

具有端点质量的一维波动方程半离散格式的一致指数稳定性

赵 希[†], 郭宝珠

(华北电力大学 数理学院, 北京 102206)

摘要: 无穷维系统主要由偏微分方程描述, 可是大部分用偏微分方程描述的控制系统, 无论是单纯的数值实验还是需要应用到实际的问题中去, 都需要对方程进行有限数值离散. 本文考虑了端点带有质量的波动方程在边界反馈控制下半离散格式的一致指数稳定性. 首先, 原闭环系统通过降阶法变成低阶的等价系统, 通过一种间接Lyapunov函数方法证明了降阶等价的连续系统是一致指数稳定的. 其次, 对等价系统空间变量离散得到半离散的差分格式. 平行于连续系统, 间接Lyapunov函数方法证明了半离散系统的一致指数稳定性. 数值实验证明了基于降阶法的一致指数稳定性和经典半离散格式的非一致指数稳定性.

关键词: 波动方程; 端点质量; 有限差分方法; 一致指数稳定

引用格式: 赵希, 郭宝珠. 具有端点质量的一维波动方程半离散格式的一致指数稳定性. 控制理论与应用, 2024, 41(5): 950 - 956

DOI: 10.7641/CTA.2023.21002

On uniform exponential stability of semi-discrete scheme for 1-D wave equation with a tip mass

ZHAO Xi[†], GUO Bao-zhu

(School of Mathematics and Physics, North China Electrical Power University, Beijing 102206, China)

Abstract: Most of the infinite-dimensional systems are described by partial differential equations (PDEs). For PDEs, discretization is most often necessarily for numerical simulation and applications. This paper considers the uniform exponential stability of a semi-discrete model for a 1-D wave equation with tip mass under boundary feedback control. The original closed-loop system is transformed firstly into a low-order equivalent system by order reduction method and the exponential stability of the transformed system by an indirect Lyapunov method is established. The equivalent system is then discretized into a series of semi-discrete systems in spacial variable. Parallel to the continuous system, the semi-discrete systems are proved to be uniformly exponentially stable by means of the indirect Lyapunov method. Numerical simulations illustrate why the classical semi-discrete scheme does not preserve the uniformly exponential stability while the order reduction semi-discrete scheme does.

Key words: wave equations; tip mass; finite difference method; uniform exponential stability

Citation: ZHAO Xi, GUO Baozhu. On uniform exponential stability of semi-discrete scheme for 1-D wave equation with a tip mass. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(5): 950 - 956

1 引言

过去几十年, 柔性结构被广泛应用于许多领域, 如航空航天、土木工程和机械工程. 振动电缆是最普遍的柔性结构之一, 可以抽象为端点带有质量的波动方程系统. 波动方程由偏微分方程描述, 是一种典型的无穷维系统. 自由振动的波动方程有无穷的极点位于虚轴上, 其镇定控制是分布参数系统主要研究的问题之一. 一般来说, 偏微分系统的控制要应用, 就必须离散化. 离散的方法有很多, 最自然的一种是时间保持

连续, 对空间变量进行离散, 这样的离散称为半离散. 半离散的系统依赖于步长, 因此由单一的无穷维系统离散成无穷多的有穷维系统. 在离散过程中, 保持系统物理性质不变的离散格式最为合理. 另外, 从简单使用的角度, 有限差分的离散格式最为大多数工程师所熟悉. 其中一个重要的问题便是: 一个指数稳定的偏微分系统, 其半离散的格式是否能对步长保持一致的指数稳定? 答案常常是否定的.

这一问题自从20世纪90年代以来受到广泛的研

收稿日期: 2022-11-12; 录用日期: 2023-06-21.

[†]通信作者. E-mail: 17864731967@163.com; Tel.: +86 13683387421.

本文责任编辑: 李少远.

国家自然科学基金项目(12131008)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (12131008).

究. 文献[1]首先指出, 对于传统的有限差分和有限元方法, 离散化后系统能量的衰减率关于网格步长不是一致的. 换句话说, 虽然指数稳定的系统半离散的有限差分系统在固定的步长下仍然是指数稳定的, 但随着步长的减小而逐渐衰减到零. 这种非一致性现象导致了物理系统离散的合理性. 多年来的国际研究表明, 这种现象出现的根本原因是在半离散过程中出现了高频伪振荡解, 破坏了离散系统相对于空间步长的一致指数稳定性. 从系统学的角度, 只有那些保持物理特性的离散格式才值得被重视.

