

一种变速度条件下控制攻击角度和时间的制导律

程志强¹, 闫星辉², 张帆¹, 朱纪洪^{3†}

(1. 复杂舰船系统仿真重点实验室, 北京 100071; 2. 西北工业大学, 陕西 西安 710072; 3. 清华大学, 北京 100084)

摘要: 对攻击角度和时间进行控制, 可以使得多枚导弹按照特定的角度和时间对目标进行打击, 在军事上有广泛的应用前景. 目前已有控制攻击角度和时间的制导律极少考虑速度变化的情况, 在实际运用中具有较大的局限性. 本文基于贝塞尔曲线加直线的二段式轨迹, 首先分析并证明了该轨迹长度和最大曲率的变化规律, 在此基础上, 通过二分法确定初始轨迹, 针对飞行过程中的诱导阻力和其它扰动, 设计了 Bezier-PI 控制算法, 通过动态调整轨迹长度来实现攻击时间的高精度控制. 该制导算法计算量小, 鲁棒性强, 适用于弹载计算机实时计算. 通过仿真实验, 验证了该算法可以高精度的控制攻击时间以及攻击角度.

关键词: 攻击角度; 攻击时间; 变速度; 轨迹设计; 贝塞尔曲线

引用格式: 程志强, 闫星辉, 张帆, 等. 一种变速度条件下控制攻击角度和时间的制导律. 控制理论与应用, 2024, 41(2): 364–372

DOI: 10.7641/CTA.2023.20660

An impact time and angle control guidance law under variable speed condition

CHENG Zhi-qiang¹, YAN Xing-hui², ZHANG Fan¹, ZHU Ji-hong^{3†}

(1. Key Laboratory of Complex Ship System Simulation, Beijing 100071, China;

2. Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China; 3. Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Impact-time-and-angle-control guidance (ITACG) law can realize that multiple missiles strike from different impact angles at the same time, which has a wide range of military applications. However, the current methods to solve the ITACG problem rarely consider the variable speed which will cause great limitations in practical application. Based on the two-segment trajectory of Bezier curve and straight line, we analyze the pattern of maximum curvature of the trajectory, and prove that the trajectory length is monotonic with straight-line length. Second, this paper uses binary search to determine the whole trajectory. Third, to control the impact time, we design a Bezier-PI controller that dynamically adjusts the straight-line length. The guidance algorithm has small calculation and strong robustness, which is suitable for real-time calculation by missile-borne computers. The simulation results verified that the algorithm has strong robustness to the induced drag and parasite drag disturbance and can reach a high precision impact time and impact angle.

Key words: impact angle; impact time; variable speed; trajectory design; bezier curve

Citation: CHENG Zhiqiang, YAN Xinghui, ZHANG Fan, et al. An impact time and angle control guidance law under variable speed condition. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(2): 364–372

1 引言

包含攻击角度和时间的制导律(impact-time-and-angle-control guidance, ITACG)可以控制导弹按照特定的角度和时间对目标实施打击, 在军事上具有较高的实战价值. 尤其对于协同对海突击而言, 该类型制导律可以降低对方防空系统的拦截效果, 提高突防概率.

文献[1]在文献[2]的基础上, 加入攻击时间约束得

到了一种ITACG制导律. 文献[1]假设航迹角接近于0, 然后求解线性二次最优控制问题得到了控制量的解析式. 该解析式由角度约束下的偏置比例导引和时间的控制项组成. 文献[3]在假设导弹做匀速或匀加减速的前提下, 设计出带有攻击角度和攻击时间控制的三维制导律, 并使用Lyapunov理论证明了系统的稳定性. 文献[4]通过构造虚拟领弹, 将控制攻击角度和攻击时间问题转化为跟踪虚拟领弹的问题. 文献[5]对文

收稿日期: 2022–07–23; 录用日期: 2023–06–20.

† 通信作者. E-mail: jhzhu@mail.tsinghua.edu.cn; Tel.: +86 10-62796706.

本文责任编辑: 孟斌.

献[1]中的算法进行了改进, 针对航迹角较小的情况设计了补偿算法, 提高了期望攻击角度偏大时的攻击精度. 文献[6]在不假设航迹角小的前提下, 使用最优控制理论设计出ITACG控制律. 文献[7]在估计飞行时间的基础上使用双圆弧规划路径, 可以实现攻击角度和攻击时间控制. 文献[8]将三维攻击时间和角度分为两个阶段进行控制, 第1个阶段进行时间精控和角度粗控, 第2个阶段实施角度精确控制. 文献[9]基于微分对策方法和最优控制律设计了协同制导律. 文献[10]提出了一种改进修正比例导引律, 可控制机载导弹垂直命中目标且攻击时间更为精准. 文献[11]通过设计视线角随横坐标变化的多项式函数, 使用滑模控制律进行跟踪控制. 文献[12]以目标为球心, 构造以领弹到目标的距离为半径的虚拟球体, 通过从弹跟踪球体上的虚拟点来实现协同打击. 文献[13]首先提出了一种偏置比例导引控制律用于控制攻击角度, 通过推导剩余飞行时间计算公式, 最终形成了可以同时控制时间和角度的制导律. 文献[14]通过迭代优化虚拟点实现ITACG制导律. 文献[15]将时变比例导引系数问题转化为一个非线性最优控制问题, 并使用内点法进行了求解. 文献[16]在制导律中加入了加速度终端约束. 文献[17]在角度控制的基础上推导了剩余飞行时间计算公式, 最终使用滑模控制律实现了时间与攻击角度的控制. 以上控制攻击时间和攻击角度的制导律, 基本没有考虑导弹本身的阻力对速度的影响, 在实践中应用较为困难.

为了设计变速度条件下控制攻击角度和攻击时间的制导律, 本文采用了几何制导的方法. 类似于文献[18]使用一段圆弧加一段直线组成打击轨迹, 本文采用贝塞尔曲线加直线的方式形成打击轨迹^[19-20]. 贝塞尔曲线是计算机图形学中常用的参数曲线, 可用于轨迹规划和制导律设计^[21-22]. 本文首先证明了该型轨迹最大曲率以及长度变化规律, 并根据速度剖面规划相应长度的二段式轨迹. 跟踪该轨迹可以实现攻击角度的控制, 且在无诱导阻力和扰动的前提下可在预定的攻击时间实施打击. 对于诱导阻力和扰动存在的情况, 本文设计了实时调整轨迹长度算法, 并通过仿真实验验证了算法的有效性. 主要贡献可总结如下:

- 1) 证明了当发射角与期望攻击角不变时, 二段式轨迹长度随直线段长度的增加而单调增加.
- 2) 证明了当发射角与期望攻击角不变时, 二段式轨迹最大曲率变化规律.
- 3) 设计了一种Besier-PI控制器, 用于调节轨迹长度, 实现高精度时间控制.

