOI: 10.7641/CTA.2023.20425

Stabilization control for a class of second order nonlinear system using a new fixed-time stable method

ZOU Quan†, TONG Ming-hao, WEI Kai

(School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: The fixed-time stabilization control for a class of second order nonlinear system subjected to unknown external disturbance is studied in this paper. First, a new fixed-time stabilization method is proposed, and the calculation of the convergence time and its upper bound estimation are given in details. Theoretical analysis shows that the upper bound of the convergence time can be totally determined by the system parameters independently on initial system states. Then, based on the proposed fixed-time stabilization method, a novel sliding mode reaching law and a novel terminal sliding mode surface are designed to make the system states first reaching to the sliding mode surface from any initial conditions and then converging to the original point along with the sliding mode surface in bounded finite-time, thus, the boundedness of the convergence time of the system states from anywhere to the original point is guaranteed. Meanwhile, the system state based auto switching method is employed to avoid the singular problem that caused by the terminal sliding mode surface. Finally, simulations are carried out to verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: nonlinear system; unknown external disturbance; fixed-time stable; stabilization control

Citation: ZOU Quan, TONG Minghao, WEI Kai. Stabilization control for a class of second order nonlinear system using a new fixed-time stable method. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(11): 1981 – 1989

1 引言

稳定性是控制系统最重要的性能指标之一, 也是工程师们设计控制器时关注的重点. 目前, 大部分已有的控制方法只能得到渐近稳定或指数稳定的结果, 即只有时间趋于无穷时, 系统状态才能收敛至平衡点. 然而, 在诸多实际工程中, 工程师们希望能够尽快实现控制目标, 因此, 基于有限时间稳定理论的控制方法应运而生[1–2]. 与渐近稳定或指数稳定相比, 有限时间稳定具有更快的收敛速度和更好的鲁棒性[2–3], 因此, 在混沌系统[4]、多智能体[5]、液压伺服系统[6]、永磁同步电机[7]和机器人[8]等诸多领域获得了广泛地应用.

目前, 常用的有限时间控制方法主要有齐次性法、加幂积分法和滑模控制方法[1–2]. 其中滑模控制方法具有结构简单、鲁棒性强和控制精度高等特点, 在工程上获得了广泛地应用[6,9]. 限制滑模控制在工程

收稿日期: 2022−05−23; 录用日期: 2023−04−24.
†通信作者. E-mail: zouquan101@163.com; Tel.: +86 25-84315411.
本文责任编委: 李世华.
江苏省自然科学基金项目(BK20210347)资助.
Supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China (BK20210347).

上应用的主要是"抖振"问题. 目前常用的滑模"抖振"抑制方法主要有边界层法、高阶滑模法、智能控制法、趋近律法等[10–11]. 趋近律法由文献[12]首次提出, 包括等速趋近律、指数趋近律和幂次趋近律. 幂次趋近律通过引入滑模函数的幂次函数而完全消除了切换控制项导致的不连续性, 因而可有效消除滑模"抖振", 近年来获得了国内外学者的广泛关注. 然而, 由于分数阶幂次函数的存在, 滑模函数在滑模面附近的收敛速度较慢. 为了提高幂次趋近律在滑模面附近的收敛速度, 文献[13]在指数趋近律[14]的基础上提出了一种改进的指数趋近律, 其主要特点在于采用滑模函数的指数函数在线调整幂次趋近律的增益, 因而该方法也可称为变增益幂次趋近律. 为了改善滑模趋近律的控制性能, 文献[15]同样采用滑模函数的指数函数在线调整趋近律增益, 而文献[16]采用系统状态的指数函数在线调整趋近律增益. 然而上述方法中均存在切换控制项, 因此无法有效抑制滑模"抖振".

一般来说, 有限时间稳定系统的收敛时间与系统的初始状态有关, 并且系统初始状态离平衡点越远, 收敛时间越长, 反之亦然[2]. 固定时间稳定[17]是在有限时间稳定理论的基础上发展出来的一种新型稳定性方法, 其特点在于系统不仅是全局有限时间稳定的, 而且收敛时间的上界与系统的初始状态无关, 即系统状态不仅能够在有限时间内从任意的初始状态收敛至平衡点, 而且收敛时间的上界与系统初始状态无关, 可完全由控制参数预先设定. 因此, 与有限时间稳定性相比, 固定时间稳定性具有更好的收敛性能. 目前, 常用的固定时间稳定判定方法主要有以下几种[2].

方法 1[17] 如果存在一个函数 $V(x)$, 满足 $\dot V(x)\leqslant-(\alpha V^p(x)+\beta V^q(x))^k$, 其中: α,β,p,q 和 k 均为正数且 $pk<1,\ qk>1$, 则系统的原点是固定时间稳定的且收敛时间的上界为 $T_{\max}=\dfrac{1}{\alpha^k(1-pk)}+\dfrac{1}{\beta^k(qk-1)}$.

方法 2[18] 如果存在一个函数 $V(x)$, 满足 $\dot V(x)\leqslant-\alpha V^p(x)-\beta V^q(x)$, 其中: $\alpha>0,\ \beta>0,\ p=1-\dfrac{1}{2\gamma},\ q=1+\dfrac{1}{2\gamma},\ \gamma>1$, 则系统的原点是固定时间稳定的且收敛时间的上界为 $T_{\max}=\dfrac{\pi\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}}$.

方法 3[19] 如果存在一个函数 $V(x)$, 满足 $\dot V(x)\leqslant-\alpha V^{2-\frac{p}{q}}(x)-\beta V^{\frac{p}{q}}(x)$, 其中: $\alpha>0,\beta>0,$ $q>p>0$, p和q均为奇整数, 则系统原点是固定时间稳定的, 且收敛时间的上界为 $T_{\max}=\dfrac{q\pi}{2(q-p)\sqrt{\alpha\beta}}$.

方法 4[20] 如果存在一个函数 $V(x)$, 满足 $\dot V(x)\leqslant-\alpha V^{\frac{m}{n}}(x)-\beta V^{\frac{p}{q}}(x)$, 其中: $\alpha>0,\beta>0,$ $q>p>0,m>n>0$, 且m,n,p和q均为奇整数, 则系统的原点是固定时间稳定的且收敛时间的上界为 $T_{\max}=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{n}{m-n}+\dfrac{1}{\beta}\dfrac{q}{q-p}$.

目前, 固定时间控制的相关研究大多基于上述方法[21–27]. 基于方法1, 文献[21]研究了一类时变系统的固定时间参数辨识问题, 文献[22]设计了某潜射导弹的自适应固定时间终端滑模控制器. 基于方法2, 文献[23]设计了永磁同步电机调速系统的固定时间滑模控制器, 文献[24]设了一类二阶非线性系统的非奇异终端滑模控制器. 文献[25]采用与方法3类似的形式设计了基于固定时间滑模趋近律的永磁同步电机调速控制器, 但是收敛时间及其上界估计值的计算方法均与方法3不同, 可认为是方法3的扩展. 基于方法4, 文献[26]设计了某能量储存系统的快速非奇异终端滑模控制器, 文献[27]研究了一类二阶非线性系统的固定时间终端滑模控制方法. 类似的研究结果还可参见文献[28–30]以及其中的有关参考文献. 值得注意的是, 上述4种固定时间稳定判定方法具有类似的形式, 由于参数的取值不同而得到了不同的结果, 特别是文献[25]给出了收敛时间上界估计值的另外一种形式. 除了上述方法外, 基于双极限齐次性也可获得固定时间稳定的结果[31], 但是无法明确的给出收敛时间的上界, 因此限制了其应用.