国内外研究人员提出了许多方法来解决这个问题, 如Tychonoff正则化方法^[2]、双网格算法^[3-4]、滤波方法^[2,5]、数值粘性法^[6]和混合有限元法^[7-8], 其中数值粘性法最为普遍. 数值粘性法虽然保持了差分格式的简单性, 但要加入数值粘性阻尼项. 混合有限元法虽然也可以, 但取决于基函数的选择, 不是大多数工程人员熟悉的离散格式. 直到最近几年, 文献[9]提出一种新的基于降阶法的有限差分格式. 该格式不仅是一个自然的半离散格式, 且对任何类型的边界条件都能保持一致的指数稳定性和可观测性. 特别是离散系统一致指数稳定性的证明完全平行于连续偏微系统的证明, 极大简化了数值粘性法的复杂证明. 降阶法在文献[10-11]中得到了非常有效的应用.

本文讨论端点带有质量的一维波动方程, 即

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), & x \in (0, 1), t \geq 0, \\ w(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ w_x(1, t) + mw_{tt}(1, t) = U(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中常数 $m > 0$, $U(t)$ 是边界控制.

系统(1)的镇定问题最先在文献[12]中讨论. 在反馈控制

$$U(t) = -aw_{xt}(1, t) - \alpha w_t(1, t) \quad (2)$$

下, 闭环系统为

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), & x \in (0, 1), t \geq 0, \\ w(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ w_x(1, t) + mw_{tt}(1, t) = \\ -aw_{xt}(1, t) - \alpha w_t(1, t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

引入描述质点的状态变量

$$\eta(t) = aw_x(1, t) + mw_t(1, t),$$

则系统(3)变为

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), & x \in (0, 1), t \geq 0, \\ w(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ w_x(1, t) = -\frac{m}{a}w_t(1, t) + \frac{1}{a}\eta(t), & t \geq 0, \\ \dot{\eta}(t) = -\frac{1}{a}\eta(t) - \frac{a\alpha - m}{a}w_t(1, t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

在状态空间

$$\mathcal{H} = \{(f, g, \eta) \in \mathcal{H}_L^1(0, 1) \times L^2 \times \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{H}_L^1(0, 1) = \{f \in H^1(0, 1) | f(0) = 0\},$$

系统(4)可以写成在空间 \mathcal{H} 如下发展方程的形式:

$$\frac{d}{dt}(w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), \eta(t)) = A(w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), \eta(t)), \quad (5)$$

其中算子 A 定义为

$$\begin{cases} A(f, g, \eta) = (g, f'', -\frac{1}{a}\eta - \frac{a\alpha - m}{a}g(1)), \\ D(A) = \{(f, g, \eta) \in \mathcal{H}, A(f, g, \eta) \in \\ \mathcal{H} | f'(1) = -\frac{m}{a}g(1) + \frac{1}{a}\eta\}, \end{cases} \quad (6)$$

系统的能量函数为

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (w_x^2(x, t) + w_t^2(x, t)) dx + \frac{\eta(t)^2}{2(m + \alpha a)}, \quad (7)$$

其对时间的导数满足

$$\dot{E}(t) = -\frac{1}{(m + \alpha a)}(aw_x^2(1, t) + \alpha mw_t^2(1, t)), \quad (8)$$

也就是说, 系统的能量随着时间递减. 文献[12]证明了 $E(t)$ 指数衰减, 即存在常数 $M, \omega > 0$ 使得

$$E(t) \leq Me^{-\omega t} E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (9)$$

系统(4)是一个常微与偏微耦合的指数稳定的系统. 但总的来说, 都强烈依赖于Lyapunov函数的构造. 可是文献[12]对系统(9)的指数稳定的证明则并不是直接的Lyapunov函数方法, 是充分结合了能量乘子与半群特性的方法. 本文的主要目的是把这种方法应用于半离散格式的一致指数稳定性.

本文主要讨论系统(4)数值逼近问题. 采用的证明思路部分与文献[13]相似, 是通过构造降阶格式的Lyapunov函数证明一致指数稳定性. 这方法可用于处理其他偏微分方程系统 (partial differential equations, PDEs), 如基于观测器的控制耦合PDEs^[14]. 虽然降阶的半离散格式等价于连续系统半离散后的最终的离散系统, 但令人惊奇的是对降阶半离散格式构造Lyapunov函数更为简单, 在耦合PDEs^[14]中起到了至关重要的作用. 首先, 本文通过引入了中间变量 $u(x, t) = w_x(x, t), v(x, t) = w_t(x, t)$, 进而得到系统(4)的等价形式, 即

$$\begin{cases} u_t(x, t) = v_x(x, t), & x \in (0, 1), t \geq 0, \\ v_t(x, t) = u_x(x, t), & x \in (0, 1), t \geq 0, \\ v(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(1, t) = -\frac{m}{a}v(1, t) + \frac{1}{a}\eta(t), & t \geq 0, \\ \dot{\eta}(t) = -\frac{1}{a}\eta(t) - \frac{a\alpha - m}{a}v(1, t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (10)$$