本文组织结构如下: 第2节对解决的问题进行了描述; 第3节证明了二段式轨迹长度的单调性与最大曲率的变化规律, 并设计了制导律; 第4节对典型的导弹

进行了仿真实验, 验证了算法的有效性; 第5节进行了总结.

2 问题描述

图1描述了典型的ITACG问题. 初始状态包括初始发射角 θ_1 ; 期望攻击角 θ_2 ; 期望攻击时间 t_D ; 视线角和航迹角分别为 λ 和 θ ; 速度方向与视线的夹角为 σ ; 导弹飞行速度为 $V(t)$; 横侧向最大加速度为 $a_{\max}$; 实际侧向加速度为 a_{cmd} .

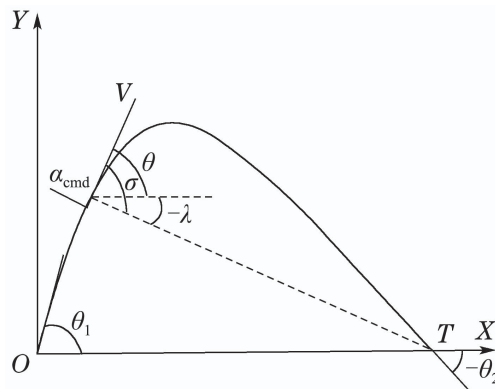


图1 在ITACG问题中主要变量

Fig. 1 The main variable of ITACG

为了综合考虑发动机推力, 诱导阻力和寄生阻力对速度产生的影响, 速度模型可表示为

$$\dot{V} = \frac{T - D}{m}, \quad (1)$$

其中: T 表示发动机推力; D 表示气动阻力; m 表示导弹质量. 相关模型如下^[23]:

$$T(t) = \begin{cases} T_{\text{en}}, & t \leq t_{\text{en}}, \\ 0, & t > t_{\text{en}}, \end{cases} \quad (2)$$

$$D(t) = 0.5\rho V(t)^2 S C_D + \frac{k_D m^2}{0.5\rho V(t)^2 S} a^2, \quad (3)$$

$$m(t) = \begin{cases} m_0 - \int_0^t \mu dt, & t \leq t_{\text{en}}, \\ m_0 - m_{\text{fu}}, & t > t_{\text{en}}, \end{cases} \quad (4)$$

其中: T_{en} 表示导弹发动机工作时的推力; t_{en} 表示导弹发动机工作时间; C_D 表示寄生阻力系数; k_D 为诱导阻力系数; ρ 表示空气密度; S 表示导弹横截面积; a 表示侧向加速度; m_0 表示初始质量; m_{fu} 表示燃料质量; μ 表示发动机工作时单位时间损失的质量.

在本文中, 约定初始发射点坐标为 $E_1(x_1, y_1)$, 目标点坐标为 $E_2(x_2, y_2)$, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示导弹的实时位置, 则ITACG问题实际上可表示为

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_D} \theta(t) \rightarrow -\theta_2, \\ \lim_{t \rightarrow t_D} x(t) \rightarrow x_2, \\ \lim_{t \rightarrow t_D} y(t) \rightarrow y_2. \end{cases} \quad (5)$$

为了解决时变条件下的ITACG问题, 本文采用文

献[20]中的二段式制导轨迹,如图2所示.其中发射线和攻击线的方程可表示为

$$\begin{cases} y = \tan \theta_1(x - x_1) + y_1, \\ y = -\tan \theta_2(x - x_2) + y_2. \end{cases} \quad (6)$$

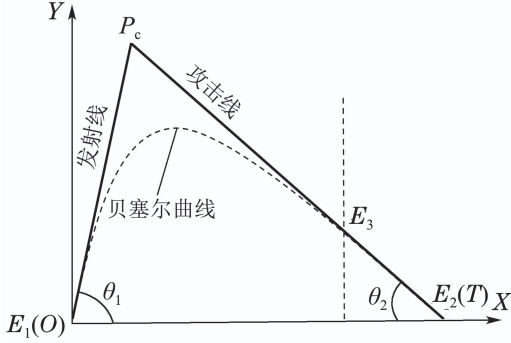


图2 二段式轨迹

Fig. 2 Two segment trajectory

图2中, P_c 点为发射线和攻击线的交点.二段式轨迹第1段为贝塞尔曲线,其方程可描述为

$$\begin{aligned} B(\tau) &= (1 - \tau)^2 E_1 + 2\tau(1 - \tau)P_c + \tau^2 E_3, \\ 0 &\leq \tau \leq 1, \end{aligned} \quad (7)$$

即 τ 从0到1变化的过程中,曲线每一坐标点可通过上式计算得到.二段式轨迹第2段为攻击线段 $\overrightarrow{E_3 E_2}$.为了方便下文描述,使用 B_{E_1, P_c, E_3} 表示起点为 E_1 ;控制点为 $P_c(x_c, y_c)$;终点为 $E_3(x_3, y_3)$ 的贝塞尔曲线,并使用 $|B_{E_1, P_c, E_3}|$ 表示该段曲线的长度.使用 $B_{E_1, P_c, E_3}(\tau)$ 表示特定 τ 对应的点坐标.整个二段式轨迹表示为 B_{E_1, P_c, E_3, E_2} ,其轨迹长度表示为

$$|B_{E_1, P_c, E_3, E_2}| = |B_{E_1, P_c, E_3}| + |\overrightarrow{E_3 E_2}|, \quad (8)$$

则可以通过选取 $E_3 \in \overrightarrow{P_c E_2}$ 使得下式成立:

$$\beta(t_D, E_3) = \int_0^{t_D} \int_0^t \dot{V}(\sigma) d\sigma dt - |B_{E_1, P_c, E_3, E_2}| = 0. \quad (9)$$

文献[19–20]使用网格自适应直接搜索法寻找合适的 E_3 点.该算法复杂度高,且精度不易保障.当速度发生变化时,攻击时间控制精度较低.本文基于曲线长度的单调性,设计了一种实时调节轨迹长度的算法,实现了攻击时间的高精度控制.

3 制导律设计

本节首先分析了 B_{E_1, P_c, E_3, E_2} 轨迹长度及最大曲率的变化规律,证明了二段式轨迹长度 $|B_{E_1, P_c, E_3, E_2}|$ 随着 $|P_c E_3|$ 的增加而减小;证明了最大曲率或者单调变化或者先减小后增加.基于这两个变化规律,提出了轨迹设计算法和Bezier-PI控制器,实现了高精度攻击时间和角度控制.

3.1 轨迹长度单调性证明

不失一般性,本文假设 $x_1 = y_1 = y_2 = 0$.在此基

础上,可有如下定理.