受滑模趋近律和上述方法的启发, 本文提出了一种与上述方法均不相同的固定时间稳定新方法, 并给出了收敛时间及其上界估计值的计算公式 (详见第3.1节). 该方法的主要特点在于利用双曲正切函数的限幅特性, 在保证系统稳定性条件的同时提高了收敛速度, 进而获得了固定时间稳定的结果. 基于所提出的新型固定时间稳定方法, 本文设计了滑模趋近律和终端滑模面, 并引入了基于系统状态的自适应切换方法有效避免了终端滑模面引起的奇异问题, 实现了一类受未知外部扰动侵袭的二阶非线性系统的固定时间镇定控制, 并通过仿真验证了算法的有效性.

2 问题描述和预备知识

2.1 问题描述

考虑如下的受未知外部扰动侵袭的一类二阶非线性系统:

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2,\\ \dot x_2=f(x)+u+d(t,x,u),\\ y=x_1,\end{cases}\tag{1}$$

式中: $x=[x_1\ \ x_2]\in\mathbb{R}^2$为系统状态向量; $u\in\mathbb{R}$为控制输入; $y\in\mathbb{R}$为系统输出; $f(x)$为系统的非线性动力学特性, 且$f(x)=0$, $d(t,x,u)$为未知的外部扰动, 包含系统未建模动态及模型不确定性. 不失一般性, 有以下假设.

假设 1 未知的外部扰动$d(t,x,u)$有界, 即存在

未知的常数$\delta > 0$满足

$$|d(t,x,u)| \leqslant \delta. \tag{2}$$

本文的目标是, 为非线性系统(1)设计一个终端滑模控制器, 使系统状态能够在有界的有限时间内从任意的初始状态收敛至平衡点, 并且收敛时间的上界可由控制器参数预先设定.

2.2 预备知识

考虑如下的动态系统:

$$\dot{x} = f(x),\ x(0) = x_0, \tag{3}$$

其中: $x = [x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$是系统状态; $f(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是实数域内开区间$U$上关于$x$的连续函数, 且开区间$U$包含原点, $f(0) = 0$. 假设原点是系统的一个平衡点.

定义 1[18] 若对于任意的初始状态$x_0 \in U_0 \subset \mathbb{R}^n$, 存在一个连续函数$T(x): U_0\backslash\{0\} \to (0, +\infty)$, 使得系统(3)的解满足

1) 当$t \in [0, T(x_0)]$时, $x(t, x_0) \in U_0\backslash\{0\}$且$\lim\limits_{x\to T(x_0)} x(t, x_0) = 0$;

2) 当$t > T(x_0)$时, $x(t, x_0) \equiv 0$, 则称系统(3)的原点是有限时间稳定的(finite-time stable). 若$U_0 = \mathbb{R}^n$则称系统(3)的原点是全局有限时间稳定的(global finite-time stable). 若系统(3)的原点是全局有限时间稳定的且收敛时间$T(x_0)$有界, 即存在有界的常数$T_{\max} > 0$, 使得对于$\forall x_0 \in U_0 \subset \mathbb{R}^n$, 收敛时间$T(x_0)$满足$T(x_0) \leqslant T_{\max}$, 则称系统(3)的原点是固定时间稳定的(fixed-time stable).

引理 1[21] 对于系统(3), 如果存在一个正定连续可微函数$V(x)$和两个实数$c > 0$, $0 < \gamma < 1$, 使得对于任意的$x \neq 0$满足

$$\dot{V}(x) + cV^{\gamma}(x) \leqslant 0, \tag{4}$$

则系统的原点是有限时间稳定的且收敛时间$T(x_0)$满足

$$T(x_0) \leqslant \frac{V^{1-\gamma}(x_0)}{c(1-\gamma)}. \tag{5}$$

3 主要结论

3.1 新型固定时间稳定方法

定理 1 对于系统(3), 如果存在一个径向无界的正定连续可微函数$V(x)$, 使得对于任意的$x \neq 0$满足

$$\dot{V}(x) \leqslant -\frac{k}{1-\tanh^2(\alpha V^{1-\lambda}(x))} V^{\lambda}(x), \tag{6}$$

式中: $k > 0$, $\alpha > 0$, $\lambda = \dfrac{p}{q}$, p和q均为正的奇整数且$q > p$, 则系统(3)的原点是固定时间稳定的, 且收敛时间$T(x_0)$的上界$T_{\max}$可由参数k, α, λ预先设定, 即

$$T(x_0) < T_{\max} = \frac{1}{k\alpha(1-\lambda)}. \tag{7}$$

证 首先证明系统的原点是全局有限时间稳定的. 由于$V(x)$是关于x的正定函数, 故对于任意的x, 即任意的x, 有$V(x) > 0$. 因此有

$$0 < 1 - \tanh^2(\alpha V^{1-\lambda}) < 1, \tag{8}$$

由式(6)–(8)可得

$$\dot{V}(x) \leqslant -\frac{k}{1-\tanh^2(\alpha V^{1-\lambda})} V^{\lambda} < -kV^{\lambda}, \tag{9}$$

由于p和q均为正的奇整数且$q > p$, 故有$0 < \lambda = \dfrac{p}{q} < 1$. 注意到$V(x)$是径向无界函数, 因此, 由引理1可知, 系统(3)的原点是全局有限时间稳定的.

接下来计算收敛时间. 式(6)可重写为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(1-\tanh^2(\alpha V^{1-\gamma}))V^{-\gamma} \leqslant -k, \tag{10}$$

两边同时乘以$\alpha(1-\lambda)\mathrm{d}t$得

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}V\alpha(1-\lambda)(1-\tanh^2(\alpha V^{1-\gamma}))V^{-\gamma} \leqslant\\ &-k\alpha(1-\lambda)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{11}$$

注意到$T(x_0)$为收敛时间, 故有$x(T(x_0)) = 0$和$V(x(T(x_0))) = 0$. 因此, 式(11)两边同时积分可得

$$\begin{aligned}&\int_{V(x(0))}^{0} \alpha(1-\lambda)(1-\tanh^2(\alpha V^{1-\gamma}))V^{-\gamma}\mathrm{d}V \leqslant\\ &\int_0^{T(x_0)} -k\alpha(1-\lambda)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{12}$$

注意到$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh(x) = 1 - \tanh^2(x)$, 故由式(12)可得

$$\tanh(\alpha V^{1-\lambda})|_{V(x_0)}^{0} \leqslant -k\alpha(1-\lambda)t|_0^{T(x_0)}, \tag{13}$$

因此, 由式(13)可得收敛时间$T(x_0)$为

$$T(x_0) \leqslant \frac{\tanh(\alpha V^{1-\lambda}(x_0))}{k\alpha(1-\gamma)}. \tag{14}$$

由于对任意的初值$V_0 = V(x_0) \in \mathbb{R}$, 有$\tanh(\alpha V_0^{1-\lambda}) < 1$. 因此, 收敛时间$T(x_0)$的上界$T_{\max}$可由式(7)给出. 证毕.