系统(10)的能量 $E_1(t)$ 现在可以表示为

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u^2(x, t) + v^2(x, t)) dx +$$

$$\frac{1}{2(m + \alpha a)} \eta(t)^2, \tag{11}$$

并且有耗散性

$$\dot{E}_1(t) = -\frac{1}{(m + \alpha a)} (au^2(1, t) + \alpha mv^2(1, t)), \tag{12}$$

由耗散性, 很容易证明系统(10)在 $(L^2(0, 1))^2 \times \mathbb{R}$ 中对应 C_0 -半群的解. 此外, 式(9)中的指数衰减仍然成立. 从数值分析的角度看, 如何离散式(3)中右边界条件下的偏导对有限差分格式的稳定性及收敛阶都是至关重要的. 因为在式(10)的右边界条件中没有偏导出现, 这是考虑系统(10)而不是系统(3)最直接的好处, 也是降阶法的关键所在.

本文的剩余部分组织如下: 在第2节中, 通过Lyapunov函数法证明了等价连续系统(10)的指数稳定性; 在第3节中, 为等价系统(10)构造了一个标准的空间半离散有限差分格式. 此外, 本文得到了原系统(3)的半离散有限差分格式; 第4节证明了系统(10)的半离散系统的一致指数稳定性, 这导致了原系统(3)的半离散系统的一致指数稳定性; 第5节展示了传统离散格式和降阶离散格式的数值实验比较; 第6节中叙述了本文的结论.

2 连续系统的指数稳定性

本节中, 构造Lyapunov函数证明系统(10)的指数稳定性. 尽管这与系统(4)的证明相似, 但本文在此提出Lyapunov函数, 为了与下一节证明其半离散格式一致指数稳定性构建相关函数的1-1对应做准备. 定义Lyapunov函数

$$V(t) = tE_1(t) + 2 \int_0^1 xu(x, t)v(x, t)dx. \tag{13}$$

为了证明系统(10)的指数稳定性, 文章依赖于如下引理1-2.

引理 1 由系统(10)定义的能量 $E_1(t)$ 的导数满足

$$\dot{E}_1(t) = -\frac{1}{(m + \alpha a)} (au^2(1, t) + \alpha mv^2(1, t)). \tag{14}$$

证 对以式(11)定义的 $E_1(t)$ 两边对 t 求导, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{E}_1(t) &= \int_0^1 (u(x, t)u_t(x, t) + v(x, t)v_t(x, t))dx + \\ &\frac{\eta(t)\dot{\eta}(t)}{m + \alpha a} = \\ &\frac{u(x, t)v(x, t)|_0^1 + \frac{\eta(t)\dot{\eta}(t)}{m + \alpha a} - (au(1, t) + mv(1, t))(u(1, t) + \alpha v(1, t))}{m + \alpha a} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(1, t)v(1, t) &= \\ &-\frac{1}{m + \alpha a} (au^2(1, t) + \alpha mv^2(1, t)). \end{aligned} \tag{15}$$

证毕.

引理 2 存在仅仅与常数 α, m, a 有关的正数 T , 使得 $\dot{V}(t) \leq 0, \forall t \geq T$.

证 对于式(13), 根据柯西不等式

$$(t - 2)E_1(t) \leq V(t) \leq (t + 2)E_1(t), \tag{16}$$

对式(13)直接求导, 由系统(10)可知

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= E_1(t) + t\dot{E}_1(t) + \\ &2 \int_0^1 x(v_x(x, t)v(x, t) + u(x, t)u_x(x, t))dx, \end{aligned} \tag{17}$$

对上式最后一项分部积分得

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 x(v_x(x, t)v(x, t) + u(x, t)u_x(x, t))dx &= \\ v^2(1, t) + u^2(1, t) - \int_0^1 (u(x, t)^2 + v(x, t)^2)dx, \end{aligned} \tag{18}$$

另外, 由式(10)可知,

$$\eta^2 \leq 2a^2u^2(1, t) + 2m^2v^2(1, t), \tag{19}$$

将式(11)-(12)(18)-(19)代入式(17)可知

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{2} \int_0^1 (v(x, t)^2 + u(x, t)^2)dx - \\ &\frac{1}{(m + \alpha a)} (at - a^2 - \alpha a - m)u^2(1, t) - \\ &\frac{1}{(m + \alpha a)} (\alpha mt - m^2 - m - \alpha a)v^2(1, t), \end{aligned}$$

因此存在常数 $T \geq \max\{\frac{a^2 + \alpha a + m}{a}, \frac{m + m^2 + \alpha a}{am}\}$, 使得

$$\dot{V}(t) \leq 0, \forall t \geq T. \tag{20}$$

证毕.