定理1 对于任意 $E_3 \in \overrightarrow{P_c E_2}$,如果 $\frac{\pi}{2} > \theta_1 > 0$ 且 $\frac{\pi}{2} > \theta_2 > 0$,轨迹长度 $|B_{E_1, P_c, E_3, E_2}|$ 随 $|P_c E_3|$ 长度增加而单调减小.

证 本文将曲线 B_{E_1, P_c, E_3} 对应的函数表示为 $f(x)$, $0 \leq x \leq x_3$;线段 $\overrightarrow{E_3 E_2}$ 对应的函数表示为 $g(x)$, $x_3 < x \leq x_2$,则二段式轨迹 B_{E_1, P_c, E_3, E_2} 对应的函数可表示为

$$T(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq x_3, \\ g(x), & x_3 < x \leq x_2, \end{cases} \quad (10)$$

显然, $T(x)$ 在 E_3 光滑可导.此定理的证明可以通过以下步骤形成:首先,证明 $T(x)$ 为凸函数,即证明 $\frac{dT^2(x)}{dx^2} \leq 0$.对于任意的 $0 \leq x \leq x_2$, $\frac{dT^2(x)}{dx^2}$ 可计算为

$$\frac{dT^2(x)}{dx^2} = \begin{cases} \frac{-x_3 y_c}{2(\tau x_3 + (1 - 2\tau)x_c)^3}, & 0 \leq x \leq x_3, \\ 0, & x_3 < x \leq x_2, \end{cases} \quad (11)$$

因此,该函数 $T(x)$ 为凸函数.

其次,证明对任意 $\forall E_3, E'_3 \in \overrightarrow{P_c E_2}$,如果 $x_3 > x'_3$, $y_3 < y'_3$,则对 $x \in [0, x_2]$, $T(x) \leq T'(x)$ 成立.此处需注意 $T'(x)$ 表示 E'_3 对应的贝塞尔函数,不表示 $T(x)$ 的导数.曲线 B_{E_1, P_c, E_3} 的 y 轴坐标根据式(7)可计算为

$$y = 2\tau(1 - \tau)y_c + \tau^2 y_3, \quad (12)$$

当 τ 与 y_c 保持不变时, y 随 y_3 增加而单调增加.因此,对于 E'_3 和 E_3 而言, $\max f'(x) > \max f(x)$.即至少在 B_{E_1, P_c, E'_3, E_2} 上有一点 $\bar{x}$,使得 $T'(\bar{x}) > T(x)$ 成立.下面证明 $T(x) \leq T'(x)$ 对于 $x_1 \leq x \leq x_2$ 处处成立.因为曲线 B_{E_1, P_c, E'_3, E_2} 与曲线 B_{E_1, P_c, E_3, E_2} 的起点和终点相同,则假设 $T(x) \leq T'(x)$ 对于 $x_1 \leq x \leq x_2$ 不是处处成立,则 B_{E_1, P_c, E_3} 与 B_{E_1, P_c, E'_3} 将会相交于除 E_1 和 E_2 以外的点.假设存在 τ 和 τ' 使得下式成立:

$$\begin{aligned} B_{E_1, P_c, E_3}(\tau) &= B_{E_1, P_c, E'_3}(\tau'), \\ 0 < \tau < 1, 0 < \tau' < 1, \end{aligned} \quad (13)$$

则该式展开可得下式:

$$\begin{cases} 2\tau_1(1 - \tau_1)x_c + \tau_1^2 x_3 = \\ 2\tau'_1(1 - \tau'_1)x_c + \tau'^2_1 x'_3, \\ 2\tau_1(1 - \tau_1)y_c + \tau_1^2 y_3 = \\ 2\tau'_1(1 - \tau'_1)y_c + \tau'^2_1 y'_3, \end{cases} \quad (14)$$

将 $y_c = -\tan \theta_2(x_c - x_2)$, $y_3 = -\tan \theta_2(x_3 - x_2)$ 和 $y'_3 = -\tan \theta_2(x'_3 - x_2)$ 代入式(14),则可得如下两式:

$$\begin{aligned} 2\tau_1(1 - \tau_1)x_c + \tau_1^2 x_3 &= \\ 2\tau'_1(1 - \tau'_1)x_c + \tau'^2_1 x'_3, \end{aligned} \quad (15)$$

$$2\tau_1(1-\tau_1)(x_c-x_2)+\tau_1^2(x_3-x_2)=$$

$$2\tau_1'(1-\tau_1')(x_c-x_2)+\tau_1'^2(x_3'-x_2), \quad (16)$$

把式(15)与式(16)相减, 则可得下式:

$$2\tau_1x_2-\tau_1^2x_2=2\tau_1'x_2-\tau_1'^2x_2, \quad (17)$$

对于 $x_2 \neq 0$ 且 $0 < \tau_1, \tau_1' \leq 1$, 因为 $2\tau - \tau^2$ 单调递增, 因此 $\tau_1 = \tau_1'$, 矛盾. 故 $T(x) \leq T'(x)$ 对 $0 \leq x \leq x_2$ 处处成立. 又因为 $T(x)$ 与 $T'(x)$ 均为凸函数, 则整个曲线 $T(x)$ 包裹在 $T'(x)$ 中.

最后, 根据包络原理, 得出

$$|B_{E_1, P_c, E_3, E_2}| < |B_{E_1, P_c, E_3', E_2}| \text{ 成立. 证毕.}$$

从证明过程中可以看出, 定理一成立的基础是整个曲线为凸函数, 且任意贝塞尔曲线不相交, 因此, θ_1 和 θ_2 并不是必须属于区间 $(0, \frac{\pi}{2})$. 该定理成立当且仅当发射线与攻击线相交, 且 $\overrightarrow{E_1P_c}$ 是发射方向, $\overrightarrow{P_cE_2}$ 为期望攻击方向.

3.2 最大曲率单调性证明

轨迹的最大曲率直接影响导弹是否能有效跟踪轨迹. 如果最大曲率过大, 则可能会出现导弹最大侧向加速度无法满足需求的情况. 本文通过分析二段式轨迹最大曲率的变化规律, 可以计算得到满足最大加速度限制下 E_3 的位置. 通过文献[19-20]可知, 贝塞尔曲线 B_{E_1, P_c, E_3} 曲率 $k(\tau)$ 可表示为

$$k(\tau) = \frac{-4|E_1E_3|h_{13}}{\left|\frac{dB_{E_1, P_c, E_3}(\tau)}{d\tau}\right|^3}, \quad (18)$$

其中 h_{13} 是点 P_c 到线段 $\overrightarrow{E_1E_3}$ 的距离, 如图3所示. 图中 P_c, E_1, E_3, P_c' 组成平行四边形.