注 1 当$\alpha = 0$时, 式(6)可改写为$\dot{V}(x) \leqslant -kV^{\lambda}$, 此时本文提出的固定时间稳定等价于引理1中的有限时间稳定, 且收敛时间可由下式给出:

$$T'(x_0) = \frac{V_0^{1-\lambda}}{k(1-\lambda)}, \tag{15}$$

由于对于任意的初始状态$x_0 \neq 0$, 有$V_0 > 0$, 因此有$\tanh(\alpha V_0^{1-\lambda}) < \alpha V_0^{1-\lambda}$, 故由式(14)可得

$$\begin{aligned}&T(x_0) \leqslant \frac{\tanh(\alpha V_0^{1-\lambda})}{k\alpha(1-\lambda)} <\\ &\frac{\alpha V_0^{1-\lambda}}{k\alpha(1-\lambda)} = \frac{V_0^{1-\lambda}}{k(1-\lambda)} = T'(x_0),\end{aligned} \tag{16}$$

因此, 由式(16)可知, 对于给定的任意α值以及相同参数k和λ, 本文提出的固定时间稳定比传统的有限时间稳定具有更快的收敛速度, 且收敛时间的上界值与系统初始状态无关.

注 2 由式(6)可以看出, 本文提出的固定时间稳定方法与方法1–4均不相同, 且收敛时间上界的估计值也不相同, 这也是本文的主要贡献之一.

注 3 由式(7)可知, 本文提出的固定时间稳定的收敛时间的上界可由参数k, α和λ调整. 虽然通过选取较大的k, α和较小的λ值可有效减小收敛时间的上界, 但是由于系统带宽的限制, 较大的k, α值或较小的λ值可能会导致稳定性问题. 因此, 在实际应用时应综合考虑考虑收敛速度和系统稳定性选取合适的k, α, λ值.

3.2 固定时间镇定控制器设计

本节将基于上述固定时间稳定方法设计基于滑模趋近律的终端滑模控制器, 实现系统(1)的固定时间镇定控制. 定义如下的终端滑模面:

$$s = x_2 - x_2\tanh^2(\alpha_1 x_1^{1-\lambda_1}) + k_1 x_1^{\lambda_1}, \tag{17}$$

式中: $k_1 > 0, \alpha_1 > 0, \lambda_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$, p_1和q_1均为正的奇数且$p_1 < q_1$.

本文提出的基于滑模趋近律的固定时间终端滑模控制器为

$$\begin{cases} u = \dfrac{u_1 + u_2}{1-\varPsi_1^2} - f(x) - \eta\,\mathrm{sgn}\,s, \\ u_1 = -\dfrac{k_2}{1-\varPsi_2^2}|s|^{\lambda_2}\,\mathrm{sgn}\,s, \\ u_2 = -k_1\lambda_1 x_1^{\lambda_1-1}x_2 + \\ \qquad 2\alpha_1(1-\lambda_1)\varPsi_1(1-\varPsi_1^2)x_2^2 x_1^{-\lambda_1}, \end{cases} \tag{18}$$

式中: $\eta > \delta, k_2 > 0, \alpha_2 > 0, \lambda_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$, p_2和q_2均为正的奇数且$p_2 < q_2$, $\varPsi_1$和$\varPsi_2$分别由下式给出:

$$\varPsi_1 = \tanh(\alpha_1 x_1^{1-\lambda_1}), \tag{19}$$

$$\varPsi_2 = \tanh(\alpha_2 s^{1-\lambda_2}). \tag{20}$$

注 4 控制器(18)中u_1也可写为

$$u_1 = -\frac{k_2}{1-\varPsi_2^2}|s|^{\lambda_2}\,\mathrm{sgn}\,s = -K_2|s|^{\lambda_2}\,\mathrm{sgn}\,s, \tag{21}$$

式中$K_2 = \dfrac{k_2}{1-\varPsi_2^2} > k_2$. 式(21)具有滑模趋近律的典型形式[12], 与文献[13–16]中趋近律类似, 其增益与滑模函数有关, 因此可认为是变增益滑模趋近律. 此外, 由于p_2和q_2均为正的奇数且$\lambda_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$, 故有$|s|^{\lambda_2}\mathrm{sgn}s = s^{\lambda_2}$. 因此, 为了简化下文中的证明过程, u_1也可写为$u_1 = -\dfrac{k_2}{1-\varPsi_2^2}s^{\lambda_2}$.

定理 2 假设系统(1)满足假设1, 如果控制器设计为式(18)且滑模函数由式(17)给出, 则闭环系统是固定时间稳定的, 且对于任意的初始条件$x_0 \in \mathbb{R}^2$, 收敛时间的上界为

$$T(x_0) < \frac{1}{k_1\alpha_1(1-\lambda_1)} + \frac{1}{k_2\alpha_2(1-\lambda_2)}. \tag{22}$$

证 式(17)求导并把式(1)代入得

$$\begin{aligned} \dot{s} =\ & \dot{x}_2(1-\varPsi_1^2) + k_1\lambda_1 x_1^{\lambda_1-1}x_2 - \\ & 2\varPsi_1(1-\varPsi_1^2)\alpha_1(1-\lambda_1)x_1^{-\lambda_1}x_2 = \\ & (f(x)+u+d)(1-\varPsi_1^2) + k_1\lambda_1 x_1^{\lambda_1-1}x_2 - \\ & 2\varPsi_1(1-\varPsi_1^2)\alpha_1(1-\lambda_1)x_1^{-\lambda_1}x_2. \end{aligned} \tag{23}$$

把控制律式(18)代入到式(23)得

$$\begin{aligned} & \dot{s} = \\ & (\frac{u_1+u_2}{1-\varPsi_1^2} - \eta\,\mathrm{sgn}\,s + d)(1-\varPsi_1^2) + \\ & k_1\lambda_1 x_1^{\lambda_1-1}x_2 - 2\varPsi_1(1-\varPsi_1^2)\alpha_1(1-\lambda_1)x_1^{-\lambda_1}x_2 = \\ & u_1 + u_2 - (\eta\,\mathrm{sgn}\,s - d)(1-\varPsi_1^2) + \\ & k_1\lambda_1 x_1^{\lambda_1-1}x_2 - 2\varPsi_1(1-\varPsi_1^2)\alpha_1(1-\lambda_1)x_1^{-\lambda_1}x_2 = \\ & -\frac{k_2}{1-\varPsi_2^2}s^{\lambda_2} - (\eta\,\mathrm{sgn}\,s - d)(1-\varPsi_1^2). \end{aligned} \tag{24}$$