定理 1 存在与初值无关的正数 M_1, ω_1 , 连续系统(10)的能量 $E_1(t)$ 满足

$$E_1(t) \leq M_1 e^{-\omega_1 t} E_1(0), \forall t > 0.$$

证 由式(16)(20)可知

$$E_1(t) \leq \frac{T - 2}{t - 2} E_1(0), t > \max(2, T), \tag{21}$$

令 $T_0 = \max(2, T)$, 由式(21)有

$$E_1(t) \leq \frac{T - 2}{t - 2} E_1(0), t > T_0, \tag{22}$$

因此, 存在常数 $t_0 > 0, 0 < \gamma_0 < 1$, 使得

$$E_1(t_0) \leq \gamma_0 E_1(0), \tag{23}$$

由半群性质, $E_1(t)$ 是指指数衰减的, 即存在不依赖于初值的正常数 M_1, ω_1 使得以下式子成立:

$$E_1(t) \leq M_1 e^{-\omega_1 t} E_1(0), \forall t > 0. \quad (24)$$

证毕.

3 降阶半离散有限差分格式

在这一节中, 首先构建等价系统(10)的半离散有限差分格式. 取定正整数 N , 令空间步长 $h = \frac{1}{N+1}$, 将区间 $[0, 1]$ 等距划分如下:

$$0 = x_0 < \dots < x_j = jh < \dots < x_{N+1} = 1,$$

为了简化符号, 引入一些记号: 用 $\{z_j\}_0^{N+1}$ 表示序列 $\{z_j\}_j$, 并且引入平均算子 $z_{j+\frac{1}{2}}$, 一阶算子 $\delta_x z_{j+\frac{1}{2}}$ 和二阶算子 $\delta_x^2 z_j$ 表示如下:

$$z_{j+\frac{1}{2}} = \frac{z_j + z_{j+1}}{2}, \delta_x z_{j+\frac{1}{2}} = \frac{z_{j+1} - z_j}{h},$$

$$\delta_x^2 z_j = \frac{\delta_x z_{j+\frac{1}{2}} - \delta_x z_{j-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{z_{j+1} - 2z_j + z_{j-1}}{h^2},$$

令 $u_j(t) = u(x_j, t), j = 0, 1, \dots, N+1$, 并且“ \cdot ”代表关于时间的偏导数. 系统(10)的前两个等式在 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处可以表示为

$$u'(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = v_x(x_{j+\frac{1}{2}}, t),$$

$$v'(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = u_x(x_{j+\frac{1}{2}}, t),$$

其中 $x_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})h$. 用微分算子替换后得到

$$\begin{cases} u'_{j+\frac{1}{2}} = \delta_x v_{j+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h^2), \\ v'_{j+\frac{1}{2}} = \delta_x u_{j+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h^2), \end{cases} \quad (25)$$

忽略方程(25)中的无穷小项, 可以得到系统(10)的有限差分空间半离散格式为

$$\begin{cases} u'_{j+\frac{1}{2}}(t) = \delta_x v_{j+\frac{1}{2}}(t), 1 \leq j \leq N, t \geq 0, \\ v'_{j+\frac{1}{2}}(t) = \delta_x u_{j+\frac{1}{2}}(t), 1 \leq j \leq N, t \geq 0, \\ v_0(t) = 0, t \geq 0, \\ u_{N+1}(t) = -\frac{m}{a} v_{N+1}(t) + \frac{1}{a} \eta(t), t \geq 0, \\ \dot{\eta}(t) = -\frac{1}{a} \eta(t) - \frac{a\alpha - m}{a} v_{N+1}(t), t \geq 0. \end{cases} \quad (26)$$

注 1 通过以上有限差分格式的构建过程, 可以看到半离散有限差分格式(26)是连续系统(10)的二阶精度的离散.

引理 3 因为在式(26)中, $\{u_j\}_j, \{v_j\}_j$ 是额外引入的中间变量, 现在消掉 $\{u_j\}_j, \{v_j\}_j$ 得到和式(26)等价的原系统(3)的半离散有限差分格式如下:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(w''_{j+\frac{1}{2}} + w''_{j-\frac{1}{2}}) = \delta_x^2 w_j, 1 \leq j \leq N, \\ \frac{h}{2} w''_{N+\frac{1}{2}} + \delta_x w_{N+\frac{1}{2}} = -\frac{m}{a} w'_{N+1} + \frac{1}{a} \eta, \\ \dot{\eta} = -\frac{1}{a} \eta - \frac{a\alpha - m}{a} w'_{N+1}. \end{cases} \quad (27)$$

证 因为

$$u_{j+\frac{1}{2}} = \delta_x w_{j+\frac{1}{2}}, v_{j+\frac{1}{2}} = w'_{j+\frac{1}{2}}, \quad (28)$$

式(26)第2个式子两边同乘 $\frac{h}{2}$ 得

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{2} = \frac{h}{2} v'_{j+\frac{1}{2}}, 0 \leq j \leq N, \quad (29)$$