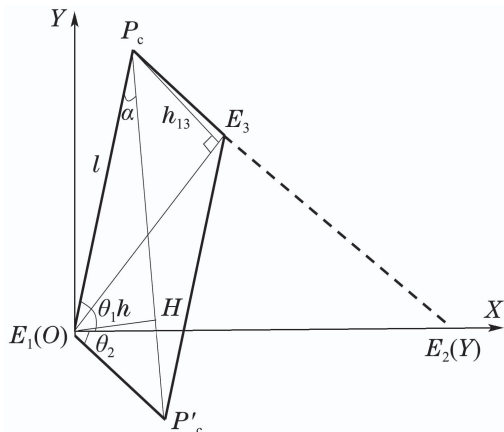


图3 贝塞尔曲线曲率计算方法示意图

Fig. 3 Curvature of Bezier curve.

为了方便下文叙述, 记 $\angle P_cE_1P_c' = \hat{\theta} = \theta_1 + \theta_2$, $\angle E_1P_cP_c' = \alpha$, $|E_1P_c| = l$. 当 E_3 从 P_c 点变化到 E_2 点时, 对应 α 角最小为0, 最大不超过 $\pi - \theta_1 - \theta_2$. 设 H 点为线段 $\overrightarrow{P_c'P_c}$ 的任意一点, 则 $\left|\frac{dB_{E_1, P_c, E_3}(\tau)}{d\tau}\right|$ 的

数值大小与2倍的 $|E_1H|$ 一一对应^[17-18]. 即, 对任意 $0 \leq \tau \leq 1$, 都存在一点 H 使得 $\left|\frac{dB_{E_1, P_c, E_3}(\tau)}{d\tau}\right| = 2|E_1H|$ 成立, 特殊情况下 $\left|\frac{dB_{E_1, P_c, E_3}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 2|E_1P_c|$, $\left|\frac{dB_{E_1, P_c, E_3}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=1} = 2|E_1P_c'|$ 从文献[19-20]可知

$$|k(\tau)| \propto \frac{S_{\Delta E_1 P_c E_3}}{\left|\frac{dB_{E_1, P_c, E_3}(\tau)}{d\tau}\right|^3} =$$

$$\frac{S_{\Delta E_1 P_c P_c'}}{\left|\frac{dB_{E_1, P_c, E_3}(\tau)}{d\tau}\right|^3}, \quad (19)$$

则 $k(\tau)$ 的最大值等价于从 $\overrightarrow{P_c'P_c}$ 上选取一点 H , 使得 $\frac{S_{\Delta E_1 P_c P_c'}}{|E_1H|^3}$ 的值最大. 则关键点在于考察 H 点在 P_c, P_c' 或为 $P_c'P_c$ 垂足的情况.

定理2 如果 $\angle E_1P_cP_c' < \frac{\pi}{2}$ 且 $\angle E_1P_c'P_c > \frac{\pi}{2}$ 成立, 则最大曲率随 $|P_cE_3|$ 增加而单调递减; 如果 $\angle E_1P_cP_c' < \frac{\pi}{2}$ 且 $\angle E_1P_c'P_c < \frac{\pi}{2}$ 成立, 则最大曲率随 $|P_cE_3|$ 的增加先减小后增加, 且拐点在 $\alpha = \frac{2(\arcsin(-\sin \hat{\theta}/3) - \hat{\theta})}{2}$; 如果 $\angle E_1P_cP_c' > \frac{\pi}{2}$, 且 $\angle E_1P_c'P_c < \frac{\pi}{2}$ 成立, 则最大曲率随 $|P_cE_3|$ 的增加而单调增加.

证 当 $\angle E_1P_cP_c' < \frac{\pi}{2}$ 且 $\angle E_1P_c'P_c > \frac{\pi}{2}$ 成立时, 点 H 在 $\overrightarrow{P_c'P_c}$ 的延长线上.

最大曲率可计算为

$$|k(\tau)|_{\max} \propto \frac{S_{\Delta E_1 P_c P_c'}}{|E_1P_c'|^3} = \frac{0.5 \times l \times \sin \hat{\theta}}{|E_1P_c'|^2}, \quad (20)$$

因为 $|E_1P_c'| = |P_cE_3|$, 所以最大曲率随 $|P_cE_3|$ 的增加而减小.

当 $\angle E_1P_cP_c' < \frac{\pi}{2}$, $\angle E_1P_c'P_c < \frac{\pi}{2}$ 成立时, 最大曲率意味着 H 点为垂足, 则 $E_1H \perp P_cP_c'$ 成立. 则记 $h = l \sin \alpha$, 根据几何关系 $|P_cP_c'| = l \cos \alpha + l \sin \alpha / \tan(\pi - \alpha - \hat{\theta})$. 最大曲率可计算为

$$|k(\tau)|_{\max} \propto \frac{0.5}{l^2} \times \frac{\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\tan(\alpha + \hat{\theta})}}{\sin^2(\alpha)}, \quad (21)$$

由于 l 为常数, 经过简化, 可得下式:

$$\frac{1}{|k(\tau)|_{\max}} \propto \sin^2(\alpha) \sin(\alpha + \hat{\theta}), \quad (22)$$

式(22)对 α 求偏导可得

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{|k(\tau)|_{\max}} \right)}{\partial \alpha} \propto \sin \alpha (3 \sin(2\alpha + \hat{\theta}) + \sin \hat{\theta}), \quad (23)$$

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $2\alpha + \hat{\theta} < 1.5\pi$, 故式(23)最多有1个根, 即

$$\alpha_0 = \frac{\arcsin(-\frac{1}{3} \sin \hat{\theta}) - \hat{\theta}}{2}, \quad (24)$$

因此可知, 当 $\alpha < \alpha_0$, $|k(\tau)|_{\max}$ 单调递减; 当 $\alpha \geq \alpha_0$, $|k(\tau)|_{\max}$ 单调递增.

如果 $\angle E_1 P_c P'_c > \frac{\pi}{2}$, $\angle E_1 P'_c P_c < \frac{\pi}{2}$, 点 H 在 $\overrightarrow{P'_c P_c}$ 的延长线上, 则最大曲率可计算为

$$|k(\tau)|_{\max} \propto \frac{0.5 \times |E_1 P'_c| \times \sin \hat{\theta}}{l^2}, \quad (25)$$

因为 $|E_1 P'_c| = |E_1 P_c|$, 故最大曲率随 $|P_c E_3|$ 的增加而单调增加. 证毕.

在实践中, α_0 可以被直接计算得到. 当 $0 < \alpha_0 < \pi - \hat{\theta}$ 时, 最大曲率先减小后增加; 反之, 最大曲率具有单调性.