定义如下的李雅普诺夫函数:

$$V_1 = \frac{1}{2}s^2, \tag{25}$$

显然, V_1是滑模函数s的径向无界函数. 注意到$1-\varPsi_1^2 > 0$, 式(25)求导并把式(24)代入可得

$$\begin{aligned} & \dot{V}_1 = s\dot{s} = \\ & -\frac{k_2}{1-\varPsi_2^2}s^{\lambda_2}s - (\eta\,\mathrm{sgn}\,s - d)(1-\varPsi_1^2)s = \\ & -\frac{k_2}{1-\varPsi_2^2}s^{\lambda_2+1} - (\eta|s| - ds)(1-\varPsi_1^2) \leqslant \\ & -\frac{k_2}{1-\varPsi_2^2}s^{\lambda_2+1} - (\eta|s| - \delta|s|)(1-\varPsi_1^2) \leqslant \\ & -\frac{k_2}{1-\varPsi_2^2}s^{\lambda_2+1} = \\ & -\frac{\sqrt{2}k_2}{1-\tanh^2(\sqrt{2}\alpha_2 V_1^{\frac{1-\lambda_2}{2}})}V_1^{\frac{\lambda_2+1}{2}}. \end{aligned} \tag{26}$$

注意到$0 < \lambda_2 = \dfrac{p_2}{q_2} < 1$, 故有$0 < \dfrac{\lambda_2+1}{2} < 1$. 故由定理1知, 李雅普诺夫函数$V_1$将在固定时间内收敛至原点, 且收敛时间的上界可由下式给出:

$$T_1 < \frac{1}{\sqrt{2}k_2\sqrt{2}\alpha_2(1-\dfrac{\lambda_2+1}{2})} = \frac{1}{k_2\alpha_2(1-\lambda_2)}. \tag{27}$$

由式(25)可知, 滑模函数s将随着李雅普诺夫函数V_1在同样的固定时间收敛至滑模面. 当系统状态位于滑模面上时, 由式(17)可知, 系统动态可由下式描述:

$$x_2 - x_2\tanh^2(\alpha_1 x_1^{1-\lambda_1}) + k_1 x_1^{\lambda_1} = 0, \tag{28}$$

故有

$$x_2 = -\frac{k_1}{1-\tanh^2(\alpha_1 x_1^{1-\lambda_1})} x_1^{\lambda_1}. \tag{29}$$

定义如下李雅普诺夫函数:

$$V_2 = \frac{1}{2}x_1^2, \tag{30}$$

显然, V_2是x_1的径向无界函数. 式(30)求导并把式(29)代入得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= x_1\dot{x}_1 = x_1 x_2 = \\ &-\frac{k_1}{1-\tanh^2(\alpha_1 x_1^{1-\lambda_1})} x_1^{\lambda_1+1} = \\ &-\frac{\sqrt{2}k_1}{1-\tanh^2(\sqrt{2}\alpha_1 V_2^{\frac{1-\lambda_1}{2}})} V_2^{\frac{\lambda_1+1}{2}} = \\ &-\frac{\sqrt{2}k_1}{1-\tanh^2(\sqrt{2}\alpha_1 V_2^{1-\frac{\lambda_1+1}{2}})} V_2^{\frac{\lambda_1+1}{2}}.\end{aligned} \tag{31}$$

注意到$0<\lambda_1=\dfrac{p_1}{q_1}<1$, 故有$0<\dfrac{\lambda_1+1}{2}<1$. 故由定理1可知, 李雅普诺夫函数$V_2$将在固定时间内收敛至原点, 且收敛时间的上界可由下式给出:

$$T_2 < \frac{1}{\sqrt{2}k_1\sqrt{2}\alpha_1(1-\dfrac{\lambda_2+1}{2})} = \frac{1}{k_1\alpha_1(1-\lambda_2)}. \tag{32}$$

由式(30)可知, 系统状态x_1也将随着李雅普诺夫函数V_2在同样的固定时间收敛至原点. 类似地, 由式(29)可知, 系统状态x_2也将在同样的固定时间收敛至原点.

综上所述可知, 闭环系统的状态将先在时间T_1内收敛至滑模面$s=0$, 然后沿着滑模面在时间T_2内收敛至原点, 故闭环系统是固定时间稳定的, 且收敛时间的上界可由式(22)估计.　证毕.

由控制器(18)可知, 控制律中包含不连续控制项$\eta \operatorname{sgn} s$, 因此会引起抖振问题. 为了减小抖振, 可将参数η设置为0, 即$\eta=0$. 此时系统(1)是固定时间有界稳定的, 并有以下定理:

定理 3　若定理2中切换项增益$\eta=0$, 其他参数与定理2相同, 则闭环系统状态将在固定时间内收敛至包含原点的有界的范围内, 且收敛范围可由参数k_1, α_1, λ_1和k_2, α_2, λ_2调整.

证　注意到$\eta=0$, 式(24)可重写为

$$\dot{s} = -\frac{k_2}{1-\Psi_2^2}s^{\lambda_2} + d(1-\Psi_1^2). \tag{33}$$

定义如下的李雅普诺夫函数:

$$V_3 = \frac{1}{2}s^2, \tag{34}$$

显然, V_3为径向无界函数. 式(34)求导并把式(33)代入得

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &= s\dot{s} = \\ &-\frac{k_2}{1-\Psi_2^2}s^{\lambda_2}s + d(1-\Psi_1^2)s \leqslant \\ &-\frac{k_2}{1-\Psi_2^2}s^{\lambda_2+1} + \delta|s|(1-\Psi_1^2) \leqslant \\ &-\frac{k_2 - \dfrac{\delta|s|(1-\Psi_1^2)(1-\Psi_2^2)}{s^{\lambda_2+1}}}{1-\Psi_2^2}s^{\lambda_2+1} = \\ &-\frac{\sqrt{2}\mu}{1-\tanh^2(\sqrt{2}\alpha_2 V_3^{\frac{1-\lambda_2}{2}})}V_3^{\frac{\lambda_2+1}{2}},\end{aligned} \tag{35}$$

式中

$$\mu = k_2 - \frac{\delta|s|(1-\Psi_1^2)(1-\Psi_2^2)}{s^{\lambda_2+1}}. \tag{36}$$

由于$\lambda_2=\dfrac{p_2}{q_2}$且$p_2$和$q_2$均为正的奇数, 可知$p_2+q_2$为偶数, 故有$s^{\lambda_2+1}=s^{\frac{p_2+q_2}{q_2}}=|s|^{\lambda_2+1}$. 因此, 式(36)可改写为

$$\mu = k_2 - \frac{\delta(1-\Psi_1^2)(1-\Psi_2^2)}{|s|^{\lambda_2}}. \tag{37}$$

若

$$|s| > (\frac{\delta(1-\Psi_1^2)(1-\Psi_2^2)}{k_2})^{\frac{1}{\lambda_2}}, \tag{38}$$

则有$\mu>0$. 故由定理1可知, 系统的原点是固定时间稳定的. 然而, 随着滑模函数s的减小, 式(38)不再成立, 此时系统的稳定性无法确定. 但是若滑模函数s的值增加使得式(38)再次成立, 则系统将恢复到固定时间稳定状态. 综上所述, 滑模函数s将随着李雅普诺夫函数V_3在固定时间收敛至有界的范围内, 即

$$|s| \leqslant (\frac{\delta(1-\Psi_1^2)(1-\Psi_2^2)}{k_2})^{\frac{1}{\lambda_2}}. \tag{39}$$