结合式(28)可得

$$\begin{cases} u_{j+1} = \delta_x w_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} w''_{j+\frac{1}{2}}, 0 \leq j \leq N, \\ u_j = \delta_x w_{j+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} w''_{j+\frac{1}{2}}, 0 \leq j \leq N, \end{cases} \quad (30)$$

然后消掉变量 u_j , 可以得到系统(27)第1个方程, 即

$$\frac{1}{2}(w''_{j+\frac{1}{2}} + w''_{j-\frac{1}{2}}) = \delta_x^2 w_j, 1 \leq j \leq N, \quad (31)$$

对于式(30)第1个方程, 令 $j = N$ 得

$$u_{N+1} = \delta_x w_{N+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} w''_{N+\frac{1}{2}}, \quad (32)$$

结合式(26)的右边界条件, 可以得到式(27)的第3个方程. 式(27)的第4个方程则是显然的. 反过来, 从式(28)(30)倒推回去, 就从式(27)得到式(26). 所以式(27)和式(26)等价. 证毕.

显然, 系统(26)与系统(27)是等价的. 与文献[13]的证明思路相似, 系统(26)一致指数稳定的证明比系统(27)简单容易的多, 这是降阶差分格式的另外的优势.

4 一致指数稳定性

在这一节中, 将证明原系统(3)半离散格式(27)的一致指数稳定性. 既然系统(26)和系统(27)等价, 只需证明系统(26)的一致指数稳定性即可. 正如本文已经指出的, 这个简单可行得多. 系统(26)的能量定义为

$$E_h(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N h (u_{j+\frac{1}{2}})^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N h (v_{j+\frac{1}{2}})^2 + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{m + \alpha}, \quad (33)$$

接下来的引理4-5对系统(26)的一致指数稳定性的证明至关重要.

引理 4^[13] 对于任意网格函数 $\{U_j\}_j, \{V_j\}_j$ 和 $\{W_j\}_j$

$$h \sum_{j=0}^N \delta_x U_{j+\frac{1}{2}} V_{j+\frac{1}{2}} + h \sum_{j=0}^N U_{j+\frac{1}{2}} \delta_x V_{j+\frac{1}{2}} = U_{N+1} V_{N+1} - U_0 V_0 \quad (34)$$

和

$$h \sum_{j=0}^N \delta_x U_{j+\frac{1}{2}} V_{j+\frac{1}{2}} W_{j+\frac{1}{2}} + h \sum_{j=0}^N U_{j+\frac{1}{2}} \delta_x V_{j+\frac{1}{2}} W_{j+\frac{1}{2}} +$$

$$\begin{aligned}
 & h \sum_{j=0}^N U_{j+\frac{1}{2}} V_{j+\frac{1}{2}} \delta_x W_{j+\frac{1}{2}} = \\
 & U_{N+1} V_{N+1} W_{N+1} - U_0 V_0 W_0 - \\
 & \frac{1}{4} \sum_{j=0}^N (U_{j+1} - U_j)(V_{j+1} - V_j)(W_{j+1} - W_j). \quad (35)
 \end{aligned}$$

引理 5 系统(26)的离散能量满足

$$\dot{E}_h(t) = -\frac{a(u_{N+1})^2 + m\alpha(v_{N+1})^2}{m + \alpha}. \quad (36)$$

证 用 $hu_{j+\frac{1}{2}}$ 乘以式(26)的第1个方程并对于 j 从 0 到 N 求和, 得

$$\sum_{j=0}^N hu'_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} - \sum_{j=0}^N h\delta_x v_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} = 0, \quad (37)$$

由式(37)和引理1中的式(34)得

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N h(u_{j+\frac{1}{2}})^2 + h \sum_{j=0}^N \delta_x u_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} - \\
 & u_{N+1} v_{N+1} = 0, \quad (38)
 \end{aligned}$$

同理, 用 $hv_{j+\frac{1}{2}}$ 乘以式(26)的第2个方程并对于 j 从 0 到 N 得

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N h(v_{j+\frac{1}{2}})^2 - h \sum_{j=0}^N \delta_x u_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} = 0, \quad (39)$$

将式(38)–(39)合并得

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^N h(u_{j+\frac{1}{2}})^2 + \sum_{j=0}^N h(v_{j+\frac{1}{2}})^2 \right) - \\
 & u_{N+1} v_{N+1} = 0, \quad (40)
 \end{aligned}$$

整理 $u_{N+1} v_{N+1}$ 得

$$\begin{aligned}
 & -u_{N+1} v_{N+1} = \\
 & -\frac{(m + \alpha)u_{N+1} v_{N+1}}{m + \alpha} = \\
 & \frac{-mu_{N+1} v_{N+1} - \alpha au_{N+1} v_{N+1}}{m + \alpha} = \\
 & \frac{-(au_{N+1} + mv_{N+1})(\alpha v_{N+1} + u_{N+1})}{m + \alpha} + \\
 & \frac{a(u_{N+1})^2 + m\alpha(v_{N+1})^2}{m + \alpha} = \\
 & \frac{\eta\dot{\eta}}{m + \alpha} + \frac{a(u_{N+1})^2 + m\alpha(v_{N+1})^2}{m + \alpha} = \\
 & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{m + \alpha} + \frac{a(u_{N+1})^2 + m\alpha(v_{N+1})^2}{m + \alpha}.
 \end{aligned}$$

证毕.