3.3 轨迹生成算法

对于攻击角度和攻击时间控制, 应当首先基于最大曲率单调计算线段 $P_c E_2$ 上符合最大曲率限制的点的集合, 然后, 基于轨迹长度单调在该集合中选取一个 E_3 点形成初始路径. 通常而言, 导弹的最大加速度 $a_{\max}$ 和平均速度 V 可以通过估算得到, 则曲线最大曲率可设置为 $|k(\tau)|_{\max} = \frac{a_{\max}}{V^2}$. 则可先通过二分查找法确定 $E_{3,\text{low}}(x_{3,\text{low}}, y_{3,\text{low}})$ 和 $E_{3,\text{high}}(x_{3,\text{high}}, y_{3,\text{high}})$, 然后, 在这两点之间选取一点使得轨迹长度和目标长度匹配, 其中 low 和 high 表示符合最大曲率约束的轨迹长度最小和轨迹长度最大的点. 具体计算算法如表1所示.

表1 根据 $|k(\tau)|_{\max}$ 计算 $x_{3,\text{low}}$ 和 $x_{3,\text{high}}$

Table 1 Calculate $x_{3,\text{low}}$ and $x_{3,\text{high}}$ according to

$|k(\tau)|_{\max}$

- | | |
|----|---|
| 1 | 计算 α_0 ; |
| 2 | 如果 $0 < \alpha_0 < \pi - \hat{\theta}$: |
| 3 | $x_{3,\text{middle}} = x_c + \frac{l \sin \alpha_0 \cos \theta_2}{\sin(\pi - \alpha_0 - \hat{\theta})}$, |
| 4 | 在 x_c 和 $x_{3,\text{middle}}$ 之间使用二分搜索确定 $x_{3,\text{low}}$. |
| 5 | 在 $x_{3,\text{middle}}$ 和 x_2 之间使用二分搜索确定 $x_{3,\text{high}}$; |
| 6 | 如果 $\alpha_0 \leq 0$ 或 $\alpha_0 \geq \pi - \hat{\theta}$: |
| 7 | 在 x_c 和 x_2 使用二分搜索确定 $x_{3,\text{middle}}$, |
| 8 | 如果 $x_{3,\text{middle}}$ 点最大曲率大于 x_2 点: |
| 9 | $x_{3,\text{low}} = x_{3,\text{middle}}$, $x_{3,\text{high}} = x_2$, |
| 10 | 否则: |
| 11 | $x_{3,\text{low}} = x_c$, $x_{3,\text{high}} = x_{3,\text{middle}}$. |

表1中 $x_{3,\text{middle}}$ 表示最大曲率与 $|k(\tau)|_{\max}$ 相等的点. 当 $E_{3,\text{low}}(x_{3,\text{low}}, y_{3,\text{low}})$ 和 $E_{3,\text{high}}(x_{3,\text{high}}, y_{3,\text{high}})$ 之间没有可选择的点使得飞行轨迹长度与期望长度相匹配时, 则本算法无法完成打击. 在实际运用中, 绝大

多数算法均有适用范围, 但目前为止, 极少有算法明确其适用的范围. 本文算法清晰的界定出使用范围, 有助于实际应用. 由于本算法最多执行3次二分搜索算法, 其复杂度为对数级别, 实际运行时收敛很快.

3.4 Bezier-PI控制器

在实际应用中, 导弹因为气动阻力而产生的速度变化难以精确预测, 由此带来的速度变化可能会导致较大的攻击时间误差. 为了提高攻击时间控制精度, 本文基于轨迹单调的性质, 设计出Bezier-P控制器来根据实际导弹速度实时调整 E_3 点位置. 根据当前导弹速度和已知的寄生阻力, 在规定时间内导弹直线飞行距离可确定为 L_{real} . 在实践中, 可对特定的飞行时间和飞行速度进行仿真, 记录飞行距离并形成二维差值表, L_{real} 可根据剩余时间和速度差值得到. 此时剩余的飞行距离 L_{est} 应当与 L_{real} 相匹配. 假设导弹处于 $B_{E_1, P_c, E_3}(\tau_0)$ 附近, 则剩余轨迹长度为

$$L_{\text{est}} = |J| (N(1 + D) - N(\tau_0 + D)) + |E_3 E_2|, \quad (26)$$

其中 $N(u)$ 和 J 可计算为

$$N(u) = u\sqrt{u^2 + U} + U \log(u + \sqrt{u^2 + U}), \quad (27)$$

$$D = \frac{(J \cdot K)}{|J|^2}, \quad (28)$$

$$J = E_1 - 2P_c + E_3, \quad (29)$$

$$U = \frac{|K|^2}{|J|^2} - \frac{(J \cdot K)}{|J|^2}, \quad (30)$$

$$K = P_c - E_1, \quad (31)$$

为了动态的调整 E_3 点位置, 使用 $\gamma = \frac{|P_c E_3|}{|P_c E_2|}$, 则其初始值 γ_0 介于0-1之间, 且初始值可通过二分法搜索匹配目标长度的位置给出. 则Bezier-PI控制器使用比例积分控制对 γ 进行实时调整, 计算方法如下:

$$\Delta\gamma = k_p(L_{\text{real}} - L_{\text{est}}) + k_i \int_{t_0}^{\infty} (L_{\text{real}} - L_{\text{est}}) dt, \quad (32)$$

其中: k_p , k_i 分别表示比例和积分增益; t_0 为控制初始时刻. 每一时刻的 E_3 点由 $\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma$ 确定. 该算法根据 L_{real} 和 L_{est} 实时调整 E_3 位置, 可以在导弹进入直线前有效的增减轨迹长度, 达到精确时间控制的目标.

3.5 轨迹跟踪算法

对于轨迹跟踪算法而言, 目前已有较多成熟的算法可以借鉴. 本文选择跟踪轨迹上距离导弹最近的点. 设导弹到该点切线 l 的距离为 d , 且 l 的倾角为 θ_d ; 则侧向加速度可表示为

$$a = -(q_1 d + q_2 \dot{d}), \quad (33)$$

其中: q_1 , q_2 点为可设置参数; $\dot{d}$ 为距离 d 的导数; $\ddot{d}$

$V(t) \sin(\theta - \theta_d)$.

4 仿真实验

4.1 关键参数数值

在本文中, 导弹装备一个推力为 $T_{en} = 5000 \text{ N}$ 的发动机, 工作时间为 $t_{en} = 10 \text{ s}$, 燃料总重量为 $m_{fu} = 100 \text{ kg}$, 燃料消耗率为 $\mu = 10 \text{ kg/s}$, 最大水平过载为 $a_{\max} = 200 \text{ m/s}^2$, 寄生阻力随速度变化曲线如图4^[19]所示, 诱导阻力系数 $k_D = 0.001$.