值得注意的是, 虽然式(39)两边均包含滑模函数s, 但是由于对于任意的滑模函数s和系统状态x_1, 有

$$0 < 1-\Psi_1^2 = 1-\tanh^2(\alpha_1 x_1^{1-\lambda_1}) \leqslant 1, \tag{40}$$

$$0 < 1-\Psi_2^2 = 1-\tanh^2(\alpha_2 s^{1-\lambda_2}) \leqslant 1, \tag{41}$$

故由式(39)可得

$$|s| \leqslant (\frac{\delta(1-\Psi_1^2)(1-\Psi_2^2)}{k_2})^{\frac{1}{\lambda_2}} \leqslant (\frac{\delta}{k_2})^{\frac{1}{\lambda_2}}, \tag{42}$$

此外, 由$\Psi_2=\tanh(\alpha_2 s^{1-\lambda_2})$可知, 对于任意的$s\neq 0$, 可通过调整参数$\alpha_2$可有效减小$1-\Psi_2^2$的值, 进而减小滑模函数$s$的收敛范围. 同理, 通过调整参数$\alpha_1$也可有效减小滑模函数$s$的收敛范围. 综上所述, 当$\eta=0$时, 滑模函数式(17)将在固定时间收敛至包含原点的有界范围内, 如式(42)所示. 此外, 滑模函数s的收敛范围

可由参数k_2, α_2, λ_2和α_1调整. 假设滑模函数s收敛至由式(42)给出的范围后的实际值为ζ, 即$s=\zeta$, 则

$$|s|=|\zeta|\leqslant \varDelta=(\frac{\delta}{k_2})^{\frac{1}{\lambda_2}}. \tag{43}$$

由式(17)可知, 此时系统动态可由下式给出:

$$x_2-x_2\tanh^2(\alpha_1 x_1^{1-\lambda_1})+k_1 x_1^{\lambda_1}=\zeta, \tag{44}$$

故

$$x_2=-\frac{k_1 x_1^{\lambda_1}-\zeta}{1-\tanh^2(\alpha_1 x_1^{1-\lambda_1})}. \tag{45}$$

定义如下李雅普诺夫函数:

$$V_4=\frac{1}{2}x_1^2, \tag{46}$$

显然, V_4为径向无界函数. 注意到式(43)(46)求导并把式(45)代入得

$$\begin{aligned}\dot V_4=&x_1\dot x_1=x_1x_2=\\&-\frac{k_1x_1^{\lambda_1+1}-\zeta x_1}{1-\tanh^2(\alpha_1x_1^{1-\lambda_1})}\leqslant\\&-\frac{k_1x_1^{\lambda_1+1}-\varDelta|x_1|}{1-\tanh^2(\alpha_1x_1^{1-\lambda_1})}.\end{aligned} \tag{47}$$

由于$\lambda_1=\dfrac{p_1}{q_1}$且$p_1$和$q_1$均为正的奇数, 可知$p_1+q_1$为偶数, 故有$x_1^{\lambda_1+1}=x_1^{\frac{p_1+q_1}{q_1}}=|x_1|^{\lambda_1+1}$. 故由式(47)可得

$$\begin{aligned}\dot V_4\leqslant&-\frac{k_1x_1^{\lambda_1+1}-\varDelta|x_1|}{1-\tanh^2(\alpha_1x_1^{1-\lambda_1})}=\\&-\frac{k_1-\dfrac{\varDelta|x_1|}{|x_1|^{\lambda_1+1}}}{1-\tanh^2(\alpha_1x_1^{1-\lambda_1})}x_1^{\lambda_1+1}=\\&-\frac{k_1-\dfrac{\varDelta}{|x_1|^{\lambda_1}}}{1-\tanh^2(\alpha_1x_1^{1-\lambda_1})}x_1^{\lambda_1+1}.\end{aligned} \tag{48}$$

若

$$|x_1|>|\frac{\varDelta}{k_1}|^{\lambda_1}, \tag{49}$$

则有$k_1-\dfrac{\varDelta}{|x_1|^{\lambda_1}}>0$. 故由定理1可知, 系统的原点是全局固定时间稳定的. 然而随着$|x_1|$减小, 式(49)将不再满足, 故而无法保证系统的稳定性. 但是如果$|x_1|$增大使得式(49)再次满足, 则系统将恢复至固定时间稳定状态. 因此, 系统状态x_1将随着李雅普诺夫函数V_4在固定时间收敛至有界的范围内, 即

$$|x_1|\leqslant|\frac{\varDelta}{k_1}|^{\lambda_1}=|\frac{\delta^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}{k_1^{\lambda_1}k_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}|. \tag{50}$$

由式(28)可知, 系统状态x_2也将在固定时间内收敛至有界的范围内. 由式(40)(42)可知, 滑模函数的收敛范围可由参数α_1和α_2调整, 故系统状态的实际收敛范围也可由参数α_1和α_2调整.

综上所述, 闭环系统状态将在固定时间内收敛至包含原点的有界的范围内, 且收敛范围可由参数k_1, α_1, λ_1和k_2, α_2, λ_2调整. 证毕.

注 5 由式(42)可知, 当参数k_2选择较小值且$\varPsi_1$和$\varPsi_2$的值也较小时, 如$k_2\leqslant\delta, \varPsi_1\approx 0, \varPsi_2\approx 0$, 则滑模函数的收敛范围将有可能大于$\delta$. 为了避免上述问题, 可选取较大的$k_2$取值, 如$k_2>\delta$. 此外值得注意的是, 若选取较大的$\alpha_1$和$\alpha_2$值使得$\varPsi_1\approx 1$且$\varPsi_2\approx 1$, 即使选取较小$k_2$值也可有效避免上述问题. 同样的, 由式(49)可知, 参数k_1也应选取较大的值以获得较小的收敛范围. 综上所述, 当$\eta=0$时, 应选取较大的k_1, k_2, α_1, α_2等参数以获得满意的控制效果.

3.3 奇异性分析

由控制律式(18)可知

$$u_2=-k_1\lambda_1\frac{x_2}{x_1^{1-\lambda_1}}+2\alpha_1(1-\lambda_1)\varPsi_1(1-\varPsi_1^2)\frac{x_2^2}{x_1^{\lambda_1}}, \tag{51}$$

由于$0<\lambda_1<1$, 故当$x_1=0$且$x_2\neq 0$时, 式(51)存在奇异问题. 为了避免奇异问题, 受文献[26]启发, 对式(51)作如下修改:

$$\begin{aligned}u_2=&-k_1\lambda_1x_1^{\frac{\lambda_1+1}{2}+\frac{\lambda_1-1}{2}\mathrm{sgn}(|x_1|-\varOmega)-1}x_2+\\&2\alpha_1(1-\lambda_1)\varPsi_1(1-\varPsi_1^2)x_2^2x_1^{-\frac{\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_1}{2}\mathrm{sgn}(|x_1|-\varOmega)},\end{aligned} \tag{52}$$

式中$\varOmega>0$为待设计的常数. 根据系统状态x_1的不同, 式(52)可重写为

$$u_2=\begin{cases}-k_1\lambda_1x_1^{\lambda_1-1}x_2+\\2\alpha_1(1-\lambda_1)\varPsi_1(1-\varPsi_1^2)x_2^2x_1^{-\lambda_1},\ |x_1|\geqslant\varOmega,\\-k_1\lambda_1x_2+\\2\alpha_1(1-\lambda_1)\varPsi_1(1-\varPsi_1^2)x_2^2,\qquad |x_1|<\varOmega,\end{cases} \tag{53}$$

由式(53)可知, 系统不存在奇异问题.