由引理5得知, 只要 a, m, α 是正常数, 系统(26)的离散能量 $E_h(t)$ 随着时间是衰减的. 为了证明离散能量的一致指数稳定衰减性, 构造如下 Lyapunov 函数:

$$V_h(t) = tE_h(t) + 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

定理 2 存在于不依赖 h 的常数 $M_2 > 0, \omega_2 > 0,$

对于任意的初值, 使得 $E_h(t)$ 是一致指数衰减的, 即

$$E_h(t) \leq M_2 e^{-\omega_2 t} E_h(0).$$

证 令

$$\begin{aligned}
 V_h(t) &= tE_h(t) + 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} = \\
 & \frac{t}{2} \sum_{j=0}^N h(u_{j+\frac{1}{2}})^2 + \frac{t}{2} \sum_{j=0}^N h(v_{j+\frac{1}{2}})^2 + \\
 & \frac{t}{2} \frac{\eta^2}{m + \alpha} + 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}}, \quad (42)
 \end{aligned}$$

由柯西不等式得

$$\begin{aligned}
 & |2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}}| \leq \\
 & \sum_{j=0}^N h(u_{j+\frac{1}{2}})^2 + \sum_{j=0}^N h(v_{j+\frac{1}{2}})^2 \leq \\
 & \sum_{j=0}^N h(u_{j+\frac{1}{2}})^2 + \sum_{j=0}^N h(v_{j+\frac{1}{2}})^2 + \\
 & \frac{\eta^2}{m + \alpha} = 2E_h(t), \quad (43)
 \end{aligned}$$

也就是说

$$(t - 2)E_h(t) \leq V_h(t) \leq (t + 2)E_h(t). \quad (44)$$

式(41)求导可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_h(t) &= \\
 E_h(t) &+ t\dot{E}_h(t) + 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} u'_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} + \\
 & 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} v'_{j+\frac{1}{2}}. \quad (45)
 \end{aligned}$$

对于式(45)的第3项和第4项, 由引理4中的式(35)得

$$\begin{aligned}
 & 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} u'_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} + 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} v'_{j+\frac{1}{2}} = \\
 & 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} \delta_x v_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} + \\
 & 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} \delta_x u_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} = \\
 & -2h \sum_{j=0}^N (v_{j+\frac{1}{2}})^2 - 2h \sum_{j=0}^N (u_{j+\frac{1}{2}})^2 + \\
 & 2v_{N+1}^2 + 2u_{N+1}^2 - 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} \delta_x v_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} - \\
 & 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} \delta_x u_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} - \\
 & \frac{h}{4} \sum_{j=0}^N (v_{j+1} - v_j)^2 - \frac{h}{4} \sum_{j=0}^N (u_{j+1} - u_j)^2. \quad (46)
 \end{aligned}$$

由式(33)(46)得

$$\begin{aligned}
 & 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} u'_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} + 2h \sum_{j=0}^N x_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} v'_{j+\frac{1}{2}} = \\
 & -h \sum_{j=0}^N (v_{j+\frac{1}{2}})^2 - h \sum_{j=0}^N (u_{j+\frac{1}{2}})^2 + v_{N+1}^2 + u_{N+1}^2 -
 \end{aligned}$$

$$\frac{h}{8} \sum_{j=0}^N (v_{j+1} - v_j)^2 - \frac{h}{8} \sum_{j=0}^N (u_{j+1} - u_j)^2 \leq -2E_h(t) + \frac{\eta^2}{m + \alpha} + v_{N+1}^2 + u_{N+1}^2. \quad (47)$$

因为

$$\eta = au_{N+1} + mv_{N+1},$$

由柯西不等式得

$$\eta^2 \leq 2a^2 u_{N+1}^2 + 2m^2 v_{N+1}^2, \quad (48)$$

根据式(45)(47)–(48)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_h(t) \leq & -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^N h(u_{j+\frac{1}{2}})^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N h(v_{j+\frac{1}{2}})^2 + \\ & \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{m + \alpha} - t \frac{au_{N+1}^2 + mv_{N+1}^2}{m + \alpha} + \\ & u_{N+1}^2 + v_{N+1}^2 \leq \\ & -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^N h(u_{j+\frac{1}{2}})^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N h(v_{j+\frac{1}{2}})^2 - \\ & \frac{(at - a^2 - \alpha a - m)^2 u_{N+1}^2}{m + \alpha} - \\ & \frac{(amt - m^2 - \alpha a - m)^2 v_{N+1}^2}{m + \alpha}. \quad (49) \end{aligned}$$