不失一般性, 导弹发射点 $E_1 = [0 \ 0]^T$, $E_2 = [10000 \ 0]^T$, 仿真步长为 0.001 s , 控制频率为 100 Hz . 为了进一步仿真执行器动态, 本文在控制指令到实际作用之间放置一个时间常数为 0.02 s 的一阶惯性环节. 对于初始轨迹设计, $|k(\tau)|_{\max} = 0.005$. 对于Bezier-PI控制器, $k_p = 1.0 \times 10^{-4}$, $k_i = 2.0 \times 10^{-4}$. 对于轨迹跟踪算法, $q_1 = 2$, $q_2 = 3.74$. 在实际仿真过程中, 轨迹调整算法在发动机关机后开始运行.

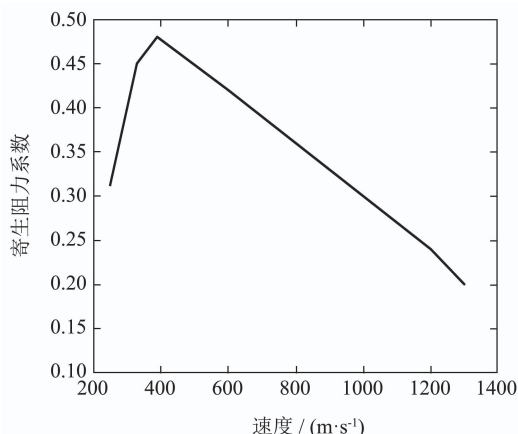


图4 寄生阻力随速度变化曲线图

Fig. 4 Parasitic drag coefficient

4.2 多攻击时间仿真

为了验证本文所提算法, 对发射角为 $\theta_0 = 45^\circ$, 期望攻击角为 $\theta_f = -45^\circ$ 的情况进行了仿真研究. 对期望攻击时间从 56 s 到 62 s 间隔 2 s 进行了仿真, 仿真轨迹如图5所示. 从图5中可以看出, 随着时间延长, 导弹的飞行轨迹逐渐向上延伸. 由于加速度需通过一个一阶惯性环节, 响应较慢, 62 s 对应轨迹越过了 $\overrightarrow{P_c E_2}$, 并由于跟踪曲线切线方向而持续在 $\overrightarrow{P_c E_2}$ 外飞行. 随着跟踪轨迹结束, 导弹沿 $\overrightarrow{P_c E_2}$ 跟踪飞行并最终击中目标.

同时, 为了验证该算法的实时调节轨迹的能力, 本文将寄生阻力加倍, 持续 10 s , 并与正常情况进行对比. 为了对比, 本文实现了文献[19–20](对比算法1)和文献[13](对比算法2)中的算法. 使用本文所提算法计算得到的 E_3 点位置, 与文献[19–20]中相同, 但本文算法在证明单调性的基础上可使用二分查找法, 效率和精度更高. 且文献[19–20]中算法并没有考虑实时轨迹修正, 故会产生较大误差. 文献[13]基于偏置比例

导引控制律进行控制, 对于速度变化的情况考虑较少. 3种方法的攻击时间误差值见表2和表3, 表2中第1列为期望攻击时间, 其余2, 3, 4列分别为寄生阻力正常下3种算法的攻击时间误差, 第5列为对比算法2在恒速度条件下的时间误差; 表3分别为寄生阻力扰动条件下3种算法的攻击时间误差. 在仿真中, 3种算法的攻击角度误差均控制在 1° 以内, 此处不再详细列举.

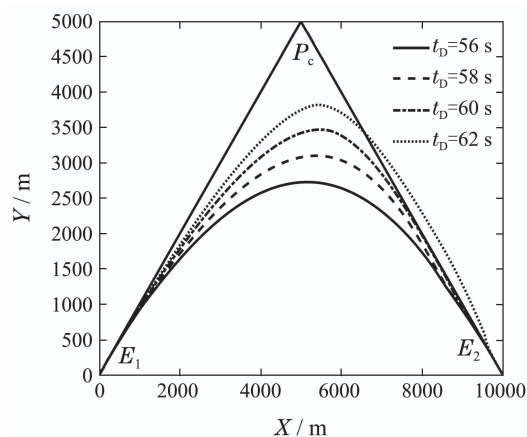


图5 不同攻击时间飞行轨迹

Fig. 5 Trajectory of different desired impact time

表2 不同算法在正常阻力下仿真结果

Table 2 Different algorithm results when parasite drag coefficient is normal

t_D	Bezier-PI	对比算法1	对比算法2	恒速度下对比算法2
56	0.026	0.338	9.216	-0.09
58	0.011	0.434	8.237	0.016
60	0.039	0.694	12.486	0.073
62	0.285	1.426	14.682	0.126

表3 不同算法在阻力扰动下仿真结果

Table 3 Different algorithm results when parasite drag coefficient is disturbed

t_D	Bezier-PI	对比算法1	对比算法2
56	0.002	1.252	18.279
58	0.025	1.376	10.532
60	0.112	1.659	13.830
62	0.764	2.406	15.936

从表2和表3中可以看出, 由于本文所提算法动态实时调整轨迹, 两种状态下的攻击时间误差均较小. 对比算法1在寄生阻力正常的情况下, 取得了较好的控制效果; 但当寄生阻力发生变化时, 攻击时间误差变化较大. 对比算法2在无阻力情况下, 取得了极高的攻击时间控制精度; 但对于存在阻力的情况, 该算法产生了较大的攻击时间误差. 这是由于对比算法2的控制律推导基于恒定速度假设, 当速度变化时会出现较大的误差.

4.3 特定攻击时间仿真

本节针对第4.2节中期望攻击时间为60 s且寄生阻力受扰的情况进行仿真分析. 图6展示了3种算法在寄生阻力扰动情况下以及对比算法2在无阻力情况下的飞行轨迹. 从本文算法与文引用文献[19–20]中算法的对比中可以看出, 在初始阻力增大的情况下, 本文算法对飞行轨迹进行了收缩, 减小了飞行距离, 实现了更高精度的时间控制. 对于对比算法2而言, 该算法在无阻力的情况下通过一个远距离的弧线实现了高精度的时间和角度控制. 但当出现阻力时, 该算法前期使用了较多的飞行时间, 最终导致了较大的攻击时间误差.