注 6 注意到当$|x_1|<\varOmega$时, 系统虽然不存在奇异问题, 但闭环系统的固定时间稳定性被破坏. 因此, 应尽量选择较小的$\varOmega$值. 然而, 当$\varOmega$很小时, 无法有效避免奇异问题. 综上所述, 应综合考虑奇异性和收敛性, 选择合适的$\varOmega$值.

4 算例与仿真验证

为了验证算法的有效性, 考虑如下的非线性系统[31]:

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2,\\\dot x_2=x_2^3+u+10\sin(20t).\end{cases}$$

本文算法与文献[20]和文献[31]中算法进行了对比. 文献[20]中的算法为

$$\begin{cases} u = -x_2^3 - \dfrac{7}{10}x_1^{\frac{2}{5}}x_2 - u_s - \\ \qquad 10\,\mathrm{sgn}\, s - 2s^{\frac{7}{5}} - 10s^{\frac{3}{5}}, \\ u_s = 6x_1^{\frac{5}{6}-\frac{7}{18}\mathrm{sgn}(|x_1|-\Omega)}x_2, \\ s = x_2 + 2x_1^{\frac{7}{5}} + 10x_1^{\frac{3}{5}}, \end{cases}$$

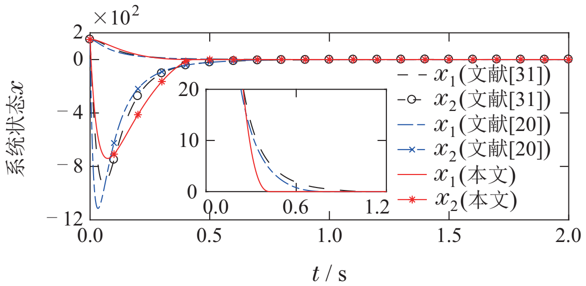
式中: 参数Ω的作用与本文中算法相同, 均是为了避免奇异问题, $\Omega = 0.001$. 文献[31]中的算法为

$$\begin{cases} u = u_{\mathrm{eq}} + u_{\mathrm{n}}, \\ u_{\mathrm{eq}} = -x_2^3 - 2x_1^{\frac{1}{9}} - \dfrac{3}{5}x_1 - 3x_1^{\frac{17}{9}} - \\ \qquad 2x_2^{\frac{1}{9}} - \dfrac{3}{5}x_2 - 3x_2^{\frac{17}{9}}, \\ \dot{u}_{\mathrm{n}} = -10\,\mathrm{sgn}\, s - 2|s|^{1.5}\mathrm{sgn}\, s - \\ \qquad 0.5|s|^{0.01}\mathrm{sgn}\, s, \\ s = \dot{x}_2 + 2x_2^{\frac{1}{5}} + \dfrac{3}{5}x_1 + 3x_1^{\frac{17}{13}} + \\ \qquad 2x_1^{\frac{1}{9}} + \dfrac{3}{5}x_1 + 3x_1^{\frac{17}{9}}. \end{cases}$$

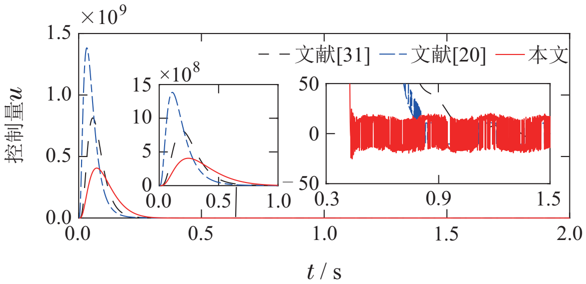
本文所设计的控制器参数分别取$k_1 = k_2 = 50$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{3}{5}$, $\Omega = 0.001$, $\eta = 10$, 满足假设1. 由定理2可知, 收敛时间的上界为

$$T < \frac{1}{k_1\alpha_1(1-\lambda_1)} + \frac{1}{k_2\alpha_2(1-\lambda_2)} = 1.0\,\mathrm{s}.$$

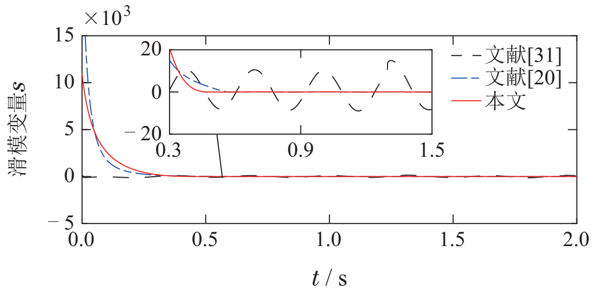
不同初值条件下的仿真结果分别如图1–3所示, 可以看出: 与文献[31]和文献[20]中的算法相比, 本文所提出的算法具有较好的控制性能, 并且对于不同的初始条件, 系统状态均能在1.0 s内收敛至零. 值得注意的是, 由于切换控制项的存在, 本文和文献[20]中的算法均包含高频抖振信号, 而文献[31]中算法由于积分作用, 不存在高频抖振信号, 但是其控制效果较差.



(a) 系统状态



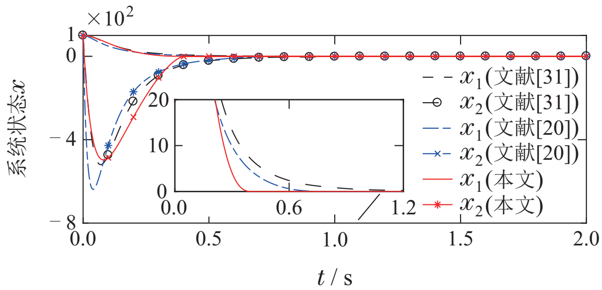
(b) 控制量



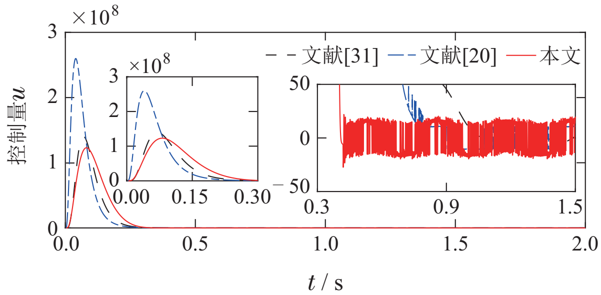
(c) 滑模变量

图 1　初值为(150, 150)时仿真结果

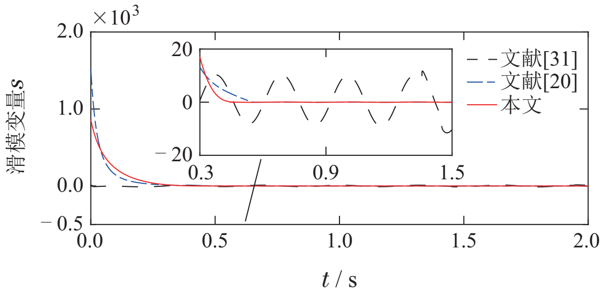
Fig. 1　Simulation results with initial conditions (150, 150)