由此存在 $T \geq \max\{\frac{a^2 + \alpha a + m}{a}, \frac{m + m^2 + \alpha a}{am}\}$, 使得当 $t \geq T$ 时有

$$\dot{V}_h(t) \leq 0, \quad t \geq T. \quad (50)$$

由式(44)–(50)得

$$E_h(t) \leq \frac{T + 2}{t - 2} E_h(0), \quad t > \max(2, T), \quad (51)$$

与连续系统证明相似, 由半群理论可知, 存在于不依赖 h 的常数 $M_2, \omega_2 > 0$, 对于任意的初值, 使得 $E_h(t)$ 是一致指数衰减的.

$$E_h(t) \leq M_2 e^{-\omega_2 t} E_h(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (52)$$

需要指出的是, 对一致指数稳定性的论证是通过 C_0 -半群的性质进行的间接Lyapunov论证, 这与在文献[14]中使用的直接Lyapunov函数方法有很大不同.

5 数值实验

由系统(26)–(27)的等价性, 可知原系统(3)的半离散格式(27)的一致指数稳定性. 为了阐述为什么原系统(3)的半离散格式(27)一致指数稳定, 将降阶半离散格式与传统半离散格式进行数值实验对比. 首先, 降阶半离散有限差分格式写成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(w''_{j+\frac{1}{2}} + w''_{j-\frac{1}{2}}) = \delta_x^2 w_j, \quad 1 \leq j \leq N, \\ \frac{h}{2} w''_{N+\frac{1}{2}} + \delta_x w_{N+\frac{1}{2}} = -\frac{m}{a} w'_{N+1} + \frac{1}{a} \eta, \\ \dot{\eta} = -\frac{1}{a} \eta - \frac{a\alpha - m}{a} w'_{N+1}, \end{cases} \quad (53)$$

而系统(3)的传统半离散有限差分格式可写成如下形式:

$$\begin{cases} w''_j = \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2}, \quad 1 \leq j \leq N, \\ w_0 = 0, \\ \frac{w_{N+1} - w_N}{h} + mw''_{N+1} = -a \frac{w'_{N+1} - w'_N}{h} - \alpha w'_{N+1}, \end{cases} \quad (54)$$

当参数选取 $\alpha = 2, m = 2, a = 1$, 本文考虑降阶半离散系统和传统半离散系统在特征值上的不同.

图1–2展示了当 $N = 100$, 即步长 $h = \frac{1}{101}$ 时, 半离散系统(53)–(54)的特征值分布情况. 如图所示, 半离散系统(53)的高频趋于无穷大, 而半离散系统(54)的高频则累积到虚轴. 这解释了为什么半离散系统(27)保留了一致指数稳定性.

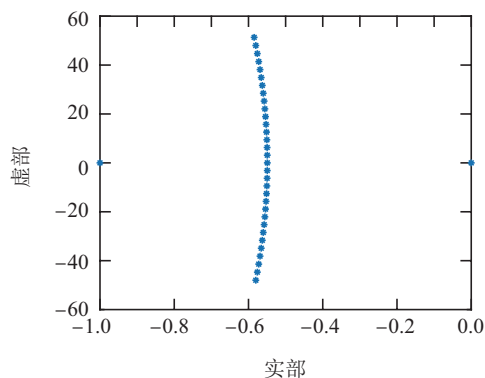


图 1 系统(53)的特征值分布

Fig. 1 Eigenvalue distribution of system (53)

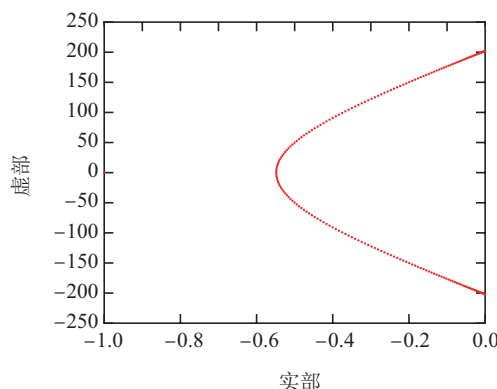


图 2 系统(54)的特征值分布

Fig. 2 Eigenvalue distribution of system (54)

图3–4展示了当 N 从 50 到 100 时, 半离散系统(53)–(54)特征值实部的最大值的变化情况. 可见半离散系统(54)特征值实部的最大值随着 N 的增大而增大, 并逐渐趋向于零, 表明衰减率也逐渐趋向于零. 系统(53)的最大实部保持在一定范围内变化, 这保证了一致指数稳定性.