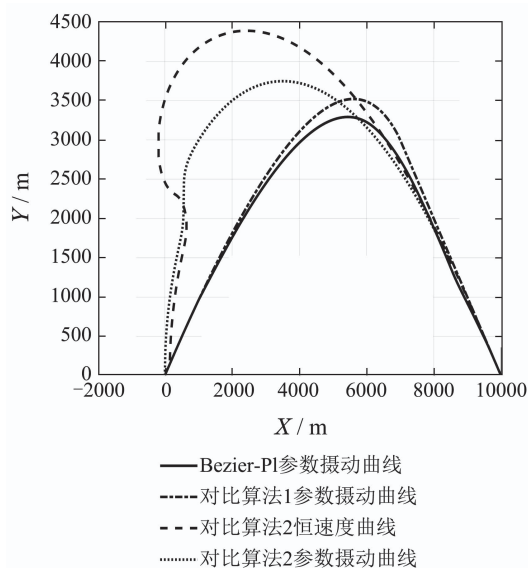


图6 期望攻击时间为60 s时不同算法飞行轨迹

Fig. 6 The different trajectory for desired impact time 60 s

图7展示了期望攻击时间为60 s时的4组关键变量. 其中第1幅子图展示了 L_{real} 和 L_{est} 的差值. 从图中可以看出, 由于寄生阻力的变化, 导致轨迹调整算法在运行初期面临了较大的误差. 但通过Bezier-PI控制器作用, L_{real} 和 L_{est} 之间误差迅速收敛到0附近, 并实现了高精度攻击时间控制. 第2幅子图展示了侧向加速度随时间变化曲线. 从图中可以看出, 侧向加速度整体较小, 没有超过最大加速度. 第3幅图记录了Bezier-PI算法调整下, 随时间变化曲线图. 从图中可以看出, 在Bezier-PI算法调整下, 期望轨迹长度先变小, 后变大, 再变小. 这是由于在算法工作初期, 比例控制将轨迹长度变短, 同时轨迹的跟踪点会向前移动(γ 值变大), 缩短整条轨迹, 导致期望轨迹长度变大. 但当最大曲率点飞过以后, 导弹速度变小, 整个轨迹长度开始缩短, 并最终在接近于1的时候开始跟踪直线. 第4幅子图展示了导弹的飞行速度随时间的变化图. 从图中可以看出, 在导弹发动机关闭后, 速度呈非线性下降, 给攻击时间控制带来巨大的挑战. 从这4幅子图可以看出, Bezier-PI控制器可以有效应对变速度攻击条件下时间和攻击角度的控制问题.

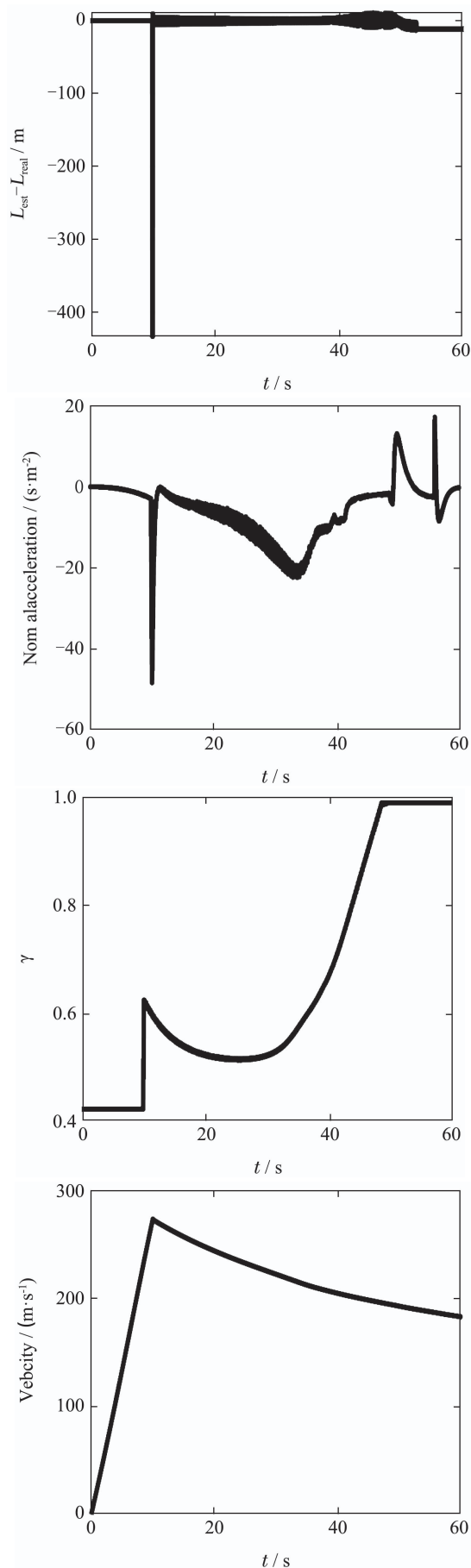


图7 攻击时间为60 s的关键状态变量

Fig. 7 Main variables for desired impact time 60 s

4.4 多弹不同位置仿真

为了进一步对算法性能进行验证, 本文选取了3个不同发射位置和角度进行了仿真. 各弹初始信息如表4所示. 其中: 前4列分别为期望攻击时间、初始位置、初始发射角、期望攻击角; 后两列为仿真结果与

期望值之间的误差. 在气动参数不摄动的条件下, 仿真结果如图8所示, 各导弹攻击时间误差均小于1 s, 攻击角度误差均小于1度. 从仿真结果可以看出, 本文算法可以在不同发射条件下实现攻击角度和时间的控制, 具有较为广泛的适用性.

表4 不同导弹初始状态

Table 4 Different initial states

t_D/s	初始位置	发射角/ $^\circ$	期望攻击角/ $^\circ$	时间误差/s	角度误差
45	(7000, -7000)	5	110	0.358	0.761
50	(500, -3200)	-10	39	0.299	0.595
50	(0, 0)	-45	20	0.684	0.013

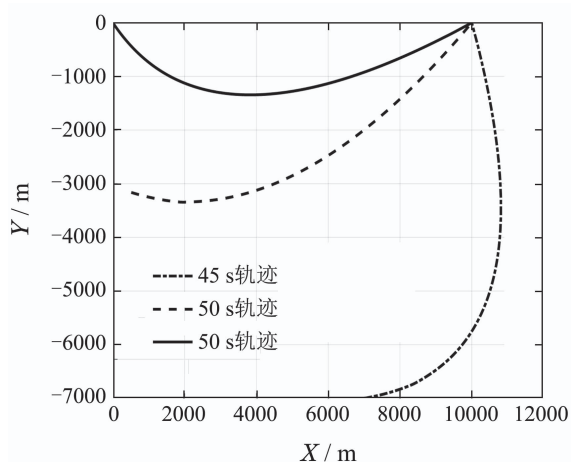


图8 不同导弹位置仿真曲线图

Fig. 8 Trajectories for different fire condition

5 总结

本文采用贝塞尔曲线作为制导轨迹基础, 采用二段式制导轨迹实现变速度条件下攻击角度和攻击时间的控制. 其方法是: 首先, 通过二分法计算得到特定长度的制导轨迹, 并采用轨迹跟踪方法跟踪该轨迹. 跟踪该轨迹可以实现预定的攻击角度. 然后, 针对飞行过程中由于诱导阻力和参数扰动等产生的速度变化, 缩短或延长飞行轨迹, 实现攻击时间精确控制. 设计轨迹和调整轨迹的理论基础是二段式轨迹长度随直线段长度变化而单调变化. 当考虑飞行过程中的横侧向负载极限时, 本文给出了该二段式轨迹最大曲率的变化规律, 可以给出相应的曲线调节范围. 最后, 通过仿真实验, 验证了本文算法的有效性.