(a) 系统状态



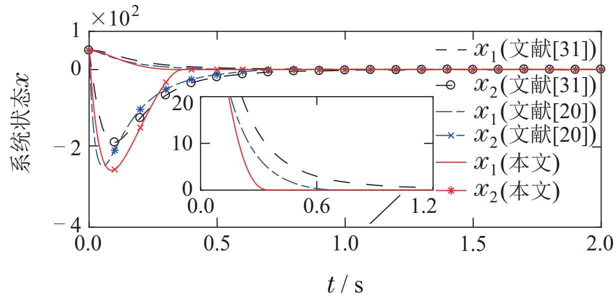
(b) 控制量



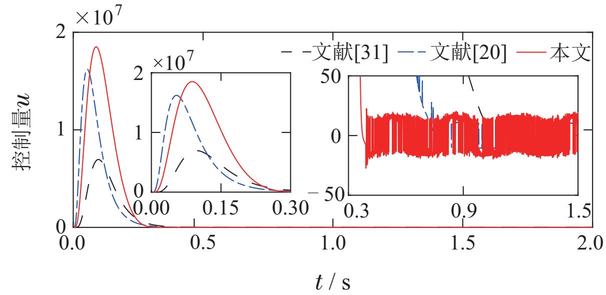
(c) 滑模变量

图 2　初值为(100,100)时仿真结果

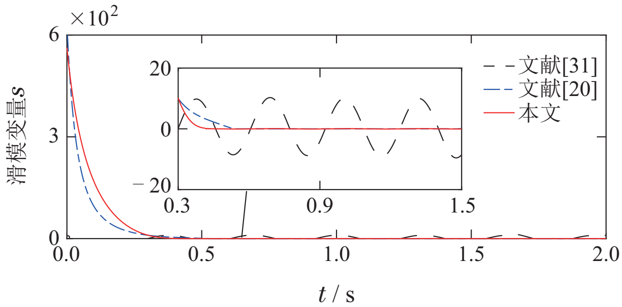
Fig. 2　Simulation results with initial conditions (100, 100)



(a) 系统状态



(b) 控制量



(c) 滑模变量

图 3 初值为(50, 50)时仿真结果

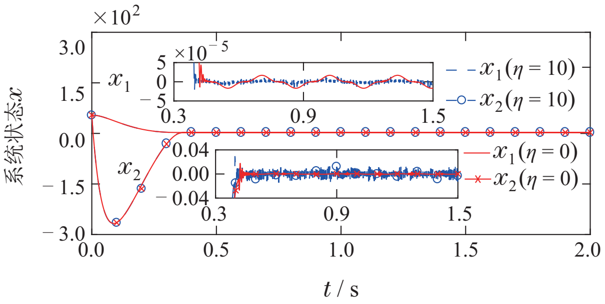
Fig. 3 Simulation results with initial conditions (50, 50)

为了验证定理3, 将本文所提出的控制算法切换项增益设置为$\eta = 0$, 其他控制器参数不变, 初始条件为$x_1(0) = x_2(0)=50$, 仿真结果如图4所示. 由图4可知, 两种情况下系统的收敛速度基本相同. 与$\eta = 10$相比, 虽然$\eta = 0$时系统的位置误差较大, 但其速度波动较小, 控制信号的抖振也较小.

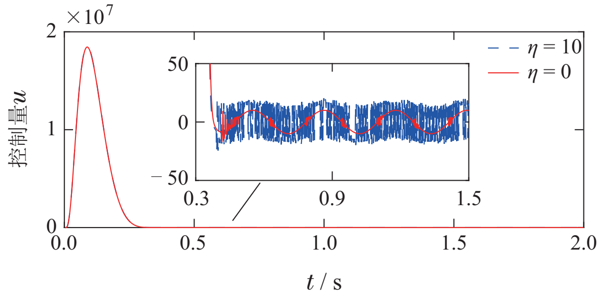
为了验证参数Ω的影响, 系统的初始条件设置为$x_1(0) = x_2(0) = 50$, 不同Ω取值的仿真结果如图5所示. 由图5可以看出, 当$\Omega = 0$时, 由于系统存在奇异问题, 稳态时存在较大的位置和速度波动, 而当Ω取值较小时($\Omega = 1\times10^{-4}$)即可有效避免奇异问, 但是随着Ω取值增大($\Omega = 1$), 系统的收敛速度变慢且存在振荡, 并且振荡的幅值随着Ω增大而增大. 因此, 应综合考虑奇异性和收敛性, 选择合适的Ω值.

5 结论

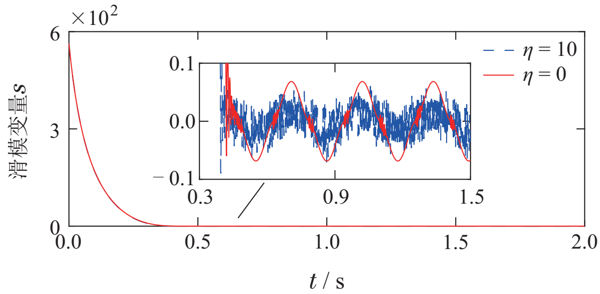
本文研究了受未知外部扰动侵袭的一类二阶非线性系统的固定时间镇定控制问题. 根据固定时间稳定性理论, 本文利用双曲正切函数的限幅特性提出了一种新的固定时间稳定方法, 并给出了收敛时间及其上界值的计算公式. 基于所提出的固定时间稳定方法, 本文设计了固定时间收敛的终端滑模面和滑模趋近律, 并引入了基于系统状态的自适应切换方法避免了奇异问题, 实现了系统的固定时间稳定和固定时间有界稳定. 仿真结果表明, 与文献[20]和文献[31]中的方法相比, 本文所提出的控制方法具有较好的控制性能.



(a) 系统状态



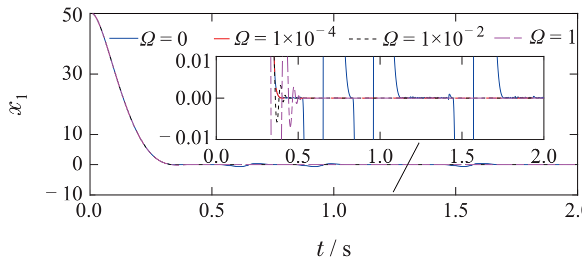
(b) 控制量



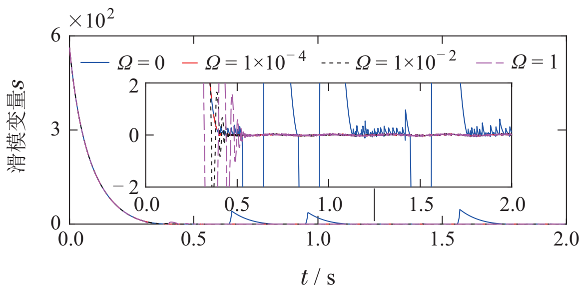
(c) 滑模变量

图 4 不同η值的仿真结果

Fig. 4 Simulation results with different η



(a) 系统状态 x_1



(b) 滑模变量

图 5 不同Ω值的仿真结果

Fig. 5 Simulation results with different Ω

参考文献:

[1] DING Shihong, LI Shihua. A survey for finite-time control problems. *Control and Decision*, 2011, 26(2): 161 – 169.
(丁世宏, 李世华. 有限时间控制综述. 控制与决策, 2011, 26(2): 161 – 169.)