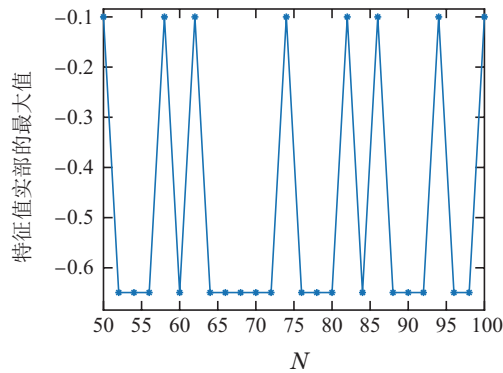


图3 系统(53)的特征值实部的最大值

Fig. 3 The maximum value of the real part of the eigenvalue of the system (53)

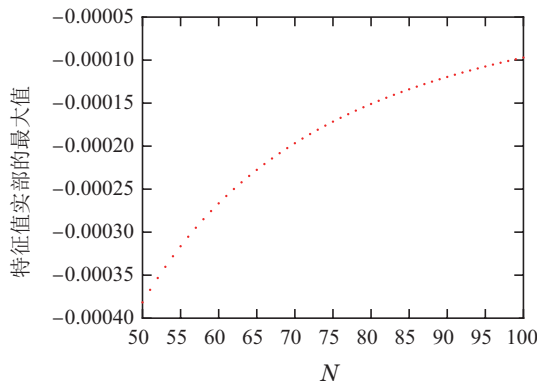


图4 系统(54)特征值实部的最大值

Fig. 4 The maximum value of the real part of the eigenvalue of the system (54)

6 结论

在本文中,考虑端点带有质量的波动方程半离散有限差分格式的一致指数稳定性.用降阶法把原连续系统(3)转变成等价的系统(10).对于转变后的系统(10),本文构建了一个空间半离散化有限差分格式(26),并由此推导出原系统(3)的半离散化有限差分格式(27).利用半群性质由间接的Lyapunov函数方法,证明了半离散格式(26)的一致指数稳定性,这与转换后的连续系统(10)的证明是平行的.这是第一次展示了间接Lyapunov函数方法的应用.根据式(26)–(27)之间的等价关系,得到对于原始连续系统(3)半离散有限差分格式的一致指数稳定性.

参考文献:

- [1] BANK H T, ITO K, WANG C. *International Series of Numerical Mathematics*. Basel: Birkhäuser, 1991, 100: 1 – 33.
- [2] INFANTE J A, ZUAZUA E. Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation. *ESAIM Mathematical Modelling Numerical Analysis*, 1999, 33(2): 407 – 438.
- [3] LORETII P, MEHRENBARGER M. An ingham type proof for a two-grid observability theorem. *ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations*, 2008, 14(3): 604 – 631.
- [4] NEGREANU M, ZUAZUA E. Uniform boundary controllability of a discrete 1-D wave equation. *Systems & Control Letters*, 2003, 48(3/4): 261 – 279.
- [5] ZUAZUA E. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Review*, 2005, 47(2): 197 – 243.
- [6] TEBOU L T, ZUAZUA E. Uniform boundary stabilization of the finite difference space discretization of the 1-d wave equation. *Advances in Computational Mathematics*, 2007, 26(1): 337 – 365.
- [7] CASTRO C, MICU S. Boundary controllability of a linear semi-discrete 1-D wave equation derived from a mixed finite element method. *Numerische Mathematik*, 2006, 102(3): 413 – 462.
- [8] GLOWINSKI R, KINTON W, WHEELER M F. A mixed finite element formulation for the boundary controllability of the wave equation. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 1989, 27(3): 623 – 635.
- [9] LIU J, GUO B Z. A new semidiscretized order reduction finite difference scheme for uniform approximation of one-dimensional wave equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2020, 58(4): 2256 – 2287.
- [10] LIU J, GUO B Z. A novel semi-discrete scheme preserving uniformly exponential stability for an euler-bernoulli beam. *Systems & Control Letters*, 2019, 134: 104518.
- [11] LIU J, GUO B Z. Uniformly semidiscretized approximation for exact observability and controllability of one-dimensional euler-bernoulli beam. *Systems & Control Letters*, 2021, 156: 105013.
- [12] MORGUL O, RAO B, CONRAD F. On the stabilization of a cable with a tip mass. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(10): 2140 – 2145.
- [13] LIU J, HAO R, GUO B Z. Order reduction-based uniform approximation of exponential stability for one-dimensional Schrödinger equation. *Systems & Control Letters*, 2022, 160: 105136.
- [14] REN H J, GUO B Z. Uniformly exponential stability of semi-discrete scheme for observer-based control of 1-D wave equation. *Systems & Control Letters*, 2022, 168: 105346.

作者简介:

赵希 硕士,目前研究方向为分布参数系统控制, E-mail: 17864731967@163.com;

郭宝珠 教授,目前研究方向为分布参数系统控制, E-mail: bzguo@iss.ac.cn.