参考文献:

- [1] LEE J I, JEON I S. Guidance law to control impact time and angle. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic, Systems*, 2007, 43(7): 301 – 310.
- [2] JEON I S, LEE J I, TANK M J. Impact-time-control guidance law for anti-ship missiles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(2): 260 – 266.

- [3] ZHANG Youan, MA Peibei. Three-dimensional guidance law with impact angle and impact time constraints. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 2008, 29(4): 1020 – 1026.
(张友安, 马培蓓. 带有攻击角度和攻击时间控制的三维制导. 航空学报, 2008, 29(4): 1020 – 1026.)
- [4] MA Guoxin, ZHANG Youan, LI Dapeng. Virtual-leader based impact time and impact angle control. *Flight Dynamics*, 2009, 27(5): 51 – 54.
(马国欣, 张友安, 李大鹏. 基于虚拟领弹的攻击时间和攻击角度控制. 飞行力学, 2009, 27(5): 51 – 54.)
- [5] CHEN Zhigang, SUN Mingwei, MA Hongzhong. UAV's impact angle and time control based on error feedback compensation. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 2008, 29: 34 – 38.
(陈志刚, 孙明玮, 马洪忠. 基于误差反馈补偿的攻击无人机角度和时间控制. 航空学报, 2008, 29: 34 – 38.)
- [6] ZHAO S Y, ZHOU R, WEI C. Design and feasibility analysis of a closed-form guidance law with both impact angle and time constraints. *Journal of Astronautics*, 2009, 30(3): 1064 – 1072.
- [7] ZHANG Yougen, ZHANG Youan, SHI Jianhong, et al. Research on cooperative guidance for multi-missiles based on bi-arcs. *Journal of Naval Aeronautical and Astronautical University*, 2009, 24(5): 1429 – 1434.
(张友根, 张友安, 施建洪, 等. 基于双圆弧原理的协同制导律研究. 海军航空工程学院学报, 2009, 24(5): 1429 – 1434.)
- [8] ZHANG Yougen, ZHANG Youan. Three-dimensional guidance law to control impact time and impact angle: A two-stage control approach. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(10): 1429 – 1434.
(张友根, 张友安. 控制攻击时间与角度的三维导引律: 一种两阶段控制方法. 控制理论与应用, 2010, 27(10): 1429 – 1434.)
- [9] KANG S Y, KIM H J. Differential game missile guidance with impact angle and time constraints. *Proceedings of the International Federation of Automatic Control*. Milano: IFAC, 2011, 9: 3920 – 3925.
- [10] HU Kaiping, WEN Lihua. Study on guidance law for impact angle and time control of UAV-borne missiles. *Journal of Solid Rocket Technology*, 2011, 34(4): 413 – 417.
(胡凯明, 文立华. 无人机机载导弹落角和时间控制导引律研究. 固体火箭技术, 2011, 34(4): 413 – 417.)
- [11] HARL N, BALAKRISHNAN S N. Impact time and angle guidance with sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, 20(6): 1436 – 1449.
- [12] WANG Xiaofang, HONG Xin, LIN Hai. A method of controlling impact time and impact angle of multiple-missiles cooperative combat. *Journal of Ballistics*, 2012, 24(2): 1 – 5.
(王晓芳, 洪鑫, 林海. 一种控制多弹协同攻击时间和攻击角度的方法. 弹道学报, 2012, 24(2): 1 – 5.)

- [13] ZHANG Y A, MA G X, LIU A L. Guidance law with impact time and impact angle constraints. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2013, 26(4): 960 – 966.
- [14] HU Q L, HAN T. New impact time and angle guidance strategy via virtual target approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2018, 41(8): 1755 – 1765.
- [15] WEI D, WEN Q, XIA Q L, et al. Multiple-constraint cooperative guidance based on two-stage sequential convex programming. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 166(1): 300 – 311.
- [16] LI Zeren, GUI Hao, ZHANG Lulu, et al. Sliding-mode guidance law with acceleration and angle constraints. *Control and Decision*, 2021, 36(10): 2511 – 2516.
(李泽仁, 崔颢, 章露露, 等. 考虑加速度约束的终端角度约束滑模制导律设计. *控制与决策*, 2021, 36(10): 2511 – 2516.)
- [17] WANG C Y, DONG W, WANG J T. Impact-angle-constrained cooperative guidance for salvo attack. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2022, 45(4): 684 – 703.
- [18] ZHANG Youan, LIANG Yong, LIU Jingmao, et al. Trajectory reshaping based impact angle and time control. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2018, 39(9): 2009 – 2017.
(张友安, 梁勇, 刘京茂, 等. 基于轨迹成型的攻击角度与时间控制. *航空学报*, 2018, 39(9): 2009 – 2017.)
- [19] YAN X H. *Research on multi-constrained guidance law for aircraft protection*. Beijing: Tsinghua University Dissertation, 2020.
- [20] YAN X, KUANG M, ZHU J. A geometry-based guidance law to control impact time and angle under variable speeds. *Mathematics*, 2020, 8(6): 1029 – 1039.
- [21] FOWLER L E, ROGERS J D. Bezier curve path planning for parafoil terminal guidance. *Journal of Aerospace Information Systems*, 2014, 11(5): 300 – 310.
- [22] QIN Z, QI X, FU Y. Terminal guidance based on bézier curve for climb-and-dive maneuvering trajectory with impact angle constraint. *IEEE Access*, 2018(7): 2969 – 2977.
- [23] POH E K, LI D. Near optimal midcourse guidance law for flight vehicle. *The 36th AIAA Aerospace Sciences Meeting Exhibit*. Reno: AIAA, 1998, 1: 1 – 11.

作者简介:

程志强 助理研究员, 目前研究方向为飞行控制和作战实验, E-mail: czq92@qq.com;

闫星辉 副教授, 目前研究方向为协同制导和发动机控制, E-mail: yanxh@nwpu.edu.cn;

张帆 助理研究员, 目前研究方向为作战实验, E-mail: crazy_musi0725@sina.com;

朱纪洪 教授, 目前研究方向为飞行控制和电机控制, E-mail: jhzhu@mail.tsinghua.edu.cn.