[2] LIU Yang, JING Yuanwei, LIU Xiaoping, et al. Survey on finite-time control for nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(1): 1 – 12.
(刘洋, 井元伟, 刘晓平, 等. 非线性系统有限时间控制研究综述. 控制理论与应用, 2020, 37(1): 1 – 12.)

[3] DING S H, LI S H, LI Q. Stability analysis for a second-order continuous finite-time control system subjected to a disturbance. *Journal of Control Theory and Applications*, 2009, 7(3): 271 – 276.

[4] VASEGHI B, HASHEMI S S, MOBAYEN S, et al. Finite-time chaos synchronization in time-delay channel and its application to satellite encryption in OFDM communication systems. *IEEE Access*, 2021, 9: 21332 – 21344.

[5] CUI Y, LIU X, DENG X, et al. Command-filter-based adaptive finite-time consensus control for nonlinear strict-feedback multi-agent systems with dynamic leader. *Information Sciences*, 2021, 565: 17 – 31.

[6] ZOU Q. Extended-state-observer based finite-time control of electro-hydraulic system via sliding mode technique. *Asian Journal of Control*, 2022, 24(5): 1 – 17.

[7] CHEN Ziyin, LIN Zhe, JIA Heming, et al. Finite-time control for permanent magnet synchronous motor with prescribed performance. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(4): 479 – 488.
(陈子印, 林喆, 贾鹤鸣, 等. 永磁同步电机有限时间预设性能控制. 控制理论与应用, 2021, 38(4): 479 – 488.)

[8] NGUYEN V C, VO A T, KANG H J. A finite-time fault-tolerant control using non-singular fast terminal sliding mode control and third-order sliding mode observer for robotic manipulators. *IEEE Access*, 2021, 9: 31225 – 31235.

[9] SUN Xunhong, CHEN Weile, DU Haibo, et al. Finite-time stabilization method for a class of second-order nonlinear systems based on output feedback and sliding mode control. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(11): 1727 – 1734.
(孙训红, 陈维乐, 杜海波, 等. 基于输出反馈和滑模控制的一类二阶非线性系统有限时间镇定方法. 控制理论与应用, 2021, 38(11): 1727 – 1734.)

[10] YU X H, KAYNAK O. Sliding mode control with soft computing: A survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(9): 3275 – 3285.

[11] LEVANT A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of control*, 2003, 76(9): 925 – 941.

[12] GAO W B, HUNG J C. Variable structure control of nonlinear systems: A new approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, 40(1): 45 – 55.

[13] MOZAYAN S M, SAAD M, VAHEDI H, et al. Sliding mode control of PMSG wind turbine based on enhanced exponential reaching law. *IEEE Transactions on Industrial Electronics,* 2016, 63(10): 6148 – 6159.

[14] FALLAHA C J, SAAD M, KANAAN H Y, et al. Sliding mode robot control with exponential reaching law. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, 58(2): 600 – 610.

[15] HUANG J, ZHANG Z R, HAN J B, et al. Sliding mode control of permanent magnet generator system based on improved exponential rate reaching law. *IET Electric Power Applications*, 2020, 14(7): 1154 – 1162.

[16] WANG Y Q, FENG Y T, ZHNAG X G, et al. A new reaching law for anti-disturbance sliding mode control for PMSM speed regulation system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 35(4): 4117 – 4126.

[17] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 2012, 57(8): 2106 – 2110.

[18] PARSEGOV S, POLYAKOV A, SHCHEEBAKOV P. Nonlinear fixed-time control protocol for uniform allocation of agents on a segment. *Proceedings of IEEE Conference on Decision Control*. Maui, USA: IEEE, 2013: 7732 – 7737.

[19] ZUO Z Y, TIE L. A new class of finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems. *International Journal of Control*, 2014, 87(2): 363 – 370.

[20] ZUO Z Y, TIE L. Distributed robust finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(6): 1366 – 1375.

[21] RIOS H, EFIMOY D, MPRREMO J A, et al. Time-varying parameter identification algorithms: Finite and fixed-time convergence. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2017, 62(7): 3671 – 3678.

[22] ZHANG L, WEI C Z, JING L, et al. Fixed-time sliding mode attitude tracking control for a submarine-launched missile with multiple disturbances. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 93(6): 2543 – 2563.

[23] WANG L N, DU H B, ZHANG W J, et al. Implementation of integral fixed-time sliding mode controller for speed regulation of PMSM servo system. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102: 185 – 196.

[24] LI H, CAI Y. On SFTSM control with fixes-time convergence. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(6): 766 – 773.

[25] ZOU Q, WEI K, ZHOU G Z. Observer based sliding mode control for PMSM speed regulation system with a novel reaching law. *IET Electric Power Applications,* 2022, 16(12): 1502 – 1520.

[26] NI J, LIU L, LIU C, et al. Fast fixed-time nonsingular terminal sliding mode control and its application to chaos suppression in power system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2016, 64(2): 151 – 155.

[27] ZUO Z Y. Nonsingular fixed-time terminal sliding mode control of nonlinear systems. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(4): 545 – 552.

[28] LI Huijie, CAI Yuanli. Sliding mode control with double power reaching law. *Control and Decision*, 2016, 31(3): 498 – 502.
(李慧洁, 蔡远利. 基于双幂次趋近律的滑模控制方法. 控制与决策, 2016, 31(3): 498 – 502.)

[29] TAO M L, CHEN Q, HE X X, et al. Adaptive fixed-time fault-tolerant control for rigid spacecraft using a double power reaching law. *International Journal of Robust and Nonlinear Contro*l, 2019, 29: 4022 – 4040.

[30] NI J, LIU L, LIU C, et al. Fixed-time leader-following consensus for second-order multi-agent systems with input delay. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(11): 8635 – 8646.

[31] HOU H, YU X, XU L, et al. Finite-time continuous terminal sliding mode control of servo motor systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(7): 5647 – 5656.

作者简介:

邹　权　副研究员, 研究生导师, 目前研究方向为基于有限时间稳定性理论的复杂系统参数辨识与控制, E-mail: zouquan101@163.com;

佟明昊　讲师, 目前研究方向为高性能电机设计、分析与控制, E-mail: mtong@njust.edu.cn;

魏　凯　博士研究生, 目前研究方向为基于强化学习的火炮弹药装填控制技术, E-mail: weikai9512@163.com.